Université Lyon 1 | Licence STS Portail Math-Info 1ère année
UE Analyse I : les réels et les fonctions | Année 2013-2014

Feuille 6. Suites

Pour commencer

Exercice 1. Justifier rigoureusement les égalités suivantes :

$$1.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}=0.\quad 2.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0.\quad 3.\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{3n+2}}=0.\quad 4.\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n}}=0.$$

Exercice 2. Montrer rigoureusement que la suite $(x_n)_{n\geq 5}$ donnée par $x_n := (-1)^n$, $\forall\, n \geq 5$, n'a pas de limite.

Calcul de limites

Exercice 3. Calculer les limites des suites suivantes.

$$1.\ x_n := \frac{n-\sin n}{n+\cos n},\ n\geq 2.\quad 2.\ x_n := \frac{n-\sin n}{n-\sqrt{n}},\ n\geq 2.\quad 3.\ x_n := \frac{\ln(1+e^n)}{n},\ n\geq 1.$$

$$4.\ x_n := \frac{\ln(1+e^n)+\sqrt{n}\sin n}{n},\ n\geq 1.\quad 5.\ x_n := \frac{P(n)}{Q(n)},\text{ avec } P \text{ et } Q \text{ polynômes de degré } m>0.$$

Pour la suite de la question 3., on pourra utiliser deux méthodes :

(a) La règle de L'Hospital.

(b) En utilisant la double inégalité

$$\ln x \leq \ln(1+x) \leq 1+\ln x,\ \forall\, x\geq 1,$$

que l'on montrera au prélable.

Principe du ε particulier

Exercice 4. Soit (x_n) une suite tq $x_n \neq 0$, $\forall\, n$, et $x_n \to 1$.

1. En utilisant le principe du ε particulier, mq $\exists\, n_0$ tq
$$\frac{1}{2} < \frac{1}{x_n} < \frac{3}{2},\ \forall\, n\geq n_0.$$
2. En déduire que $\dfrac{1}{x_n} \to 1$.
3. Généraliser ce qui précède et aboutir au résultat suivant : si $x_n \neq 0$, $\forall\, n$, et si $x_n \to \ell$, avec $\ell \in \mathbb{R}$ et $\ell \neq 0$, alors $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{\ell}$.

Suites de Riemann – bis

Exercice 5. Si $n \geq 1$, on pose

$$x_n := \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}.$$

1. Calculer x_1, x_2, x_3.
2. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
3. Montrer que $\dfrac{1}{p^2} < \dfrac{1}{p-1} - \dfrac{1}{p}$, $\forall\, p > 1$.

4. En déduire que

$$(1) \qquad \frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{m^2}<\frac{1}{n},\ \forall\, m>n\geq 1.$$

5. En déduire que $x_m < x_n + \dfrac{1}{n}$, $\forall\, m > n \geq 1$.

6. En déduire que $(x_n)_{n\geq 1}$ converge vers un $\ell \in \mathbb{R}$, et que $x_n < \ell \leq x_n + \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 1$.

7. Donner une approximation de ℓ à 10^{-1} près.

Exercice 6. Enoncer et prouver l'analogue de l'exercice précédent pour la suite

$$x_n := \frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{n^3},\ \forall\, n\geq 1.$$

On établira au passage l'analogue suivant de l'inégalité (1) de l'exercice précédent :

$$(2) \qquad \frac{1}{p^3}<\frac{1}{2(p-2)}-\frac{1}{p-1}+\frac{1}{2p},\ \forall\, p>2.$$

Suites de Cauchy

Exercice 7. Reprendre la preuve de l'implication « suite de Cauchy $\Longrightarrow$ suite convergente » (voir le poly sur ε) pour montrer le résultat suivant, déjà utilisé en cours.

Si $(x_n) \subset [a,b]$ est une suite convergente, alors il existe deux suites adjacentes (y_n), (z_n) tq

$$a \leq y_n \leq x_n \leq z_n \leq b,\ \forall\, n.$$

[Indication. Poser $A_n := \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$, $y_n := \inf A_n$ et $z_n := \sup A_n$.]

Exercice 8. Rappelons le résultat suivant (voir le poly sur ε).

Soit (x_n) une suite. S'il existe une suite (ε_n) tq $\varepsilon_n \to 0$ et

$$|x_m - x_n| \leq \varepsilon_n,\ \forall\, m > n,$$

alors (x_n) converge.

Utiliser ce résultat et l'inégalité (1) de l'Exercice 5 pour montrer le résultat suivant.

Si $(a_n)_{n\geq 1}$ est une suite tq $|a_n| \leq 1$, $\forall\, n \geq 1$, et si on pose

$$x_n := \frac{a_1}{1^2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_n}{n^2},\ \forall\, n\geq 1,$$

alors (x_n) converge.

Suites récurrentes

Dans cette partie, nous allons étudier le comportement des suites données par : un terme initial $x_0 \in \mathbb{R}$, et une formule de récurrence, $x_n = f(x_{n-1})$, $\forall\, n \geq 1$. Cette étude est très complexe, en général. Nous allons nous limiter à quelques situations simples. Dans tous les exercices de cette partie, f est supposée continue.

Exercice 9. Calculer x_1, x_2, x_3 si $f(x) = x + x^2$.

Exercice 10. On suppose que (H1) $f(x) \neq x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Montrer que de deux choses l'une : ou bien on a (H2) $f(x) > x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, ou bien (H3) $f(x) < x$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

1. Donner quelques exemples de f vérifiant (H2), respectivement (H3).
2. On suppose (H2). Etudier la monotonie de (x_n).
3. Sous (H2), montrer que $x_n \to \infty$.
4. Que se passe-t-il si on a (H3) ?

Dans les Exercices 11-13, nous supposons (H4) l'équation $f(x) = x$ a exactement une solution, notée a.

Exercice 11.

1. Donner quelques exemples de f vérifiant (H4). Si possible, donner la valeur de a.
2. Donner les signes possibles de $f(x) - x$ si $x \neq a$. Donner graphiquement des exemples correspondant aux quatre situations possibles.

Exercice 12. Nous faisons l'hypothèse supplémentaire (H5) f croissante.

1. Montrer que la suite (x_n) a toujours une limite.
2. Donner la limite de cette suite en fonction des quatre possibilités décrites dans l'Exercice 11 et de la positions de x_0 par rapport à a.
3. Donner la limite de la suite sur des exemples concrets de f et x_0.

Exercice 13. Cette fois-ci, nous supposons (H6) f est décroissante. Nous posons $g := f \circ f$.

1. Montrer que (H4) est (automatiquement) satisfaite par f.
2. Nous supposons aussi (H7) g vérifie (H4) avec le même a que celui de f.
3. On se donne $f(x) = bx$, avec $b \in \mathbb{R}$ paramètre. Pour quelles valeurs de b a-t-on (H6) et (H7) ?
4. Sous (H6) et (H7), montrer que les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}) ont toujours des limites. [On pourra se ramener à l'Exercice 12 appliqué à g.]
5. Étudier la convergence de la suite (x_n) en fonction de propriétés de g, plus spécifiquement du signe de $g(x) - x$ pour $x \neq a$.