Feuille 3. Équations différentielles du premier ordre

Equations homogènes

Exercice 1. Trouver les solutions générales des équations suivantes, puis l'unique solution satisfaisant la condition initiale indiquée.

1. $y' + y = 0,\ y(-1) = 1.$ 2. $y' - xy = 0,\ y(0) = 2.$ 3. $y' = (\sin x)\, y,\ y(0) = 1.$

Exercice 2. Trouver les solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation $x\, y' - y = 0$. [On pourra commencer par calculer $y(x)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.]

Exercice 3. Utiliser l'indication de l'exercice précédent pour montrer que l'équation $xy' + y = 0$ a exactement une solution $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Méthode de la solution particulière

Exercice 4. On cherche à résoudre l'équation

(1) $\quad y' + 2y = xe^{-x},$ avec la condition initiale $y(0) = 2$.

1. Résoudre l'équation homogène $y' + 2y = 0$.
2. Chercher une solution de (1) de la forme $y(x) = (ax + b)e^{-x}$. [On déterminera les coefficients a et b soit par identification, soit en utilisant la méthode de variation de la constante.]
3. En déduire toutes les solutions de (1), puis la solution satisfaisant la condition initiale.

Exercice 5. Résoudre les problèmes suivants en utilisant la même démarche que dans l'exercice précédent.

1. $y' - 3y = (1 - 3x)e^{2x}, \qquad y(0) = -2.$
2. $y' - 3y = 2e^{3x}, \qquad y(0) = -2.$
3. $y' + 2y = 2xe^{-2x}, \qquad y(1) = 0.$

Exercice 6. Calculer les primitives des fonctions suivantes.

1. $f(x) = x^2 e^x.$ 2. $f(x) = xe^{-2x}.$

Exercice 7. Utiliser les exercices 2 et 3 pour résoudre les problèmes suivants.

1. $x\, y' - y = 1,\ y(1) = 2.$ 2. $x\, y' + y = 1,\ y(1) = 2.$

[On cherchera des solutions particulières « évidentes » de l'équation non homogène.]

Équations différentielles à variables séparées

Exercice 8.

1. Trouver la solution générale de l'équation

(2) $\quad y' = e^y \sin x.$

2. Expliciter la solution de (2) satisfaisant la condition initiale $y(0) = -\ln 3$. Déterminer le domaine naturel de définition de cette solution.
3. Mêmes questions pour la condition $y(0) = 0$.

Exercice 9.

1. Soit $f(x) = \operatorname{cotan} x$. Déterminer D_f et calculer f'.
2. On considère l'équation différentielle

(3) $\quad (\sin x)^2\, y' = (\sin y)^2.$

   S'agit-il d'une équation linéaire ?

3. Séparer les variables et trouver une solution de (3) satisfaisant la condition initiale $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
4. De même pour la condition $y(\pi) = \pi$.
5. De même pour la condition $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2}$.

Modélisation

Exercice 10. On considère une espèce dont la population à l'instant t est $N(t)$.

1. Dans le modèle de Malthus, le taux d'accroissement de la population est proportionnel à la population. Le facteur de proportionnalité est la différence k entre le taux de natalité et celui de mortalité. Donner l'équation satisfaite par $N(t)$.
2. Le modèle de Verhulst (connu aussi comme « modèle logistique ») prédit que le taux k n'est pas constant, mais est en réalité proportionnel à la différence entre la population maximale N^* que supporte la planète et la population à l'instant t.
   a) Ecrire l'équation satisfaite par N.
   b) Poser $y = \frac{1}{N}$ et calculer N' en fonction de y et y'.
   c) Ecrire l'équation satisfaite par y.
3. Y a-t-il un problème avec ces modèles ?