Feuille 4. Sup. Suites

Pour commencer

Exercice 1. Calculer $\sup A$ et $\inf A$ si :

1. $A = \mathbb{Z}$. 2. $A = \mathbb{Q}$. 3. $A = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. 4. $A =]-1, 1[\setminus\{0\}$.

Exercice 2. Soient (x_n), $(y_n) \subset \mathbb{R}$. Montrer les « demi-théorèmes des gendarmes » suivants :

1. $[x_n \leq y_n,\ x_n \to \infty] \implies y_n \to \infty$. 2. $[x_n \leq y_n,\ y_n \to -\infty] \implies x_n \to -\infty$.

Calcul de limites en utilisant des majorations

Exercice 3.

1. On considère une suite (x_n) tq $x_n \geq 0$, $\forall\, n$, et $x_n \to 0$, et une autre suite (y_n) tq $|y_n| \leq x_n$, $\forall\, n$. Montrer, en utilisant la définition de la limite, que $y_n \to 0$.
2. Combien vaut $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n}$?
3. Même conclusion que dans le point 1. si, au lieu de $|y_n| \leq x_n$, nous avons $|y_n| \leq C x_n$, $\forall\, n$, avec $C \in \mathbb{R}_+$ une constante indépendante de n.
4. On rappelle que la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $]-\pi/2, \pi/2[$. Combien vaut $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\arctan n}{n}$?

Suites croissantes. Introduction générale

Dans la suite de la feuille, nous étudions des suites monotones. Rappelons les résultats suivants concernant les suites croissantes :

1. Toute suite croissante $(v_n) \subset \mathbb{R}$ a une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, et nous avons $\ell = \sup\{v_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$.
2. Nous avons $\ell \geq v_n$, $\forall\, n$.
3. Nous avons $\ell \in \mathbb{R}$ (càd $\ell \neq \infty$) ssi il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $v_n \leq M$, $\forall\, n$.

Calcul de e

Exercice 4. Nous posons $v_n = \dfrac{1}{0!} + \dfrac{1}{1!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}$, $\forall\, n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (v_n) est croissante.
2. En utilisant la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n+1$ pour la fonction exponentielle, montrer que $v_n < e$, $\forall\, n$.
3. La suite (v_n) a-t-elle une limite ℓ dans $\overline{\mathbb{R}}$? ℓ est-elle réelle ? Y a-t-il une comparaison possible entre ℓ et e ?
4. Montrer que $|v_n - e| < \dfrac{e}{(n+1)!} \leq \dfrac{e}{n+1}$, $\forall\, n$.
5. En déduire que $v_n \to e$.

Suites adjacentes

Exercice 5. Soit $y_n := 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln n$, $\forall\, n \geq 1$. Nous nous proposons de montrer que la suite (y_n) converge[1]. Pour ce faire, nous considérons la suite $x_n := 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \ln(n+1)$, $\forall\, n \geq 1$.

Montrer que les suites (x_n), (y_n) sont adjacentes, et conclure. [Pour étudier la monotonie des deux suites, on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction ln.]

Exercice 6. Soient $x_{-1}, y_{-1} > 0$. Nous définissons par récurrence $x_n := \sqrt{x_{n-1} y_{n-1}}$ et $y_n := \dfrac{x_{n-1} + y_{n-1}}{2}$, $\forall\, n \geq 0$. Nous nous proposons de montrer que les suites $(x_n)_{n \geq 0}$, $(y_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes[2].

1. Montrer que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq 0$.
2. Montrer que $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$.
3. Montrer que $y_n \geq y_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$.
4. En déduire que (x_n) et (y_n) convergent.
5. À partir de la relation donnant y_n, déduire que les deux suites ont la même limite, puis qu'elles sont adjacentes.

Etude des différences $v_n - v_{n-1}$

Nous nous proposons d'étudier si la suite (v_n) a une limite finie. Pour ce faire, une technique importante consiste à regarder les propriétés de la suite (u_n) des différences, définie ainsi[3] :

$$u_0 = v_0 \text{ et, pour } n \geq 1,\ u_n = v_n - v_{n-1}.$$

Exercice 7.

1. Montrer que $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$, $\forall\, n$.
2. Si (v_n) est croissante, montrer que $u_n \geq 0$, $\forall\, n \geq 1$.

Deux suites de référence

Dans cette partie, nous allons étudier la convergence de deux suites particulièrement importantes :

1. La suite $(G_n)_{n \geq 0}$ donnée par $G_n = q^0 + q^1 + \cdots + q^n$, avec $q \geq 0$ constante.
2. La suite $(R_n)_{n \geq 1}$ donnée par $R_n = \dfrac{1}{1^a} + \dfrac{1}{2^a} + \cdots + \dfrac{1}{n^a}$, avec $a > 0$ constante.

On rappelle la convention $0^0 = 1$.

Exercice 8. Soit $q \geq 0$.

1. Etudier le comportement de la suite (q^n). [Distinguer les cas $q = 0$, $q \in]0, 1[$, $q = 1$, et $q > 1$.]
2. Calculer la limite ℓ de la suite (G_n).
3. En déduire que (G_n) converge ssi $q \in [0, 1[$.

Exercice 9. On se donne $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $u_n := R_n - R_{n-1}$, avec $n \geq 2$.

---

1. La limite γ de cette suite est la *constante d'Euler*.
2. Leur limite commune est la *moyenne arithmético-géométrique* de x_{-1} et y_{-1}.
3. l'idée principale est que, si les différences $v_n - v_{n-1}$ tendent « suffisamment vite » vers 0, alors la suite (v_n) doit être convergente

2. Comparer u_n aux intégrales $\displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^a}\,dx$ et $\displaystyle\int_{n}^{n+1} \frac{1}{x^a}\,dx$. (Une justification graphique est suffisante.)
3. En déduire un encadrement de R_n pour $n \geq 2$.
4. Aboutir à la conclusion suivante : la suite (R_n) converge ssi $a > 1$.

Convergence de (v_n) à partir des majorations de $|u_n|$

Nous arrivons au cœur de la technique décrite dans cette partie : si nous avons une majoration convenable de $|u_n|$, alors (v_n) converge. La base théorique de cette méthode est donnée par le résultat suivant, que nous allons montrer dans l'exercice 11.

Théorème.
Hypothèses

(H1) On se donne une suite (v_n) et une suite croissante (V_n). Nous posons $u_n = v_n - v_{n-1},\ U_n = V_n - V_{n-1},\ \forall\, n \geq 1$.
(H2) $|u_n| \leq CU_n$, $\forall\, n \geq 1$ (avec C constante).
(H3) La suite (V_n) converge.

Conclusion
La suite (v_n) converge.

Exercice 10. Admettons pour l'instant ce théorème. En déduire les critères suivants de convergence de suites :

1. Si $|v_n - v_{n-1}| \leq Cq^n$, $\forall\, n \geq 1$, avec C constante et $q \in [0, 1[$, alors (v_n) converge.
2. Si $|v_n - v_{n-1}| \leq \dfrac{C}{n^a}$, $\forall\, n \geq 1$, avec C constante et $a > 1$, alors (v_n) converge.

Exercice 11. Prouvons le théorème ci-dessus. Pour ce faire, considérons les suites (w_n) et (W_n), définies par $w_n := CU_n - u_n$, respectivement $W_n := w_1 + w_2 + \cdots + w_n$, $\forall\, n \geq 1$.

1. Montrer que $w_n \geq 0$.
2. Montrer que $w_1 + \cdots + w_n \leq 2C(U_1 + \cdots + U_n)$, $\forall\, n \geq 1$.
3. En déduire que la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge.
4. Pour $n \geq 1$, calculer v_n en fonction de $v_0, u_1, \ldots, u_n$.
5. Pour $n \geq 1$, calculer v_n en fonction de v_0, V_0, W_n, et V_n.
6. En déduire que (v_n) converge.

Exercice 12. Établir la convergence de (v_n) lorsque :

1. $u_n = \dfrac{\sin n}{2^n}$, $n \geq 0$. 2. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{1+n^6}}$, $n \geq 0$.

3. $u_n = \dfrac{\sin(1/n)}{n}$, $n \geq 1$ 4. $u_n = \dfrac{\ln n}{n^2}$, $n \geq 1$.

[Indication pour la question 3 : Étudier le signe de $\sin(x) - x$]
[Indication pour la dernière question : calculer $\lim\limits_{x\to\infty} x^a \left(\ln x/x^2\right)$, avec $a \in]1, 2[$.]