Feuille 5. Continuité

Pour commencer

Exercice 1. Nous admettons la continuité des fonctions usuelles. Montrer la continuité des fonctions suivantes :

1. $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt{1+\sin x}$. 2. $[1,\infty[\ni x \mapsto \ln\left(x+\sqrt{x-1}\right)$.

Exercice 2.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $x \mapsto x^2$, $x \in [0,\infty[$.
2. En déduire les propriétés de continuité et dérivabilité de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \in [0,\infty[$.

Autour du théorème des bornes atteintes

Exercice 3. Établir les inégalités suivantes :

1. $\exists\, C > 0$ tq $|\sin x| \le C\sqrt{x}$, $\forall\, x \ge 1$. 2. $\exists\, C > 0$ tq $x^2 \le C(e^x - 1)$, $\forall\, x \ge 1$.

3. $\exists\, C > 0$ tq $x^2 \le C(e^x - 1)$, $\forall\, x > 0$.

Exercice 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) := e^x - x^{2n+1}$ et $g_n(x) := x^{2n}e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variation de g_n.
2. Déterminer le nombre de solutions de l'équation

(1) $\quad g_n(x) = \dfrac{1}{2n+1}$.

3. Montrer que, parmi les solutions de (1), il y a exactement une solution $> 2n+1$.
   Dans la suite, nous notons x_n cette solution.
4. Montrer que f_n est coerci(ti)ve et en déduire que f_n a (au moins) un point de minimum.
5. Montrer que tout point de minimum x de f_n est solution de $g_n(x) = \dfrac{1}{2n+1}$.
6. Montrer que, si x est point de minimum de f_n, alors $f_n(x) = x^{2n}(2n+1-x)$.
7. Démontrer que x_n est l'unique point de minimum de f_n (*utiliser les questions 6 et 3).*

Exercice 5. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et soit $M = \max\,\{f(x)\,;\ a \le x \le b\}$. Si $a < b$, on veut démontrer l'égalité

$$\sup\,\{f(x)\,;\, a < x < b\} = M.$$

1. Rappeler pourquoi f a un point de maximum, et donc pourquoi il existe un $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = M$.
2. Etablir l'inégalité :

$$\sup\,\{f(x)\,;\, a < x < b\} \le M.$$

3. Soit c comme dans la question 1. Finir la démonstration en distinguant les trois cas de figure possibles : $c \in]a,b[$, $c = a$ ou $c = b$. Lorsque c est l'une des bornes de $[a,b]$, on pourra considérer une suite de points de $]a,b[$ convergeant vers c. Au passage, il faudra montrer l'existence d'une telle suite.

Autour du théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 6. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction continue qui ne s'annule jamais. Est-ce vrai que f a un signe constant ? Manque-t-il une hypothèse ?

Exercice 7. Soit $A \subset \mathbb{R}$ et soit $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable tq $f' = 0$. Est-ce vrai que f est constante ? Manque-t-il une hypothèse ?

Exercice 8. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de Rolle tq $f(a) = f(b)$. Rappelons que, d'après le théorème de Rolle, il existe un $c \in]a, b[$ tq $f'(c) = 0$. Supposons que ce c soit unique.

1. Décrire les variations de f en fonction du signe de $f(c) - f(a)$ (*on pourra utiliser le théorème de Darboux*).
2. Discuter, en fonction de $t \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = t$, avec $x \in [a, b]$.

Exercice 9. Donner le nombre de solutions des équations suivantes :

1. $e^x - x = 2$. 2. $\sin x = 0,91$, $x \in [0, 2\pi]$. 3. $x^3 - 3x = a$, où $a \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

Exercice 10. Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une application continue. Montrer qu'il existe (au moins) un $c \in [a, b]$ tq $f(c) = c$. On dit qu'un tel c est un *point fixe de f*.

Exercice 11. Nous nous proposons de montrer que la même propriété reste vraie si $f : [a, b] \to [a, b]$ est croissante (sans être forcément continue) ; ce résultat est le *théorème du point fixe de Knaster-Tarski.*

Pour prouver ce résultat, nous introduisons l'ensemble $A := \{x \in [a, b] ; f(x) > x\}$.

1. Si $A = \emptyset$, montrer que $c = a$ convient.
2. Si $A \neq \emptyset$, soit $c := \sup A$. Montrer d'abord que $f(c) \geq c$.
3. Conclure si $c = b$.
4. Conclure aussi si $c < b$.
5. Conclure tout court.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tq $\exists\, k \in]0, 1[$ tq $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$. Une telle application est dite *contractante.*

1. Montrer que $\dfrac{1}{2}\sin + \dfrac{1}{3}\cos$ est contractante (*on pourra utiliser l'IAF*).
2. Montrer que sin n'est pas contractante (*raisonner par l'absurde, en utilisant* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$).
3. En utilisant la définition de la convergence d'une suite montrer que, si $x_n \to y$, alors $|x_n - y| \to 0$.
4. Montrer que f est continue (*on pourra utiliser la question précédente et le théorème des gendarmes*).
5. Montrer les inégalités suivantes :
$$f(x) - x \leq (k - 1)x + f(0), \text{ si } x \geq 0, \text{ et } f(x) - x \geq (k - 1)x + f(0), \text{ si } x \leq 0.$$
6. En déduire qu'il existe un $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(c) = c$.
7. Montrer que le point fixe de f obtenu dans la question précédente est unique.
8. Étudier, en fonction de la constante $D \in \mathbb{R}$, le nombre de solutions de l'équation $\dfrac{1}{2}\sin x + \dfrac{1}{3}\cos x - x = D$.
9. On considère la méthode des itérations de Picard, qui consiste à prendre $x_0 \in \mathbb{R}$ arbitraire, et à définir par récurrence $x_n = f(x_{n-1})$, $\forall\, n \geq 1$. Montrer que, quel que soit le choix de x_0, nous avons $x_n \to c$ (*en observant que $f(c) = c$, majorer la quantité $|x_n - c| = |f(x_{n-1}) - f(c)|$ par une suite géométrique qui converge vers 0*).