Feuille 7. Limites

Pour commencer

Exercice 1. Montrer la non-existence des limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \sin x$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. 3. $\lim\limits_{x\to 0} E(x)$, avec E la partie entière.

Exercice 2. Pour chacune des égalités suivantes, dire si l'existence d'une limite implique celle de l'autre puis, lorsque cela a un sens, démontrer l'égalité annoncée :

1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>-1}} f(x)$. 2. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{\substack{y\to 0\\ y>0}} f(y)$.

4. $\lim\limits_{x\to\infty} f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{y\to 0} f(y)$.

Prolongement par continuité. Fonctions à accolade

Exercice 3. Trouver les valeurs de $a \in \mathbb{R}$ telles que la fonction $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{\sin x}{x^a}$, se prolonge par continuité en 0.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Montrer que f ne se prolonge pas par continuité en 0.

Exercice 5. Même question pour $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$, $\forall\, x \neq 0$.

Exercice 6. Etudier la continuité et la dérivabilité de

1. $f(x) = \begin{cases} x^2+ax+b, & \text{si } x \geq 0 \\ ce^x + d, & \text{si } x < 0 \end{cases}$. 2. $f(x) = \begin{cases} (1-\cos x)/x^2, & \text{si } x \neq 0 \\ a, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

3. $f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ a, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

Ici, a, b, c, d sont des constantes.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2\sin(1/x), & \text{si } x \neq 0 \\ a, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

1. Trouver a tel que f soit continue.
2. Pour cet a :
   a) Montrer que f est dérivable.
   b) Examiner l'existence de la limite $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$.
   c) Y a-t-il une contradiction ?

Autour du théorème des bornes atteintes

Exercice 8. Soit $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que les limites $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to a+} f(x)$ existent et sont finies.

1. Montrer que f est bornée.
2. Application. Montrer qu'il existe une constante C telle que $x \leq C(e^x - 1)$, $\forall\, x > 0$.

Lemme de Hadamard

Exercice 9. Nous nous proposons de montrer le
Lemme de Hadamard. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ indéfiniment dérivable. Si $f(0) = 0$, alors la fonction

$$f_1 : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ f_1(x) = \frac{f(x)}{x},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

se prolonge par continuité en 0, et le prolongement (noté f_2) est une fonction indéfiniment dérivable. De plus, nous avons $(f_2)^{(n)}(0) = \dfrac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que f_1 se prolonge par continuité en 0. Avec quelle valeur ?
2. Calculer la dérivée n^{e} de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$, avec $x \neq 0$.
3. Utiliser le point précédent et la formule de Leibniz pour montrer que
$$(f_1)^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+j} \frac{n!}{j!} f^{(j)}(x) \frac{1}{x^{n-j+1}},\ \forall\, x \neq 0,$$
puis que
$$(f_1)^{(n)}(x) = (-1)^n\, n!\, \frac{\displaystyle\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j!} f^{(j)}(x)\, x^j}{x^{n+1}},\ \forall\, x \neq 0.$$
4. Calculer $\lim_{x \to 0} (f_1)^{(n)}(x)$. On pourra utiliser la règle de L'Hospital.
5. Conclure.
6. Utiliser le lemme de Hadamard pour montrer que la fonction
$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\sin x}{e^x - 1},$$
admet un prolongement par continuité en 0, et que ce prolongement est indéfiniment dérivable.