# Analyse 1 : les réels et les fonctions

Petru Mironescu

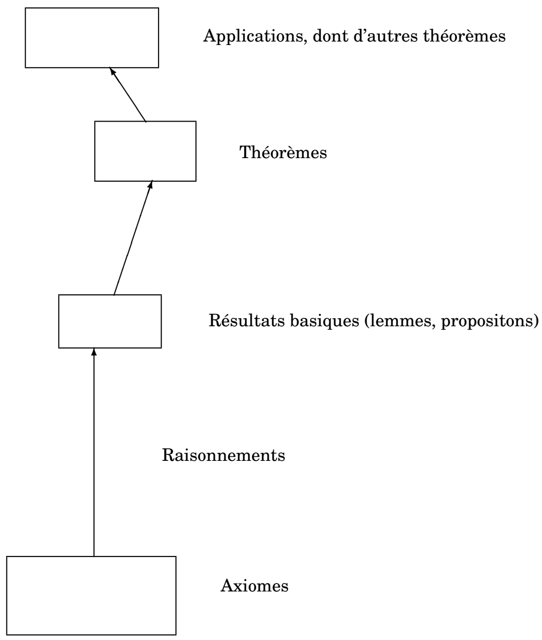
7 septembre 2013

# Analyse 1. Introduction

Le cours « Analyse 1 : les réels et les fonctions » fait la transition entre le lycée et l'enseignement supérieur. Les notions familières de l'analyse (dérivée, suite) sont revues en mettant l'accent sur la rigueur.

Lorsqu'on s'attaque à l'étude des fonctions, il devient vite impossible de faire de preuve rigoureuse, faute de connaissances suffisantes des propriétés des réels. Pour illustrer ce fait, nous voyagerons du plus avancé (les théorèmes classiques concernant les fonctions dérivables) au plus fondamental (définitions, axiomes, résultats basiques). Ceci nous amènera à utiliser, dans un premier temps, de nombreuses « boîtes noires », c'est-à-dire des résultats admis, dont certains paraissent évidents mais ne le sont pas. Dans un deuxième temps, nous introduisons un outil magique : l'axiome de la borne supérieure. Cette propriété essentielle des nombres réels nous permettra d'éclairer l'intérieur des boîtes noires et de justifier complètement les théorèmes fondamentaux de l'analyse élémentaire, par exemple le théorème des bornes.

Si notre voyage est réussi, nous aurons cette vue panoramique des bases de l'analyse et du raisonnement :




But du jeu : découvrir les axiomes, les raisonnements « licites », les grands théorèmes, et apprendre à s'en servir

# Notations

1) Le symbole ☞ précède des propriétés à retenir.
2) Le symbole ⚠ attire l'attention sur des erreurs fréquentes.
3) Le symbole ✍ introduit les exercices associés à une définition ou résultat.
4) Le symbole ✎ introduit un énoncé qui sera prouvé dans un chapitre ultérieur.
5) Une affirmation simple dont la preuve est laissée au lecteur est précédée de ➺.
6) La fin d'une preuve est marquée par $\square$.
7) Une contradiction (qui conclut une preuve par l'absurde) est marquée ✂.
8) Les résultats sont désignés par : proposition, lemme, théorème, corollaire. Un théorème est un résultat important. Un lemme est un résultat qui sert surtout dans la preuve d'un autre résultat ; c'est un résultat *auxiliaire*. Un corollaire est une conséquence immédiate (c'est-à-dire qui ne nécessite pratiquement aucune preuve) d'un autre résultat. Une proposition est un résultat assez simple dont on se sert souvent.
9) La *droite réelle achevée* est notée $\overline{\mathbb{R}}$ et est définie comme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
   Le plus souvent, $+\infty$ sera tout simplement noté $\infty$.
10) Il sera très utile d'étendre la notion d'intervalle au cas où $a > b$, en posant :
    a) $[a,b] = [b,a]$.
    b) $[a,b[ = ]b,a]$.
    c) $]a,b] = [b,a[$.
    d) $]a,b[ = ]b,a[$.
11) Un intervalle quelconque est noté $\wr a,b \int$. On a donc $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $\wr = [$ ou $]$, et $\int = [$ ou $]$.
    Si $a \neq b$, l'intervalle est *non dégénéré*.
12) Si $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $y \in \overline{\mathbb{R}}$, le fait que $y$ soit la limite de la suite $(x_n)$ s'écrit $x_n \to y$ ou $\lim_{n\to\infty} x_n = y$.
13) L'ensemble des points d'accumulation de $A \subset \mathbb{R}$ est noté $A'$.
14) La notation := indique une définition. Ainsi, $x := \sin y$ équivaut à « on définit le nombre $x$ comme étant le sinus du nombre $y$ ».
15) Les lettres $I$, $J$ sont réservées aux intervalles, $f$ et $g$ aux fonctions.
16) « Soit » est un verbe très utilisé en mathématiques. Il a deux sens :
    a) Ou bien « on se donne » ou « on considère » : « soit $f$ une fonction » se traduit par « on se donne une fonction $f$ ».
    b) Ou bien « on définit » ou « on pose » : « soit $h := f + g$ » équivaut à « on définit $h$ par la formule $h = f + g$ ».
17) Certaines parties de $\mathbb{R}$ ont des notations consacrées :
    a) $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
    b) $R_+ := [0, \infty[$.

c) $R_+^* := ]0, \infty[$.

18) Le symbole $\rightsquigarrow$ indique une substitution dans une formule ou résultat. Exemple : « avec $x \rightsquigarrow 2$ » signifie l'application d'une formule avec $x$ remplacé par la valeur 2.
19) Les énoncés les plus importants apparaissent sur fond gris.
20) Des abus fréquents de notation : $f \neq 0$ signifie que la fonction $f$ ne s'annule jamais. Le fait que $f$ est identiquement nulle est noté $f \equiv 0$.
21) Une suite est notée $(x_n)$, $(y_n)$, etc. L'abus de notation $(x_n) \subset A$ signifie que tous les termes de la suite appartiennent à l'ensemble $A$.
22) $\mathbb{R}[X]$ désigne les polynômes à coefficients réels, $\mathbb{C}[X]$ les polynômes à coefficients complexes. Le degré du polynôme $P$ est noté $d^0 P$.
23) Si $A \subset \mathbb{R}$, la notation $-A$ désigne l'ensemble défini par

$$-A := \{-x \,;\, x \in A\}.$$

Plus généralement, si $a \in \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}^*$, alors

$$a + tB := \{a + tx \,;\, x \in A\}.$$

24) Les flèches $\nearrow$ et $\searrow$ indiquent la monotonie. Par exemple, $f \nearrow$ équivaut à $f$ croissante, et $(x_n) \searrow$ désigne une suite décroissante $(x_n)$.
25) Le symbole $\equiv$ indique une identité. Par exemple, $f \equiv 0$ désigne la fonction identiquement nulle, $x_n \equiv 1$ la suite constante 1.
26) Le dérivées successives de la fonction $f$ sont notées $f'$, $f''$, $f'''$, ..., et la notation pour la dérivée d'ordre $n$ est $f^{(n)}$.
27) Une fonction est de classe $C^k$ si $f$ est $k$ fois dérivable, et $f^{(k)}$ est continue. Si $f$ est définie sur $I$, nous notons $f \in C^k(I)$. Si $k = 0$, ceci correspond aux fonctions continues, et nous notons ceci $f \in C(I)$.

# En bref

1. $\mathbb{R}$ est caractérisé par ses propriétés algébrique, d'ordre et l'axiome de la borne supérieure.
2. Concernant les *suites*, les résultats fondamentaux sont :
   a) Le théorème des gendarmes 5.7.
   b) L'existence de la limite d'une suite monotone (Théorème 5.10).
   c) Le théorème de Bolzano-Weierstrass 5.14.
   d) Les suites de Cauchy convergent (Théorème 5.18).
   e) Le théorème sur les suites adjacentes 5.12.
3. Les principaux résultats liés aux *fonctions continues* sont :
   a) Le théorème des bornes atteintes 4.1.
   b) Le théorème des valeurs intermédiaires 4.2.
   c) La continuité de la réciproque d'une fonction continue (Théorème 4.7).
   d) Le théorème de Heine 4.13.
4. En ce qui concerne les *fonctions dérivables*, il faut retenir d'abord :
   a) Le théorème de Fermat 1.14.
   b) Le théorème de Rolle 1.15.
   c) Le théorème de Lagrange 1.17.
   d) Les théorèmes sur la dérivabilité de la fonction réciproque 1.23, 1.24.
   e) La règle de l'Hôpital (Théorèmes 1.26, 1.28).
5. Parmi les résultats remarquables présentés dans le Chapitre 9, le plus significatif est le théorème de Leibniz-Newton 9.11.

# Table des matières

# Chapitre 1

# Fonctions dérivables

## Guide

Le but de ce chapitre est de voir comment « lire » les propriétés d'une fonction à partir de l'étude de sa dérivée. Nous considérons une fonction $f : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \overline{\mathbb{R}}$. Lors d'une première lecture, il convient de prendre $A \subset \mathbb{R}$ un intervalle.

## Boîtes noires

Nous supposons familières la notion de limite d'une suite, ainsi que les opérations avec de telles limites. Ces notions seront revues plus tard.

Nous utiliserons aussi quelques résultats qui « se voient sur le dessin », dont la preuve est repoussée à plus tard.

Dans les exercices, nous admettrons les propriétés de base des fonctions sin, exp et tan.

## Limites

Nous allons donner un sens à la notation $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l$. Pour ce faire, il nous faut :

1) Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.
2) Un point d'accumulation $y$ de $A$ (définition plus bas).
3) Un nombre $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

**1.1 Définition.** Soient $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $y \in \overline{\mathbb{R}}$. $y$ est un *point d'accumulation* de $A$ s'il existe une suite $(x_n) \subset A \setminus \{y\}$ telle que $x_n \to y$.

L'ensemble des points d'accumulation de $A$ est noté $A'$.

Dans les applications, $A$ est le plus souvent un intervalle non dégénéré, $A = \wr a, b \int$, et dans ce cas les points d'accumulation de $A$ sont exactement les points de $[a, b]$. Lors d'une première lecture, on pourra passer la définition d'un point d'accumulation, et considérer uniquement le cas particulier $A = \wr a, b \int$, $y \in [a, b]$.

Dans une définition, « si » tient lieu de « si et seulement si ».

Exercices 1.31-1.32.

**1.2 Définition.** On se donne $f : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}$, $y \in A'$, et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. On a $\lim\limits_{x\to y} f(x) = l$ si :

$$(x_n) \subset A \setminus \{y\},\ x_n \to y \implies f(x_n) \to l.$$

Le nombre $l$ est *la limite de $f$ en $y$*.

☞ Intuitivement, cette définition équivaut à : « lorsque $x$ approche $y$ (sans jamais être $y$), $f(x)$ approche $l$ ».

Les limites des fonctions étant définies à partir de limites de suites, nous obtenons le résultat suivant, qui est immédiat.

**1.3 Proposition.** Les limites des fonctions ont les mêmes propriétés que les limites de suites. Exemple :
*Hypothèses.* $f, g : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $\exists \lim\limits_{x\to y} f(x) = l$ et $\exists \lim\limits_{x\to y} g(x) = L$. $l + L$ a un sens.
*Conclusion.* $\exists \lim\limits_{x\to y} (f+g)(x) = l + L$, et cette limite vaut $l + L$.

✍ Exercice 1.33.

**1.4 Définition.** Une fonction est *continue en un point $y \in A$* si :

$$(x_n) \subset A,\ x_n \to y \implies f(x_n) \to f(y).$$

Une fonction est *continue* si elle est continue en tout point $y \in A$. Ou encore :

$$y \in A,\ (x_n) \subset A,\ x_n \to y \implies f(x_n) \to f(y).$$

☞ Si $A$ est un intervalle non dégénéré, alors

$$f \text{ continue } \iff \lim_{x\to y} f(x) = f(y), \forall\, y \in A. \tag{1.1}$$

✍ Exercices 1.34-1.37.

Nous allons maintenant donner un sens à l'égalité $f'(y) = l$. Pour ce faire, il nous faut :

1) Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$.
2) Un point $y \in A' \cap A \cap \mathbb{R}$.
3) Un nombre $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

**1.5 Définition.** On a $f'(y) = l$ si $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} = l$.

Si $l \in \mathbb{R}$, alors $f$ est *dérivable en $y$*, et $l$ est la *dérivée de $f$ en $y$*.

$f$ est *dérivable* si : $A \subset \mathbb{R}$, tous les points de $A$ sont des points d'accumulation de $A$ et si, de plus, $f$ est dérivable en tout point $y \in A$.

Si $f$ est dérivable, alors la fonction $A \ni x \mapsto f'(x)$ est la *dérivée* de $f$.

☞

1. Si, dans un énoncé, on considère une fonction dérivable en $y$, on suppose implicitement que $y \in A' \cap A \cap \mathbb{R}$.
2. Le quotient $\dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ est le *taux d'accroissement* de $f$.
3. Si $A \subset \mathbb{R}$ est un intervalle non dégénéré, alors $f$ est dérivable si et seulement si $f$ est dérivable en tout point de $A$.

4. On peut définir la *dérivée à gauche* $f'_g(y)$ (*ou à droite* $f'_d(y)$) en considérant uniquement des $x$ à gauche (ou à droite) de $y$. Exemple : on a $f'_g(y) = l$ si : $y \in A \cap \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $A \cap ]-\infty, y]$ et on a

$$\lim_{\substack{x \to y \\ x < y}} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = l.$$

La notation $\lim\limits_{\substack{x \to y \\ x < y}}$ signifie que la limite se fait uniquement sur les $x \in A \cap ]-\infty, y[$.

✍ Exercices 1.38-1.40.

Le résultat suivant est fort utile.

**1.6** ✎ **Lemme.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A' \cap A \cap \mathbb{R}$. $l \in \mathbb{R}$.

*Conclusion.*

$$f'(y) = l \iff f(x) = f(y) + (x - y)\widetilde{f}(x), \text{ où } \widetilde{f}(y) = l \text{ et } \widetilde{f} \text{ est continue en } y.$$

Ou encore :

$$f'(y) = l \iff f(x) = f(y) + (x - y)\widetilde{f}(x), \text{ où } (x_n) \subset A,\ x_n \to y \implies \widetilde{f}(x_n) \to l.$$

La fonction $\widetilde{f}$ est donnée par la formule

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}, & \text{si } x \neq y \\ l, & \text{si } x = y \end{cases}.$$

**1.7 Proposition.** Une fonction dérivable en un point $y$ est continue au point $y$.
Une fonction dérivable est continue.

*Démonstration.* Soit $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to y$. On a (avec $\widetilde{f}$ comme dans le Lemme 1.6)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (f(y) + (x_n - y)\widetilde{f}(x_n)) = f(y) + \underbrace{\lim_{n\to\infty}(x_n - y)}_{0}\underbrace{\lim_{n\to\infty}\widetilde{f}(x_n)}_{l} = f(y).$$

☞ La deuxième partie de la proposition suit de la première. □

⚠ La réciproque de cette proposition est fausse : une fonction peut être continue sans être dérivable. ✍ Exercice 1.41.

## Opérations avec les fonctions dérivables

**1.8 Proposition.**
*Hypothèse.* $f, g : A \to \mathbb{R}$.
*Conclusions.* Si $f$ et $g$ sont dérivables en $y$, alors $f + g$ est dérivable en $y$ et $(f+g)'(y) = f'(y) + g'(y)$.
☞ Si $f$ et $g$ sont dérivables, alors $f + g$ est dérivable et $(f+g)' = f' + g'$.

*Démonstration.* Soit $h := f + g$. On définit $\widetilde{f}$ à partir de $f$, comme dans le Lemme 1.6 ; on définit de même $\widetilde{g}$ à partir de $g$. Soit $\widetilde{h} := \widetilde{f} + \widetilde{g}$. Alors ☞ $\widetilde{h}(y) = f'(y) + g'(y)$ et ☞ $\widetilde{h}$ est continue en $y$. Par ailleurs, on a

$$☞\ h(x) = h(y) + (x - y)\widetilde{h}(x),\ \forall x \in A.$$

On conclut grâce au Lemme 1.6. □

**1.9 Proposition.**
*Hypothèse.* $f, g : A \to \mathbb{R}$.
*Conclusions.* Si $f$ et $g$ sont dérivables en $y$, alors $fg$ est dérivable en $y$ et $(fg)'(y) = f'(y)g(y) + f(y)g'(y)$.
☞ Si $f$ et $g$ sont dérivables, alors $fg$ est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.

*Démonstration.* C'est une variante de la preuve précédente. On pose $h := fg$ et

$$\widetilde{h}(x) := \widetilde{f}(x)g(x) + f(x)\widetilde{g}(x) + (x - y)\widetilde{f}(x)\widetilde{g}(x).$$

Alors on a :

$$☞\ h(x) = h(y) + (x - y)\widetilde{h}(x),\ \forall x \in A,\quad ☞\ \widetilde{h}(y) = f'(y)g(y) + f(y)g'(y) \text{ et } ☞\ \widetilde{h} \text{ est continue en } y.$$

On conclut à nouveau grâce au Lemme 1.6. □

**1.10 Proposition.**
*Hypothèse.* $f : A \to B \subset \mathbb{R}$. $\Phi : B \to \mathbb{R}$.
*Conclusions.* Si $f$ est dérivables en $y$ et $\Phi$ est dérivable en $f(y)$, alors $\Phi \circ f$ est dérivable en $y$ et on a $(\Phi \circ f)'(y) = \Phi'(f(y))f'(y)$.
☞ Si $f$ et $\Phi$ sont dérivables, alors $\Phi \circ f$ est dérivable et on a $(\Phi \circ f)' = \Phi' \circ f\, f'$.

*Démonstration.* On associe à $\Phi$ (au point $f(y)$) la fonction $\widetilde{\Phi}$. Soient $h := \Phi \circ f$ et

$$\widetilde{h}(x) := \widetilde{f}(x)\widetilde{\Phi}(f(x)).$$

Alors on a

$$☞\ h(x) = h(y) + (x - y)\widetilde{h}(x),\ \forall x \in A,\quad ☞\ \widetilde{h}(y) = \Phi'(f(y))f'(y) \text{ et } \widetilde{h} \text{ est continue en } y.$$

Vérifions la dernière propriété. Soit $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to y$. Alors on a $f(x_n) \to f(y)$ (Proposition 1.7) et donc

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{h}(x_n) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{f}(x_n) \lim_{n\to\infty} \widetilde{\Phi}(f(x_n)) = \widetilde{f}(y)\widetilde{\Phi}(f(y)) = \widetilde{h}(y).$$ □

✍ Dans la preuve ci-dessus, préciser la formule de $\widetilde{\Phi}$.

✍ Exercices 1.42-1.44.

**1.11 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $g : A \to \mathbb{R}^*$.

*Conclusions.* Si $f$ et $g$ sont dérivables en $y$, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable en $y$ et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(y) = \frac{f'(y)}{g(y)} - \frac{f(y)g'(y)}{g^2(y)} = \frac{f'(y)g(y) - f(y)g'(y)}{g^2(y)}.$$

Si $f$ et $g$ sont dérivables, alors $\dfrac{f}{g}$ est dérivable et

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'}{g} - \frac{fg'}{g^2} = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

*Démonstration.* On applique la proposition précédente avec $f \rightsquigarrow g$ et $\Phi \rightsquigarrow x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On obtient que $\dfrac{1}{g}$ est dérivable en $y$ et $\left(\dfrac{1}{g}\right)'(y) = -\dfrac{g'(y)}{g^2(y)}$. Par conséquent, $f \cdot \dfrac{1}{g}$ est dérivable en $y$ et on a :

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(y) = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)'(y) = f'(y) \cdot \frac{1}{g(y)} + f(y) \cdot \frac{-g'(y)}{g^2(y)} = \frac{f'(y)}{g(y)} - \frac{f(y)g'(y)}{g^2(y)}.$$ □

## Les grands théorèmes

Ces théorèmes ont un lien avec l'existence des points d'extremum.

**1.12 Définition.** Soit $A \subset \mathbb{R}$. Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in A$. Le point $x_0$ est un point de :

1. *maximum* si $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in A$.
2. *minimum* si $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in A$.
3. *maximum local* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in A \cap ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
4. *maximum local* s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in A \cap ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$.
5. *extremum* si $x_0$ est un point de maximum ou minimum.
6. *extremum local* si $x_0$ est un point de maximum local ou minimum local.

Dans les théorèmes qui suivent, un rôle important est joué par les fonctions de Rolle.

**1.13 Définition.** Une fonction *de Rolle* (sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$) est une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que :

1. $f$ est continue sur $[a,b]$.
2. $f$ est dérivable sur $]a,b[$.

Une fonction dérivable sur $[a,b]$ est une fonction de Rolle sur $[a,b]$.

**1.14 Théorème** (Fermat)**.**
*Hypothèses.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. $x_0 \in ]a,b[$ point d'extremum local de $f$. $f$ dérivable en $x_0$.

*Conclusion.* $f'(x_0) = 0$.

*Démonstration.* Supposons par exemple $x_0$ point de minimum local. Soit $\varepsilon > 0$ comme dans la définition du minimum local. Quitte à diminuer $\varepsilon$, on peut supposer $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[\subset [a,b]$. Soit $x_n := x_0 + \dfrac{\varepsilon}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $x_n \in [a,b]$, $x_n \to x$ et $\dfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \geq 0$.

On trouve

$$f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \geq 0.$$

De même, en considérant $x_n :== x_0 - \dfrac{\varepsilon}{n+1}$, on obtient $f'(x_0) \leq 0$. D'où $f'(x_0) = 0$. □

Examiner le cas d'un maximum local.

**1.15 Théorème** (Rolle)**.**
*Hypothèses.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle. $f(a) = f(b)$.

*Conclusion.* $\exists c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

La preuve utilise le

**1.16 Théorème** (des bornes)**.**
*Hypothèses.* $[a,b] \subset \mathbb{R}$. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. $f$ continue.

*Conclusions.* $f$ a un point de maximum et un point de minimum dans $[a,b]$.

*Preuve du Théorème 1.15.* Soient $x_0$ (respectivement $x_1$) un point de maximum (respectivement de minimum) de $f$. Plusieurs possibilités se présentent :

1. Si $x_0 \in ]a,b[$, alors $f'(x_0) = 0$, d'après le théorème de Fermat, et nous pouvons prendre $c = x_0$.
2. De même si $x_1 \in ]a,b[$.
3. Il reste à examiner le cas où $x_0 = a$ ou $b$ et $x_1 = a$ ou $b$. Dans ce cas, nous avons

$$f(a) = f(b) = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_0) = f(a) = f(b),\ \forall\, x \in [a,b],$$

et donc $f$ est constante. D'où tout $c \in ]a,b[$ convient. □

**1.17 Théorème** (de Lagrange, ou des accroissements finis)**.**
*Hypothèse.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle.

*Conclusion.* $\exists\, c \in ]a,b[$ tel que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

*Démonstration.* C'est le Théorème 1.19 avec $g \rightsquigarrow \mathrm{id}$. □

**1.18 Corollaire.**
*Hypothèses.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle.

*Conclusion.*

$$f \text{ est constante} \iff f' \equiv 0.$$

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » est claire.

Réciproquement, soient $x, y \in [a,b]$ tels que $x < y$. Alors $f$ est fonction de Rolle sur $[x,y]$. Du théorème de Lagrange, nous obtenons $f(x) = f(y)$. D'où $f$ constante. □

**1.19 Théorème** (de Lagrange généralisé)**.**
*Hypothèses.* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonctions de Rolle. $g' \neq 0$ dans $]a,b[$.

*Conclusions.* $g(b) \neq g(a)$ et $\exists\, c \in ]a,b[$ tel que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

*Démonstration.* Commençons par montrer que $g(b) \neq g(a)$. Preuve par l'absurde : sinon, de par le théorème de Rolle, il existe $c \in ]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.

Soit $h : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)).$$

Alors $h$ est une fonction de Rolle et $h(a) = h(b) = 0$. Il existe donc un $c \in ]a,b[$ tel que $h'(c) = 0$.
Le point $c$ convient. □

**1.20 Théorème.**
*Hypothèse.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle.

*Conclusion.*

$$f \text{ est croissante} \iff f' \geq 0 \text{ dans } ]a,b[.$$

Caractériser les fonctions de Rolle décroissantes.

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » Soit $y \in ]a,b[$. Soit $(x_n) \subset [a,b]$ telle que $x_n \to y$. Alors $\dfrac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} \geq 0$. Il s'ensuit que

$$f'(y) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(y)}{x_n - y} \geq 0.$$

« $\Longleftarrow$ » Soient $x, y \in [a,b]$ tels que $x < y$. Comme dans la preuve du Corollaire 1.18, $f$ est fonction de Rolle sur $[x,y]$. Nous en déduisons qu'il existe $c \in ]x,y[$ tel que

$$f(y) - f(x) = (y-x)f'(c) \geq 0, \text{ d'où } f(y) \geq f(x).$$ □

**1.21 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle. $f' \neq 0$ dans $]a,b[$.
*Conclusion.* $f$ est strictement monotone.

*Démonstration.* Soient $x, y \in [a,b]$ tels que $x < y$. Comme dans la preuve du Corollaire 1.18, $f$ est fonction de Rolle sur $[x,y]$. Du théorème de Rolle, on obtient $f(x) \neq f(y)$. Il s'ensuit que $f$ est injective. On conclut en utilisant la Proposition 1.7 et le Théorème 1.22. □

Exercice 1.45.

**1.22 Théorème.**
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ continue.

*Conclusion.*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est strictement monotone.}$$

## Dérivabilité de la fonction réciproque

Soit $f : I \to B$. Nous supposons $f$ dérivable et bijective, la seconde condition assurant l'existence de la fonction réciproque $f^{-1}$. La question qui sera examinée dans la suite est si $f^{-1}$ est dérivable.

En général la réponse est non : prendre $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$. Alors $f$ est dérivable, et nous verrons plus tard que $f$ est bijective. Soit $g := f^{-1}$. (Donc $g(x) = \sqrt[3]{x}$.) Supposons par l'absurde que $g$ est dérivable. Alors

$$f \circ g = \text{id} \implies f' \circ g\, g' = \text{id}' = 1 \implies f'(g(0))g'(0) = 1 \implies 0 = 1.$$

En examinant ce calcul pour une fonction $f$ quelconque, nous voyons que $f^{-1}$ ne peut être dérivable au point $y$ si $f'$ s'annule au point $g(y)$. Par ailleurs, ce calcul suggère le résultat suivant.

**1.23 Théorème.**
*Hypothèses.* $f : I \to B$. $f$ dérivable et $f' \neq 0$. $f$ surjective.

*Conclusions.* $f$ est bijective. $B$ est un intervalle. $g := f^{-1}$ est dérivable et $g' = \dfrac{1}{f' \circ g}$.

*Démonstration.* De la Proposition 1.21, $f$ est strictement monotone, donc injective. Le Théorème 1.25 implique que $B$ est un intervalle et $g$ est continue.

Soit $y \in B$. Soit $(y_n) \subset B \setminus \{y\}$ telle que $y_n \to y$. Soit $x_n := g(y_n)$, de sorte que $f(x_n) = y_n$ et $f(x) = y$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(y_n) - g(y)}{y_n - y} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x}{f(x_n) - f(x)} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}.$$

On trouve que $g'(y) = \dfrac{1}{f'(g(y))}$. □

Exercices 1.46-1.49.

Dans les applications, il est souvent commode d'utiliser la version suivante du Théorème 1.23.

**1.24 Théorème.**
*Hypothèses.* $f : I \to J$ dérivable et bijective.

*Conclusions.* $g := f^{-1} : J \to I$ est continue. $g$ dérivable en $x \in J \iff f'(g(x)) \neq 0$, et dans ce cas $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.

*Démonstration.* Des Théorèmes 1.22 et 1.25, $g$ est continue.

Supposons $f'(g(x)) \neq 0$. En reprenant la preuve du Théorème 1.23, nous obtenons que $g$ est dérivable en $x$ et $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$.

Réciproquement, supposons $g$ dérivable en $x$. Comme $f \circ g = \mathrm{id}_J$ et $f$ est dérivable en $g(x)$, nous trouvons

$$1 = (\mathrm{id}_J)'(x) = f'(g(x))g'(x),$$

d'où $f'(g(x)) \neq 0$ et $g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$. □

**1.25 Théorème.**
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ continue et strictement monotone.

*Conclusions.* $J := f(I)$ est un intervalle. $f^{-1} : J \to I$ est continue.

## Règle de l'Hôpital

Lorsque $f : A \to \mathbb{R}$, respectivement $g : A \to \mathbb{R}^*$, ont la limite $l_1$, respectivement $l_2$, en $y \in A'$, nous avons $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l_1}{l_2}$, à condition que l'opération $\dfrac{l_1}{l_2}$ ait un sens. Ceci nous laisse avec quelques cas exceptionnels :

1. $\dfrac{\pm\infty}{0}$.
2. $\dfrac{0}{0}$.
3. $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

Nous verrons plus tard comment traiter le premier cas. La règle de l'Hôpital concerne les deux derniers cas.

**1.26 Théorème** (règle de l'Hôpital 0/0).
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$. $g : I \to \mathbb{R}^*$. $f$ et $g$ dérivables. $g' \neq 0$. $y \in I'$. $\exists \lim\limits_{x\to y} f(x) = 0$. $\exists \lim\limits_{x\to y} g(x) = 0$. $\exists l := \lim\limits_{x\to y} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

*Conclusions.* $\exists \lim\limits_{x\to y} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ et cette limite vaut $l$.

*Démonstration.* Nous allons montrer ce théorème sous l'hypothèse supplémentaire que $y \in \mathbb{R}$.
*Cas* #1. Commençons par le cas plus simple où $y \in I$.
Soit $(x_n) \subset I \setminus \{y\}$ telle que $x_n \to y$. Du théorème de Rolle, il existe $z_n \in ]x_n, y[$ tel que

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(y)}{g(x_n) - g(y)} = \frac{f'(z_n)}{g'(z_n)}.$$

Le Théorème 1.29 (avec $x_n \rightsquigarrow z_n$, $y_n \rightsquigarrow x_n$, $z_n \rightsquigarrow y$) implique $z_n \to y$. On trouve que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(x_n)}{g(x_n)} = l$, d'où la conclusion.

*Cas* #2. Etudions maintenant le cas où $y \notin I$.
Soit

$$f^* : I \cup \{y\} \to \mathbb{R},\ f^*(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases};$$

on définit de même $g^*$. La Proposition 1.30 (avec $A \rightsquigarrow I$ et $l \rightsquigarrow 0$) implique que $f^*$ est une fonction de Rolle telle que $(f^*)' = f'$ dans $I$. Il suffit alors de reprendre les calculs du premier cas, avec $f \rightsquigarrow f^*$. □

**1.27 Remarque.** Le plus souvent la règle de l'Hôpital 0/0 est utilisée sous la forme suivante :

*Hypothèses.* $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables. $y \in I$. $f(0) = g(0) = 0$. $g'(x) \neq 0$, $\forall x \in I \setminus \{y\}$. $\exists l := \lim_{x \to y} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

*Conclusions.* $\exists \lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)}$ et cette limite vaut $l$.

**1.28 Théorème** (règle de l'Hôpital $\infty/\infty$)**.**
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$. $g : I \to \mathbb{R}^*$. $f$ et $g$ dérivables. $g' \neq 0$. $y \in I'$. $\exists \lim_{x \to y} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$. $\exists \lim_{x \to y} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$. $\exists l := \lim_{x \to y} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.
*Conclusions.* $\exists \lim_{x \to y} \frac{f(x)}{g(x)}$ et cette limite vaut $l$.

Exercices1.50-1.52.

**1.29 Théorème** (des gendarmes)**.**
*Hypothèses.* $(x_n), (y_n), (z_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$. $x_n \in [y_n, z_n]$. Les suites $(y_n)$ et $(z_n)$ ont la même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Conclusions.* $\exists \lim_{n \to \infty} x_n$ et cette limite vaut $l$.

**1.30 Proposition** (prolongement par continuité)**.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $y \notin A$. $\lim_{x \to y} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On définit $B := A \cup \{y\}$ et

$$\widetilde{f} : B \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A \\ l, & \text{si } x = y \end{cases}.$$

*Conclusions.*
1. $\widetilde{f}$ est continue en $y$.
2. Si, de plus, $f$ est continue, alors $\widetilde{f}$ est continue.
3. Si, de plus, $f$ est dérivable sur $A$, alors $\widetilde{f}$ est dérivable sur $A$ et on a $\widetilde{f}' = f'$ dans $A$.

# Exercices

**1.31 Exercice.** Soit $A = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Trouver $A'$.

**1.32 Exercice** (difficile)**.** Soit $A = \rbrack a, b \lbrack$. Montrer que $A' = [a, b]$.

**1.33 Exercice.** Enoncer l'analogue de la Proposition 1.3 quand on remplace la somme par le produit ou le quotient.

**1.34 Exercice.** Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, est continue.

**1.35 Exercice.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = E(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ (la fonction partie entière). Alors $f$ est discontinue.

**1.36 Exercice.**
*Hypothèses.* $f, g : A \to \mathbb{R}$. $y \in A$.

*Conclusions.* Si $f$ et $g$ sont continues en $y$, alors $f + g$ et $fg$ le sont aussi.
Si $f$ et $g$ sont continues, alors $f + g$ et $fg$ le sont aussi.
Si, de plus, on suppose $g \neq 0$, alors on a les mêmes conclusions pour $\dfrac{f}{g}$.

**1.37 Exercice.** Montrer (1.1).

**1.38 Exercice.** Calculer les dérivées des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $n = 0, 1, 2, 3$.

**1.39 Exercice.** Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$. On admet que $f$ est continue. Montrer que $f$ est dérivable et que $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$.

**1.40 Exercice.** Donner la définition de la dérivée à droite, $f'_d$.

**1.41 Exercice** (important)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$. On admettra le fait que $f$ est continue.

1. Calculer $f'_g(0)$ et $f'_d(0)$.
2. Montrer que $f$ n'est pas dérivable en 0.
3. En déduire qu'une fonction continue peut ne pas être dérivable.

**1.42 Exercice.** On suppose $f : A \to \mathbb{R}$ dérivable. Calculer :

1. $(f^n)'$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
2. (si $f \neq 0$) $\left(\dfrac{1}{f^n}\right)'$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
3. $\left(e^f\right)'$.

**1.43 Exercice.** Soient $n \in \mathbb{N}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Calculer $f'$.
Même question pour $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$.

**1.44 Exercice.** Soient $f, g : A \to \mathbb{R}$. On suppose $f$ et $g$ $n$ fois dérivables. Montrer la formule de Leibniz

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)} \quad \text{(avec } C_n^k \text{ les coefficients binomiaux).}$$

**1.45 Exercice.** Enoncer et prouver l'analogue de la Proposition 1.21 lorsque $[a, b]$ est remplacé par $I$.

**1.46 Exercice.** Montrer que $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall x > 0$.

**1.47 Exercice.** On définit la fonction arctan comme la réciproque de la fonction tan : $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[ \to \mathbb{R}$. Montrer que $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

**1.48 Exercice.** On définit la fonction arcsin comme la réciproque de la fonction sin : $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$. Montrer que arcsin n'est pas dérivable en $x = \pm 1$ et que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall x \in ]-1,1[$.

**1.49 Exercice.** Etablir l'analogue de l'exercice précédent pour la réciproque de la fonction cos.

**1.50** ✎ **Exercice.** Prouver le Théorème 1.26 lorsque $y \in \{-\infty, \infty\}$.

**1.51 Exercice.** Calculer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

**1.52 Exercice.** Justifier les croissances comparées suivantes :

1. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.
2. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

# Chapitre 2

# Equations différentielles

## Guide

Une équation différentielle est une équation faisant apparaître une fonction inconnue et ses dérivées. Exemple :

$$y' = y^2 + 1 \quad \text{dans } I = ]a, b[\,.$$

Une *solution* de cette équation est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$, dérivable et telle que $y'(x) = y^2(x) + 1$, $\forall\, x \in I$.

Le but de ce chapitre est de présenter les méthodes de résolution de quelques équations très simples.

## Boîtes noires

Nous admettons l'existence et les propriétés usuelles de la fonction exponentielle. Nous admettons aussi le théorème fondamental du calcul : le théorème de Leibniz-Newton.

## Théorème de Leibniz-Newton

Il sera utile de travailler avec des fonctions (à valeurs) complexes : $f = \mathrm{Re}\, f + \imath \mathrm{Im}$ f.

**2.1 Définition.** Une fonction $f : A \to \mathbb{C}$ est :

1. *Continue* si $\mathrm{Re}\, f$ et Im f sont continues.
2. *Dérivable* si $\mathrm{Re}\, f$ et Im f sont dérivables. On définit alors $f' := (\mathrm{Re}\, f)' + \imath(\mathrm{Im}\ \mathrm{f})'$.

Définitions similaires pour la continuité ou dérivabilité en $a$.

Exercice 2.7.

**2.2 Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Une *primitive* de $f$ est une fonction dérivable $F : I \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$. On note $\int f(x)\, dx$ l'ensemble des primitives de $f$.

Exercice 2.8.

**2.3 Théorème** (de Leibniz-Newton).
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$ continue.

*Conclusion.* $f$ a une primitive.

# Equations linéaires du premier ordre

$$\text{I.}\quad y' = ay, \quad a \in \mathbb{C} \text{ constante.} \tag{2.1}$$

**2.4 Proposition.** L'ensemble des solutions de (2.1) est $\{x \mapsto Ce^{ax}; x \in I, C \in \mathbb{C}\}$.

*Démonstration.* Une fonction de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ vérifie (2.1).

Inversement, soit $y$ une solution de (2.1) et soit $z(x) := y(x)e^{-ax}$. Alors $z' = 0$ et donc $z(x) = C$ pour une constante $C \in \mathbb{C}$. On trouve $y(x) = Ce^{ax}$, $\forall x \in I$. □

$$\text{II.}\quad y' = a(x)y, \quad a : I \to \mathbb{C}. \tag{2.2}$$

Supposons $a$ continue. Soit $A$ une primitive de $a$. En reprenant la preuve du cas précédent, on trouve que l'ensemble des solutions est $\{x \mapsto Ce^{A(x)}; x \in I, C \in \mathbb{C}\}$.

$$\text{III.}\quad y' = a(x)y + f(x), \quad a : I \to \mathbb{C}. \tag{2.3}$$

Pour cette équation, nous pouvons donner toutes les solutions. Néanmoins, la méthode utilisée est plus importante que le résultat final, difficile à retenir.

Supposons $a$ continue. Soit $A$ une primitive de $a$. Soit $y : I \to \mathbb{C}$, et soit $C(x) := y(x)e^{-A(x)}$, $\forall x \in I$. Ou encore, on écrit $y(x) = C(x)e^{A(x)}$. L'idée de mettre $y$ sous cette forme est la *méthode de la variation de la constante*.

Alors $C$ est dérivable si et seulement si $y$ est dérivable et on a

$$y'(x) - a(x)y(x) = C'(x)e^{A(x)}.$$

Ainsi, pour $y$ dérivable on trouve

$$y \text{ vérifie (2.3)} \iff C'(x) = f(x)e^{-A(x)}, \ \forall x \in I. \tag{2.4}$$

Si nous supposons, de plus, $f$ continue, alors le théorème de Leibniz-Newton (appliqué avec $f(x) \rightsquigarrow f(x)e^{-A(x)}$) donne l'existence d'une solution de $C' = fe^{-A}$, et on trouve que l'ensemble des solutions de (2.3) est $e^{A(x)} \displaystyle\int f(x)e^{-A(x)}\,dx$.

La notation $\displaystyle\int f(x)e^{-A(x)}\,dx$ désigne un ensemble de fonctions (les primitives de $x \mapsto f(x)e^{-A(x)}$). La notation $e^{A(x)} \displaystyle\int f(x)e^{-A(x)}\,dx$ désigne l'ensemble

$$\left\{x \mapsto e^{A(x)}F(x); F \text{ primitive de } x \mapsto f(x)e^{-A(x)}\right\}.$$

## Equations linéaires du second ordre à coefficients constants

$$\text{IV.} \quad y'' + ay' + by = 0, \quad a, b \in \mathbb{C} \text{ constantes.} \tag{2.5}$$

On associe à l'équation (2.5) l'*équation caractéristique*

$$r^2 + ar + b = 0, \tag{2.6}$$

et on désigne par $r_1$, $r_2$ ses racines.

**2.5 Proposition.**

1. Si $r_1 \neq r_2$, alors les solutions de (2.5) sont données par $x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ constantes.
2. Si $r_1 = r_2$, alors les solutions de (2.5) sont données par $x \mapsto C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{C}$ constantes.

*Démonstration.* Supposons, par exemple, que $r_1 \neq r_2$. Soit $y : I \to \mathbb{C}$, et soit $z(x) := y(x)e^{-r_1 x}$. Alors $y$ est deux fois dérivable si et seulement si $z$ est deux fois dérivable. Si $y$ est deux fois dérivable, alors on a

$$\begin{aligned} y''(x) + ay'(x) + by(x) &= \left[(r_1^2 + ar_1 + b)z(x) + (2r_1 + a)z'(x) + z''(x)\right] e^{r_1 x} \\ &= \left[z''(x) - (r_2 - r_1)z'(x)\right] e^{r_1 x}. \end{aligned}$$

Soit $m := r_1 - r_2 \neq 0$. Si on pose $w(x) := z'(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} y'' + ay' + by = 0 &\iff w' - mw = 0 \iff w(x) = Ke^{mx}, \text{avec } K \in \mathbb{C} \text{ constante} \\ &\iff z(x) = C_2 e^{mx} + C_1 \text{ avec } C_2 := \frac{K}{m} \text{ et } C_1 \in \mathbb{C} \text{ constante} \\ &\iff y(x) = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}. \end{aligned}$$

☐

Nous avons là l'illustration de la *méthode du quotient*, dont on peut montrer la validité dans le cas général. Le principe de cette méthode est le suivant. Considérons l'équation

$$y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = b(x), \quad \forall x \in I. \tag{2.7}$$

Supposons connue une solution $y_0$ de l équation

$$y^{(m)} + a_{m-1}(x)y^{(m-1)}(x) + \cdots + a_0(x)y(x) = 0 \tag{2.8}$$

telle que $y_0 \neq 0$. Si nous faisons la substitution $z(x) := y(x)/y_0(x)$, alors $z$ vérifie une équation qui ne fait intervenir que $z', \ldots, z^{(m)}$. La substitution $w := z'$ permet de réduire l'étude de l'équation (2.7), qui est d'ordre $m$, à une équation en $w$ d'ordre $m - 1$.

✍ Prouver le point *2* de la Proposition 2.5.

✍ Exercices 2.9-2.10.

## Glossaire

1. $y' = ay$ : équation linéaire, homogène, du premier ordre, à coefficient constant.
2. $y' = a(x)y$ : équation linéaire, homogène, du premier ordre, à coefficient variable.
3. $y' = ay + b(x)$ : équation linéaire, non homogène, du premier ordre, à coefficient constant.
4. $y' = a(x)y + b(x)$ : équation linéaire, non homogène, du premier ordre, à coefficient variable.
5. $y'' + ay' + by = 0$ : équation linéaire, homogène, du second ordre, à coefficients constants.
6. $y'' + ay' + by = f(x)$ : équation linéaire, non homogène, du second ordre, à coefficients constants.

## Solutions particulières

Pour toute équation non homogène de la forme $E_0(y) = f(x)$ comme ci-dessus, la connaissance d'une solution explicite (dite *solution particulière*) $y_{part}$ permet la résolution rapide de l'équation non homogène, selon le principe suivant : soit $y_h := y - y_{part}$. Alors

$$y \text{ vérifie } E_0(y) = f(x) \iff y_h \text{ vérifie } E_0(y_h) = 0.$$

Comme les solutions $y_h$ de $E_0(y_h) = 0$ sont connues, on trouve la solution de $E_0(y) = f(x)$ sous la forme $y = y_h + y_{part}$.

Dans cette section, nous allons expliquer comment trouver une solution $y_{part}$ dans quelques situations simples.

**2.6 Proposition.** L'équation

$$y' = ay + P(x)e^{qx}, \quad \text{avec } P \in \mathbb{C}[X] \text{ et } a, q \in \mathbb{C} \text{ constantes,} \tag{2.9}$$

a une solution particulière de la forme $y_{part} = Q(x)e^{qx}$, avec $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $d^0Q = \begin{cases} d^0P, & \text{si } q \neq a \\ d^0P + 1, & \text{si } q = a \end{cases}$.

*Démonstration.* Soit $z(x) := y(x)e^{-qx}$, de sorte que $y$ est dérivable $\iff z$ l'est. On a

$$y' - ay = P(x)e^{qx} \iff z' + (q-a)z = P.$$

*Cas* #1. Si $q = a$, alors $z$ est une primitive de $P$, donc $z$ est un polynôme et $d^0z = d^0P + 1$ ; nous obtenons la conclusion voulue.

*Cas* #2. Si $q \neq a$, posons $m := q - a \neq 0$. Montrons par récurrence sur $n := d^0P$ que l'équation $z' - mz = P$ a une solution $z \in \mathbb{C}[X]$ telle que $d^0z = d^0P$.

Si $n = -\infty$, il suffit de prendre $z = 0$. Si $n = 0$, alors $P = C \neq 0$ (avec $C$ constante), et on peut prendre $z = C/m$, qui convient. Soit maintenant $n \geq 1$ et $P = a_nX^n + R$, avec $a_n \neq 0$ et $d^0R \leq n-1$. Cherchons $z$ sous la forme $z = \frac{a_n}{m}X^n + S$. Alors $S$ doit satisfaire

$$S' - mS = R - \frac{na_n}{m}X^{n-1}.$$

Par hypothèse de récurrence, nous pouvons trouver un tel $S$ tel que $d^0S \leq n-1$. La fonction $z = \frac{a_n}{m}X^n + S$ convient. □

Concrètement, on cherche $y_{part}$ sous la forme $y_{part} = Q(x)e^{qx}$ ; les coefficients de $Q$ sont inconnus au départ et sont déterminés à partir de l'équation de $y$.

Exercices 2.11-2.13.

## Conditions initiales

Une équation comme ci-dessus a une infinité de solutions. Si nous voulons distinguer une seule solution parmi toutes, nous devons imposer des conditions supplémentaires. Pour les équations du premier ordre, il suffit d'ajouter, à l'équation, la valeur de $y$ en un point $x_0$ de $I$ pour déterminer complètement la solution. Ainsi, le *problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(x)y + f(x) & \text{dans } I \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a exactement une solution. Il en va de même pour le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) & \text{dans } I \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = z_0 \end{cases}.$$

Une autre façon de déterminer de manière unique la solution d'un problème du second ordre est d'imposer la *condition bilocale*

$$\begin{cases} y'' + ay' + by = f(x) & \text{dans } I \\ y(x_0) = y_0 \\ y(x_1) = z_1 \end{cases}.$$

Ici, $x_0, x_1 \in I$, $x_0 \neq x_1$.

Dans ces problèmes, les conditions imposées ($y(x_0) = y_0$, etc.) sont des *conditions initiales*. Ce terme fait allusion aux exemples usuels d'équations, dans lesquelles $x$ est la variable temps, et $y$ décrit l'état d'un système. Alors $y_0$ est l'état du système à l'instant « initial » $x_0$, et l'unicité de la solution du problème de Cauchy peut s'interpréter ainsi : il suffit de connaître la loi d'évolution et la configuration initiale d'un système pour connaître son état à tout moment.

## Exercices

**2.7 Exercice.** En règle générale, les fonctions continues ou dérivables à valeurs complexes ont les mêmes propriétés que les fonctions continues ou dérivables à valeurs réelles. Vérifier cette règle sur les propriétés suivantes : si $f$, $g : I \to \mathbb{C}$ sont dérivables, alors :

1. $fg$ est dérivable et $(fg)' = f'g + fg'$.
2. Si, de plus, $g \neq 0$, alors $f/g$ est dérivable et $(f/g)' = f'/g - fg'/g^2$.

**2.8 Exercice.** Soit $F : I \to \mathbb{C}$ une primitive de $f$. Alors

$$G : I \to \mathbb{C} \text{ est une primitive de } f \iff G = F + C \text{ pour une constante } C \in \mathbb{C}.$$

De manière équivalente, on a

$$\int f(x)\,dx = \{F + C; C \in \mathbb{C}\}.$$

**2.9 Exercice.** Soit $k > 0$. Montrer que les solutions de $y'' + k^2 y = 0$ sont les fonctions $x \mapsto C\cos(kx) + D\sin(kx)$, avec $C, D \in \mathbb{C}$ constantes.

**2.10 Exercice.** Utiliser la méthode du quotient pour résoudre l'équation $y'' + ay' + by = f(x)$. On cherchera $y$ sous la forme $y(x) = z(x)e^{r_1 x}$. Discuter les cas $r_1 \neq r_2$ et $r_1 = r_2$.

**2.11 Exercice.** Résoudre l'équation $y' - y = e^x$.

**2.12 Exercice.** Trouver, en utilisant la méthode utilisée dans la preuve de la Proposition 2.6, la forme d'une solution particulière de $y'' + ay' + by = P(x)e^{qx}$. Discuter en fonction de $r_1$, $r_2$ et $q$.

**2.13 Exercice.** Résoudre l'équation $y'' - 3y' + 2y = e^x$.

# Chapitre 3

# Borne supérieure. Limite de suite

## Guide

Ce chapitre prépare à l'étude des fonctions continues. Cette étude repose sur deux notions fondamentales, présentées ici.

## Borne supérieure

**3.1 Définition.** Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$.

1. $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est un *majorant* de $A$ si

$$M \geq x, \quad \forall x \in A.$$

2. $m \in \overline{\mathbb{R}}$ est un *minorant* de $A$ si

$$m \leq x, \quad \forall x \in A.$$

Un ensemble a toujours un majorant ($\infty$) et en a, en général, plusieurs. Par exemple, si $A = ]0,1[$, alors $1, 2, 3, \ldots$, sont des majorants de $A$. Intuitivement, 1 est un majorant spécial de $A$, au sens où il semble être le plus petit de tous les majorants possibles. C'est en effet le cas, mais pour le montrer donnons d'abord une définition.

**3.2 Définition.** Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$.

1. $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est le *supremum* ou la *borne supérieure* de $A$ (et on écrit $M = \sup A$) si $M$ est le plus petit majorant de $A$, c'est-à-dire

$$M \text{ majorant de } A \text{ et } M \leq M', \ \forall M' \text{ majorant de } A.$$

2. $m \in \overline{\mathbb{R}}$ est l'*infimum* ou la *borne inférieure* de $A$ (et on écrit $m = \inf A$) si $m$ est le plus grand minorant de $A$, c'est-à-dire

$$m \text{ minorant de } A \text{ et } m \geq m', \ \forall m' \text{ minorant de } A.$$

Montrons que $1 = \sup ]0,1[$. En effet, $M = 1$ est majorant de $A = ]0,1[$. Soit $M'$ un majorant de $A$. En particulier, on a $M' \geq 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \geq 2$, d'où $M' \geq \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1 = M$. □

**Axiome de la borne supérieure.** Toute partie non vide $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ possède (exactement une) borne supérieure $M \in \overline{\mathbb{R}}$.

✍ Exercices 3.10-3.11.

☞ Axiome ou propriété ? Les deux. C'est un axiome si nous ne savons pas qui est $\mathbb{R}$, mais nous lui imposons cette propriété qui a l'air valide sur le dessin. C'est une propriété si nous avons "construit" $\mathbb{R}$ ; nous pouvons alors montrer que l'ensemble ainsi construit satisfait cette propriété. Nous y reviendrons.

**3.3** ✎ **Proposition.** On a

$$M = \sup A \Longleftrightarrow M \text{ majorant de } A \text{ et } \exists (x_n) \subset A \text{ telle que } x_n \to M. \tag{3.1}$$

☞ Concrètement : pour montrer que $M = \sup A$, il faut :

1. Montrer que $M \geq x$, $\forall\, x \in A$.
2. Trouver une suite $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to M$.

## L'inégalité des accroissements finis

Au passage, revenons sur le théorème des accroissements finis, dont la conclusion est reformulée ici en utilisant le sup.

**3.4 Proposition.**
*Hypothèse.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle.

*Conclusion.* $|f(b) - f(a)| \leq |b-a| \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$.

Nous allons donner deux preuves de ce résultat. La première est la preuve habituelle, plus courte. La seconde a l'avantage de s'appliquer dans d'autres situations.

*Démonstration. Première preuve.* Soit $c \in ]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$. Alors

$$|f(b) - f(a)| = |b-a||f'(c)| \leq |b-a| \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

*Deuxième preuve.* Soit $M := \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|$. ☞ Si $M = \infty$, il n'y a rien à montrer. Supposons $M < \infty$ et $a < b$. Nous devons montrer que

$$f(a) - M(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$

Montrons par exemple la première inégalité. Soit $g(x) := f(x) - M(b-x)$, de sorte que ☞ l'inégalité à montrer équivaut à $g(a) \leq g(b)$. Ceci est certainement vrai si $g$ est croissante. Or, nous avons ☞ $g'(x) = f'(x) + M \geq 0$. □

✍ Exercice 3.12.

## Limites de suites

**3.5 Définition.** Soit $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$. On a :

1. $x_n \to l \in \mathbb{R}$ si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0 \implies |x_n - l| < \varepsilon.$$

2. $x_n \to \infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0 \implies x_n > M.$$

3. $x_n \to -\infty$ si :

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq n_0 \implies x_n < M.$$

✍ Exercices 3.13-3.14.

**3.6 Définition.** Une suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ :

1. A une limite si $x_n \to l$ pour un $l \in \overline{\mathbb{R}}$.
2. Converge si $x_n \to l$ pour un $l \in \mathbb{R}$.
3. Diverge si elle ne converge pas.

**3.7 Définition.** Une *suite extraite* ou *sous-suite* de la suite $(x_n)_{n\geq m}$ est une suite $x_{n_0}, x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}, \ldots$, avec $m \leq n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ En condensé, on écrit $(x_{n_k})_{k\geq 0}$.

Autre écriture : si on définit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\varphi(k) := n_k$, alors $\varphi$ est strictement croissante et on désigne la sous-suite ci-dessus par $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$.

✍ Exercice 3.16.

**3.8 Définition.** Une suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ est :

1. *Majorée* s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \leq M$, $\forall n$.
2. *Minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $x_n \geq m$, $\forall n$.
3. *Bornée* si elle est majorée et minorée, c'est-à-dire

$$\exists m, M \in \mathbb{R} \text{ tels que } m \leq x_n \leq M, \quad \forall n.$$

☞ Dans la définition d'un majorant d'ensemble $A$, on prend $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Dans la définition d'une suite majorée $(x_n)$, on demande $M \in \mathbb{R}$.

Le lien entre limite et sous-suite est donné par le théorème fondamental suivant.

**3.9 ✎ Théorème** (de Bolzano-Weierstrass)**.** Toute suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ contient une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui a une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire :

$$\exists l \in \overline{\mathbb{R}},\ \exists (x_{n_k}) \text{ tels que } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

Si, de plus, la suite $(x_n)$ est bornée, alors elle contient une sous-suite convergente $(x_{n_k})$ :

$$\exists l \in \mathbb{R},\ \exists (x_{n_k}) \text{ tels que } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

# Exercices

**3.10 Exercice.** Soit $A \subset \mathbb{R}$. Montrer que $A$ a un infimum. Plus précisément, montrer que $\inf A = -\sup(-A)$.

**3.11 Exercice** (unicité des bornes)**.** Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ un ensemble non vide. Montrer que $\sup A$ et $\inf A$ sont uniques.

**3.12 Exercice.**
*Hypothèses.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonction de Rolle. $a < b$. $m \leq f'(x) \leq M$, $\forall\, x \in ]a,b[$.

*Conclusion.* $f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$.

**3.13 Exercice.** Soit $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ telle que $x_n \to x$ et soit $y \in \overline{\mathbb{R}}$.

1. Si $y > x$, alors $\exists\, n_0$ tel que $x_n < y$, $\forall\, n \geq n_0$.
2. Si $y < x$, alors $\exists\, n_0$ tel que $x_n > y$, $\forall\, n \geq n_0$.
3. Et si $y = x$ ?

**3.14 Exercice** (unicité de la limite)**.**
*Hypothèses.* $x_n \to l$. $x_n \to L$.

*Conclusion.* $l = L$.
Donner une preuve par l'absurde de ce fait. En supposant, par exemple, que $l < L$, considérer un $M \in \mathbb{R}$ tel que $l < M < L$. Conclure grâce à l'exercice précédent.

**3.15 Exercice** (les premiers termes ne comptent pas)**.** Soient $n_0 \in \mathbb{N}$, $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Nous considérons la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$. La limite de cette suite, si elle existe, et notée $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ n \geq n_0}} x_n$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \iff \lim_{\substack{n\to\infty \\ n\geq n_0}} x_n = l.$$

**3.16 Exercice.** Soient $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $(x_{n_k})$ une sous-suite de $(x_n)$.

1. Montrer (par récurrence) que $n_k \geq k$, $\forall\, k$.
2. Supposons que $x_n \to l$. Montrer que $x_{n_k} \to l$.

# Chapitre 4

# Fonctions continues

## Guide

Dans le premier chapitre, nous avons passé rapidement en revue les propriétés les plus simples des fonctions continues : par exemple, $f, g$ continues $\Longrightarrow$ $fg$ continue. Dans ce chapitre, nous allons établir quelques propriétés fondamentales des fonctions continues, évidentes sur un dessin. Résultat typique : si le graphe d'une fonction continue passe en-dessous et au-dessus d'une droite horizontale, alors le graphe doit intersecter la droite (théorème des valeurs intermédiaires).

## Boîtes noires

Les limites de suites. Les résultats du chapitre précédent.

## Les grands théorèmes

**4.1 Théorème** (des bornes)**.**
*Hypothèse.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue.
*Conclusion.* $f$ a un point de maximum et un point de minimum, c'est-à-dire :

$$\exists x_0, x_1 \in [a,b] \text{ tels que } f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1), \quad \forall x \in [a,b].$$

*Démonstration.* Montrons l'existence de $x_1$. Soit

$$M := \sup\{f(x) ; x \in [a,b]\}.$$

Alors $M \geq f(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Montrons qu'il existe $x_1 \in [a,b]$ tel que $f(x_1) = M$. Soit $(y_n) \subset [a,b]$ telle que $f(y_n) \to M$ ; l'existence de la suite $(y_n)$ découle de la Proposition 3.3. En utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass, on trouve que la suite $(y_n)$ contient une sous-suite $(y_{n_k})$ ayant une limite. Notons que $f(y_{n_k}) \to M$.

Soit $x_1 := \lim_{k\to\infty} y_{n_k}$.Comme $a \leq y_{n_k} \leq b$, on trouve que $a \leq x_1 \leq b$. En utilisant la continuité de $f$, on obtient :

$$M = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k}) = f\left(\lim_{k\to\infty} y_{n_k}\right) = f(x_1).$$

Le point $x_1$ est un point de maximum de $f$. □

Montrer l'existence de $x_0$.

Une fonction $f : A \to \mathbb{R}$ est *majorée* si $\exists M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \le M$, $\forall x \in A$ ; nous définissons de même les fonctions minorées et bornées. Du théorème des bornes, une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée.

**4.2 Théorème** (des valeurs intermédiaires)**.**
*Hypothèse.* $f : I \to \mathbb{R}$ continue.
*Conclusion.* $f(I)$ est un intervalle.

Usuellement, le théorème est utilisé sous la forme du corollaire suivant.

**4.3 Corollaire.**
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$ continue. $c \in \mathbb{R}$. $\exists x_0, x_1 \in I$ tels que $f(x_0) < c < f(x_1)$.
*Conclusion.* L'équation $f(x) = c$ a au moins une solution $x \in ]x_0, x_1[$.

*Preuve du corollaire.* $J := f([x_0, x_1])$ est un intervalle (Théorème 4.2), qui contient $f(x_0)$ et $f(x_1)$. Par conséquent, $J$ contient $[f(x_0), f(x_1)]$, et donc $c$. Il s'ensuit qu'il existe $x \in ]x_0, x_1[$ tel que $f(x) = c$. □

La conclusion du Théorème 4.2 étant que $f(I)$ est un intervalle, il faut savoir reconnaître les intervalles (d'un point de vue théorique). Ceci repose sur le résultat suivant.

**4.4 Proposition.** On a

$$J \subset \overline{\mathbb{R}} \text{ intervalle} \Longleftrightarrow ]a,b[ \subset J, \quad \forall a,b \in J \text{ tels que } a \ne b.$$

*Preuve du Théorème 4.2.* Soient $a, b \in f(I)$ tels que $a \ne b$. Soit $c \in ]a,b[$. Montrons l'existence d'un $x \in I$ tel que $f(x) = c$. Soient $y, z \in I$ tels que $f(y) = a$ et $f(z) = b$. Supposons par exemple $y < z$ et $a < b$. Soit

$$A := \{t \in [y,z]\,;\, f(t) < c\}.$$

Alors $A$ est non vide (car $y \in A$). Soit $x := \sup A$. Il existe donc (Proposition 3.3) une suite $(t_n) \subset A$ telle que $t_n \to x$. Comme $y \le t_n \le z$, on trouve $a \le x \le b$, et donc $x \in I$. Par ailleurs, on a $f(t_n) < c$, d'où

$$c \ge \lim_{n\to\infty} f(t_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} t_n\right) = f(x).$$

Résumé : $y \le x \le z$ et $f(y) \le c$. Comme $f(z) > c$, nous trouvons $x < z$. $x$ étant un majorant de $A$, il s'ensuit que $]x,z] \cap A = \emptyset$. Soit $x_n := x + \dfrac{z-x}{n} \in ]x,z]$, $\forall n \ge 1$. Alors $x_n \to x$ et $f(x_n) \ge c$, d'où

$$c \le \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(x).$$

Finalement, nous avons $c \le f(x) \le c$, d'où $f(x) = c$.

Nous concluons grâce à la Proposition 4.4. □

## Conséquences du théorème des valeurs intermédiaires

**4.5 Théorème.**
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ continue.

*Conclusion.*

$$f \text{ est injective} \iff f \text{ est strictement monotone.}$$

*Démonstration.* « $\Longleftarrow$ » est claire.
« $\Longrightarrow$ » Nous pouvons supposer $I$ non dégénéré. Fixons $a,b \in I$, avec $a < b$. Par hypothèse, $f(a) \neq f(b)$. Supposons, par exemple, $f(a) < f(b)$, et montrons que, dans ce cas, $f$ est strictement croissante. Preuve par l'absurde : sinon,

$$\exists x,y \in I \text{ tels que } x < y \text{ et } f(x) \geq f(y).$$

La fonction $f$ étant injective, nous avons $f(x) > f(y)$.

Plusieurs cas se présentent, selon la position relative des points $a,b,x,y$ :

$$\#1 : x < y < a < b,\ \#2 : x < a \leq y \leq b,\ \#3 : x < a < b < y,$$
$$\#4 : a \leq x < y \leq b,\ \#5 : a \leq x \leq b < y,\ \#6 : a < b < x < y.$$

Examinons la cas #1 ; les autres cas sont similaires. Plusieurs possibilités sont à explorer :

1. Si $f(a) \geq f(y)$, alors $f(a) > f(y)$. Choisissons $c$ tel que $f(y) < c < f(x)$ et $f(y) < c < f(a)$. Du théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_1 \in ]x,y[$ et $x_2 \in ]y,a[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = c$.
2. Si $f(a) < f(y)$, alors nous pouvons choisir un $c$ tel que $f(a) < c < f(y)$ et $f(a) < c < f(b)$. Comme ci-dessus, il existe $x_1 \in ]y,a[$ et $x_2 \in ]a,b[$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = c$. □

Examiner le cas où $f(a) > f(b)$. Examiner les cas $\#2 - \#6$.

Exercice 4.14.

Il est possible d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour calculer les images des fonctions continues et monotones. A titre d'exemple, nous allons présenter un résultat en ce sens.

**4.6 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : ]a,b[ \to \mathbb{R}$ continue et strictement croissante (avec $a < b$).

*Conclusions.* Nous avons :

$$\exists m := \lim_{x \to a} f(x) \text{ et nous avons } m = \inf\{f(x) ; x \in ]a,b[\} ;$$

$$\exists M := \lim_{x \to b} f(x) \text{ et nous avons } M = \sup\{f(x) ; x \in ]a,b[\} ;$$

$$f(]a,b[) = ]m,M[.$$

*Démonstration.* Soient $m := \inf\{f(x)\,;\, x \in ]a,b[\}$, $M := \sup\{f(x)\,;\, x \in ]a,b[\}$.

Nous avons clairement $f(]a,b[) \subset [m,M]$.

Montrons que $f(]a,b[) \subset ]m,M[$. Preuve par l'absurde : si, par exemple, $m \in f(]a,b[)$, alors il existe $x \in ]a,b[$ tel que $f(x) = m$. Soit $y \in ]a,b[$ tel que $y < x$. Alors $f(y) < m$, ce qui contredit la définition de $m$. De même, $M \notin f(]a,b[)$.

Montrons maintenant que $f(]a,b[) \supset ]m,M[$. Soit $c \in ]m,M[$. Alors $c > m$, et donc il existe $x \in ]a,b[$ tel que $f(x) < c$. De même, $c < M$ et donc il existe $y \in ]a,b[$ tel que $f(y) > c$. Le théorème des valeurs intermédiaires assure que $c \in f(]a,b[)$.

Prouvons que $m = \lim\limits_{x\to a} f(x)$ ; l'égalité $M = \lim\limits_{x\to b} f(x)$ s'obtient de manière analogue. La preuve se fait selon les cas $m \in \mathbb{R}$ ou $m = -\infty$. Considérons par exemple le cas où $m \in \mathbb{R}$. Soit $(x_n) \subset ]a,b[$ telle que $x_n \to a$. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $m + \varepsilon$ n'est pas un minorant de $\{f(x)\,;\, x \in A\}$. Il existe donc un $x \in ]a,b[$ tel que $f(x) < m + \varepsilon$. Par ailleurs, comme $x_n \to a$ et $a < x$, il existe $n_0$ tel que $x_n < x$, $\forall\, n \geq n_0$. Nous obtenons $m < f(x_n) < m + \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$. □

✍ Examiner le cas $m = -\infty$ et l'existence de la limite $\lim\limits_{x\to b} f(x)$. Ecrire et prouver l'analogue de ce résultat lorsque $f : \wr a,b \int \to \mathbb{R}$ est continue et strictement monotone.

☞ Le nombre $\inf\{f(x); x \in A\}$ est noté $\inf\limits_A f$. De même pour le supremum.

**4.7 Théorème.**
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$. $f$ continue et injective.

*Conclusions.* $J := f(I)$ est un intervalle. $f^{-1} : J \to I$ est continue.

*Démonstration.* La première conclusion suit du théorème des valeurs intermédiaires. Du Théorème 4.5, $f$ est strictement monotone et donc $f^{-1}$ l'est aussi. Nous avons donc $f^{-1} : J \to I$ et $f^{-1}$ monotone. Nous concluons grâce à la Proposition 4.8. □

**4.8 ✎ Proposition.**
*Hypothèse.* $f : I \to \mathbb{R}$ monotone.

*Conclusion.* On a

$$f \text{ continue} \iff f(I) \text{ est un intervalle.}$$

✍ Exercices 4.15-4.16.

## $\varepsilon$ et $\delta$

Nous avons défini la continuité d'une fonction à partir des limites de suites. Une autre description de la continuité est donnée par le résultat suivant.

**4.9 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A$.

*Conclusion.* Nous avons

$$f \text{ est continue en } y \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,;$$

$$f \text{ est continue } \iff \forall\, y \in A,\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Dans l'énoncé, il est sous-entendu que $x \in A$.

Si nécessaire, nous noterons $\delta = \delta(\varepsilon)$ un $\delta$ correspondant à $\varepsilon$ comme ci-dessus. En principe, ce nombre $\delta$ dépend de $\varepsilon$, de $y$ (et de $f$).

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » Preuve par l'absurde : sinon, il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

pour tout $\delta > 0$ il existe $x$ tel que $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

Pour $\delta := \dfrac{1}{n}$, avec $n \geq 1$, on obtient l'existence d'un $x_n \in A$ tel que $|x_n - y| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon$. Comme

$$y - \frac{1}{n} < x_n < y + \frac{1}{n},$$

le théorème des gendarmes implique que $x_n \to y$, d'où $f(x_n) \to y$. Pour $n$ suffisamment grand, ceci contredit l'inégalité $|f(x_n) - f(y)| \geq \varepsilon$.

« $\Longleftarrow$ » Soit $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to y$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ lui correspondant. Alors il existe $n_0$ tel que $|x_n - y| < \delta$, $\forall\, n \geq n_0$. Nous obtenons $|f(x_n) - f(y)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$, d'où $f(x_n) \to f(y)$. □

Ceci nous amène à la stratégie suivante pour montrer la continuité de $f$ en $y$ : on se *donne* un $\varepsilon > 0$ et on *cherche* un $\delta > 0$ tel que

$$x \in ]y - \delta, y + \delta[ \cap A \implies f(x) \in ]f(y) - \varepsilon, f(y) + \varepsilon[.$$

Exercices 4.17-4.18.

# Le principe $2\varepsilon$

Dans la pratique, il est difficile d'obtenir exactement la conclusion $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Le *principe* $2\varepsilon$ affirme que nous pouvons nous contenter d'obtenir l'inégalité $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon$. Plus généralement, nous avons le résultat suivant.

**4.10 Proposition** (le principe $2\varepsilon$)**.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A$. $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$. $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} g(\varepsilon) = 0$.

*Conclusion.* Nous avons

$$f \text{ est continue en } y \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < g(\varepsilon).$$

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » On applique la Proposition 4.9 avec $\varepsilon \rightsquigarrow g(\varepsilon)$.

« $\Longleftarrow$ » Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ tel que $0 < \lambda < \eta \implies |g(\lambda)| < \varepsilon$. ( L'existence d'un tel $\eta$ suit du fait que $\lim\limits_{\lambda \to 0} g(\lambda) = 0$.) Comme $g > 0$, pour un tel $\lambda$ nous avons $g(\lambda) < \varepsilon$. Soit $\delta = \delta(\lambda)$ correspondant à $\lambda$. Alors

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < g(\lambda) \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$ □

Nous avons écrit la forme du principe $2\varepsilon$ utile pour vérifier la continuité. Ce principe s'adapte à d'autres calculs : limite d'une fonction en un point, limite d'une suite. A titre d'exemple :

Exercice 4.19.

# Continuité uniforme

**4.11 Définition.** Soit $f : A \to \mathbb{R}$. $f$ est *uniformément continue* si : $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (le même pour tous les $y \in A$) tel que :

$$|x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

✍ Une fonction uniformément continue est continue. Exercice 4.20.

**4.12 Proposition.**
*Hypothèse.* $f : A \to \mathbb{R}$.

*Conclusion.* Nous avons

$$f \text{ est uniformément continue} \iff \forall (x_n), (y_n) \subset A, x_n - y_n \to 0 \implies f(x_n) - f(y_n) \to 0.$$

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » Soient $(x_n), (y_n) \subset A$ telles que $x_n - y_n \to 0$. Soit $\varepsilon > 0$, et soit $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ le nombre lui correspondant dans la définition de la continuité uniforme. Soit $n_0$ tel que $|x_n - y_n| < \delta$ si $n \geq n_0$. Alors $|f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

« $\Longleftarrow$ » Preuve par l'absurde. Sinon, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in A$ tels que $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Avec $\delta := \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, nous trouvons $x_n, y_n \in A$ tels que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Nous obtenons $x_n - y_n \to 0$ et donc $f(x_n) - f(y_n) \to 0$. Ceci contredit l'inégalité $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. □

Concrètement : pour montrer la continuité uniforme de $f$, nous prenons deux suites $(x_n), (y_n) \subset A$ et nous essayons de montrer que $f(x_n) - f(y_n) \to 0$.

✍ Exercice 4.21.

**4.13 Théorème** (de Heine)**.**
*Hypothèse.* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue.

*Conclusion.* $f$ est uniformément continue.

*Démonstration.* Par l'absurde : sinon, il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, il existe $x, y \in A$ tels que $|x - y| < \delta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Avec $\delta := \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, nous trouvons $x_n, y_n \in A$ tels que $|x_n - y_n| < \dfrac{1}{n}$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Soient $(x_{n_k})$ et $x \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $x_{n_k} \to x$. Alors $a \leq x_{n_k} \leq b$, $\forall\, k$, d'où $a \leq x \leq b$. Par ailleurs, nous avons

$$y_{n_k} = (y_{n_k} - x_{n_k}) + x_{n_k} \to x.$$

Nous trouvons que $f(x_{n_k}) \to f(x)$ et $f(y_{n_k}) \to f(y)$, d'où $f(x_{n_k}) - f(y_{n_k}) \to 0$. Il s'ensuit qu'il existe un $k_0$ tel que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| < \varepsilon$, $\forall\, k \geq k_0$. □

# Exercices

**4.14 Exercice.** Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et monotone. Montrer que $f([a,b])=[f(a),f(b)]$.

**4.15 Exercice.** Dans cet exercice, nous supposons connues les limites $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^n$.

1. Supposons $n$ impair. Montrer que la fonction

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^n,$$

admet une réciproque continue. Celle-ci est notée $x\mapsto \sqrt[n]{x}$.

2. Supposons $n$ pair. Montrer que la fonction

$$\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto x^n,$$

admet une réciproque continue. Celle-ci est notée $x\mapsto \sqrt[n]{x}$.

**4.16 Exercice.** Quelles sont les propriétés de l'exponentielle nécessaire pour établir la continuité de la fonction ln ?

**4.17 Exercice.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $|f'|\le C$. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\delta := \dfrac{\varepsilon}{C}$ convient dans la caractérisation de la continuité avec $\varepsilon$ et $\delta$.

**4.18 Exercice.** Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$.

1. Montrer que $f$ est continue.
2. Calculer, pour chaque $y\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$, un $\delta$ correspondant à la caractérisation de la continuité avec $\varepsilon$ et $\delta$.
3. Nous fixons un $\varepsilon>0$. Montrer qu'il est impossible de choisir un $\delta$ indépendant de $x\in\mathbb{R}$.

**4.19 Exercice** (principe $M\pm1$)**.** Soit $(x_n)\subset\overline{\mathbb{R}}$. Montrer que :

1. $x_n\to\infty \iff \forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_0$ tel que $x_n>M-1,\ \forall n\ge n_0$.
2. $x_n\to\infty \iff \exists g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{M\to\infty} g(M)=\infty$ telle que $\forall M, \exists n_0$ tel que $x_n>g(M),\ \forall n\ge n_0$.
3. $x_n\to-\infty \iff \forall M\in\mathbb{R},\ \exists n_0$ tel que $x_n<M+1,\ \forall n\ge n_0$.
4. $x_n\to-\infty \iff \exists g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que $\lim\limits_{M\to\infty} g(M)=-\infty$ telle que $\forall M, \exists n_0$ tel que $x_n<g(M),\ \forall n\ge n_0$.

**4.20 Exercice.** Donner un exemple de fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue qui ne soit pas uniformément continue.

**4.21 Exercice.** Soit $f:A\to\mathbb{R}$. Montrer que :

$$f \text{ est uniformément continue} \iff \exists g:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+ \text{ telle que } \lim_{\varepsilon\to0} g(\varepsilon)=0$$
$$\text{et } |f(x)-f(y)|\le g(|x-y|),\ \forall x,y\in A.$$

# Chapitre 5

# Suites

## Guide

Nous allons enfin poser les fondations des chapitres précédents, en montrant les propriétés des (limites de) suites. Par ailleurs, nous présentons les outils de base permettant l'étude des suites.

## Boîtes noires

Une seule : l'axiome de la borne supérieure.

## Opérations avec les limites

✍ Exercices 5.19-5.20.

**5.1 Proposition.** Une suite convergente est bornée.

*Démonstration.* Soit $l := \lim_{n\to\infty} x_n$. Soit $n_0$ tel que $|x_n - l| < 1$, $\forall\, n \geq n_0$. Alors

$$\Rightarrow \min\{l-1, x_0, \ldots, x_{n_0-1}\} \leq x_n \leq \max\{l+1, x_0, \ldots, x_{n_0-1}\},\ \forall\, n. \qquad \square$$

Une suite bornée n'est pas forcément convergente ; voir Exercice 5.25.

**5.2 Proposition.**
*Hypothèses.* $x_n \to l$. $y_n \to L$. $l + L$ a un sens.

*Conclusion.* $x_n + y_n \to l + L$.

*Démonstration.* Les seuls cas exclus par l'hypothèse sont $l = \infty$, $L = -\infty$, respectivement $l = -\infty$, $L = \infty$. Détaillons deux cas parmi les cas restants.
*Cas #1.* $l, L \in \mathbb{R}$.
Soit $\varepsilon > 0$. Soient $n_1, n_2$ tels que $|x_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n \geq n_1$, respectivement $|y_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n \geq n_2$. Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Alors

$$|(x_n + y_n) - (l + L)| = |(x_n - l) + (y_n - L)| \leq |x_n - l| + |y_n - L| < \varepsilon,\ \forall\, n \geq n_0.$$

*Cas #2.* $l \in \mathbb{R}$, $L = \infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$. Soient $n_1, n_2$ tels que $|x_n - l| < 1$, $\forall\, n \geq n_1$, respectivement $y_n > M - l + 1$, $\forall\, n \geq n_2$. Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Alors

☞ $$x_n + y_n > l - 1 + M - l + 1 > M, \ \forall\, n \geq n_0. \qquad \square$$

✍ Etudier les autres cas.

**5.3 Proposition.**
*Hypothèses.* $x_n \to l$. $y_n \to L$. $lL$ a un sens.

*Conclusion.* $x_n y_n \to lL$.

*Démonstration.* Les seuls cas exclus par l'hypothèse sont $l \in \{-\infty, \infty\}$, $L = 0$, respectivement $l = 0$, $L \in \{-\infty, \infty\}$. Considérons deux cas parmi les cas restants.
*Cas #1.* $l, L \in \mathbb{R}$.
Le point de départ est le calcul suivant :

☞ $$|x_n y_n - lL| = |(x_n - l)y_n + (y_n - L)l| \leq |x_n - l||y_n| + |l||y_n - L|.$$

Soit $M > 0$ tel que $|y_n| < M$, $\forall\, n$. (L'existence de $M$ suit de la Proposition 5.1.) Soit $\varepsilon > 0$. Soient $n_1, n_2$ tels que $|x_n - l| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, $\forall\, n \geq n_1$, respectivement $|y_n - L| < \dfrac{\varepsilon}{2(|l|+1)}$, $\forall\, n \geq n_2$. Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Alors

☞ $$|x_n y_n - lL| < \frac{\varepsilon}{2M} M + |l| \frac{\varepsilon}{2(|l|+1)} < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_0.$$

*Cas #2.* $l \in \mathbb{R}^*$, $L \in \{-\infty, \infty\}$.
Pour fixer les idées, supposons que $l > 0$ et $L = \infty$. Soit $M \in \mathbb{R}$. Soient $n_1, n_2$ tels que $x_n > \dfrac{l}{2}$, $\forall\, n \geq n_1$, respectivement $y_n > \dfrac{2M}{l}$, $\forall\, n \geq n_2$. (L'existence de $n_1, n_2$ suit de l'Exercice 3.13.) Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Alors

☞ $$x_n y_n > \frac{l}{2} \frac{2M}{l} > M, \ \forall\, n \geq n_0. \qquad \square$$

✍ Etudier les autres cas.

**5.4 Corollaire.**
*Hypothèses.* $x_n \to l$. $y_n \to L$. $t \in \mathbb{R}$. $l + tL$ a un sens.

*Conclusion.* $x_n + t y_n \to l + tL$.

*Démonstration.* ☞ Nous avons $t y_n \to tL$ (appliquer la Proposition 5.3 avec $x_n \rightsquigarrow t$). Nous concluons grâce à la Proposition 5.2. $\square$

**5.5 Proposition.**
*Hypothèses.* $x_n \to l$. $l \neq 0$.
*Conclusions.* $\exists\, n_0$ tel que $x_n \neq 0$, $\forall\, n \geq n_0$. $\dfrac{1}{x_n} \to \dfrac{1}{l}$.

*Démonstration.* Les cas à examiner sont $l \in \mathbb{R}^*$ et $l \in \{-\infty, \infty\}$.
*Cas* #1. $l \in \mathbb{R}^*$.
Supposons, par exemple, que $l > 0$. Alors il existe $n_0$ tel que $x_n > \frac{l}{2} > 0$, $\forall\, n \geq n_0$ (Exercice 3.13).

Pour le calcul de la limite, le point de départ est le calcul suivant, valide si $n \geq n_0$ :

$$\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{l}\right| = \frac{|x_n - l|}{x_n l} \leq \frac{2|x_n - l|}{l^2}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_1$ tel que $|x_n - l| < \frac{l^2\varepsilon}{2}$, $\forall\, n \geq n_1$. Soit $n_2 := \max\{n_0, n_1\}$. Alors $\left|\frac{1}{x_n} - \frac{1}{l}\right| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_2$.
*Cas* #2. $l \in \{-\infty, \infty\}$.
Supposons, par exemple, que $l = \infty$. Alors il existe $n_0$ tel que $x_n > 1 > 0$, $\forall\, n \geq n_0$ (Exercice 3.13).

Soit $\varepsilon > 0$. Soit $M := \frac{1}{\varepsilon}$. Soit $n_1$ tel que $x_n > M$, $\forall\, n \geq n_1$. Alors

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| = \frac{1}{x_n} < \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_1.$$ □

✍ Examiner les cas où $l \in [-\infty, 0[$.

✍ Exercices 5.21-5.22.

**5.6 Proposition.**
*Hypothèses.* $x_n \to 0$. $x_n > 0$.

*Conclusion.* $\frac{1}{x_n} \to \infty$.

*Démonstration.* Soit $M \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\frac{1}{\varepsilon} \geq M$. (Par exemple, nous pouvons prendre $\varepsilon := \begin{cases} 1/M, & \text{si } M > 0 \\ 1, & \text{si } M \leq 0 \end{cases}$). Soit $n_0$ tel que $0 < x_n < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$. Si $\frac{1}{\varepsilon} \geq M$, alors

$$\frac{1}{x_n} > \frac{1}{\varepsilon} \geq M, \quad \forall\, n \geq n_0.$$ □

✍ Examiner le cas où $x_n < 0$.

**5.7 Théorème** (des gendarmes)**.**
*Hypothèses.* $(x_n), (y_n), (z_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$. $x_n \in [y_n, z_n]$. Les suites $(y_n)$ et $(z_n)$ ont la même limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Conclusions.* $\exists \lim_{n\to\infty} x_n$ et cette limite vaut $l$.

*Démonstration.* Les cas à étudier sont : $l \in \mathbb{R}$, $l = \infty$, $l = -\infty$. Supposons par exemple $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $n_1$, $n_2$ tels que

$$l - \varepsilon < y_n < l + \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_1, \text{ et } l - \varepsilon < z_n < l + \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_2.$$

Soit $n_0 := \max\{n_1, n_2\}$. Alors

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon, \ \forall\, n \geq n_0.$$ □

✍ Etudier le cas où $l = \pm\infty$.

## Suites monotones

**5.8 Proposition** (les inégalités passent à la limite)**.**
*Hypothèses.* $x_n \geq y_n$. $x_n \to l$. $y_n \to L$.

*Conclusion.* $l \geq L$.

*Démonstration.* Preuve par l'absurde. Supposons que $l < L$. Soit $M \in \mathbb{R}$ tel que $l < M < L$. Alors (Exercice 3.13) il existe $n_1, n_2$ tels que $x_n < M$, $\forall\, n \geq n_1$ et $y_n > M$, $\forall\, n \geq n_2$. Pour $n > \max\{n_1, n_2\}$, nous obtenons $x_n < y_n$ ✂. □

**5.9 Corollaire.**
*Hypothèses.* $x_n \geq a$. $x_n \to l$.

*Conclusion.* $l \geq$.
De même si $x_n \leq a$.

*Démonstration.* Appliquer la proposition précédente avec $y_n \rightsquigarrow a$. □

Si $x_n > a$ et $x_n \to l$, nous n'avons pas forcément $l \geq a$ : prendre $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$, $a = l = 0$.

**5.10 Théorème.** 1. Une suite monotone $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ a une limite.
2. Une suite $(x_n) \subset \mathbb{R}$ croissante et majorée est convergente.
3. Une suite $(x_n) \subset \mathbb{R}$ décroissante et minorée est convergente.

*Démonstration.* Nous allons considérer uniquement le cas des suites croissantes, indexées par exemple à partir de $n = 0$. Soient $A := \{f(x_n); n \in \mathbb{N}\}$, et $l := \sup A$. Montrons que $x_n \to l$. Trois cas sont à considérer.
*Cas* #1. $l = -\infty$.
Dans ce cas, $x_n \equiv -\infty$, et la conclusion est claire.
*Cas* #2. $l = \infty$.
Soit $M \in \mathbb{R}$. Alors $M < l$, et donc il existe $n_0$ tel que $x_{n_0} > M$. Il s'ensuit que $x_n > M$, $\forall\, n \geq n_0$.
*Cas* #3. $l \in \mathbb{R}$.
Nous procédons comme dans le Cas #2, avec $M \rightsquigarrow l - \varepsilon$. Nous obtenons $l - \varepsilon < x_n \leq l$, $\forall\, n \geq n_0$, et donc $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

Si la suite $(x_n)$ est majorée par un $M \in \mathbb{R}$, alors $l \leq M$, d'où $l < \infty$. Le cas $l = -\infty$ étant exclu, nous obtenons $l \in \mathbb{R}$, et donc $(x_n)$ converge. □

✍ Etudier le cas des suite décroissantes.

**5.11 Définition.** Deux suites $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ sont *adjacentes* si :

1. $x_n \nearrow$.
2. $y_n \searrow$.
3. $y_n - x_n \to 0$.

**5.12 Théorème** (des suites adjacentes)**.**
*Hypothèse.* $(x_n), (y_n)$ adjacentes.

*Conclusions.* $(x_n)$ et $(y_n)$ convergent vers la même limite.

*Démonstration.* Soient $l := \lim_{n\to\infty} x_n$ et $L := \lim_{n\to\infty} y_n$. Comme $x_n \geq x_0$, nous avons $l \geq x_0 > -\infty$. De même, $L < \infty$. On obtient que $l - L$ a un sens. L'hypothèse $y_n - x_n \to 0$ entraîne, par passage à la limite, $L = l$. On obtient que $l, L \in \mathbb{R}$. □

Exercices 5.23-5.24.

**5.13 Théorème** (de Ramsey)**.** Toute suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ contient une sous-suite monotone.

*Démonstration.* La preuve repose sur la remarque suivante : si une partie $A \subset \mathbb{N}$ est *infinie*, alors

$$\forall m \in \mathbb{N}, \ \exists l \in A \text{ tel que } l > m.$$

Preuve par l'absurde de cette remarque : sinon, $A \subset [\![0, m]\!]$, et donc $A$ est finie.
Considérons l'ensemble

$$A := \{n \in \mathbb{N}; x_m < x_n, \ \forall m > n\}.$$

Deux cas se présentent.
*Cas* #1. $A$ est infini.
En utilisant la remarque, nous pouvons trouver ( par récurrence sur $k$) $n_0 < n_1 < \cdots < n_k < \cdots$ des éléments de $A$. Par définition de $A$, nous avons $x_{n_0} > x_{n_1} > \cdots > x_{n_k} > \cdots$, et donc la sous-suite $(x_{n_k})$ est décroissante.
*Cas* #2. $A$ est fini.
Soit $n_0 - 1$ le plus grand élément de $A$. Donc $n_0 \not\in A$. Par définition de $A$, il existe $n_1 > n_0$ tel que $x_{n_1} \geq x_{n_0}$. Nous avons $n_1 > n_0 - 1$, d'où $n_1 \not\in A$. Par le raisonnement qui précède, il existe $n_2 > n_1$ tel que $x_{n_2} \geq x_{n_1}$. Par récurrence, nous construisons de cette manière une sous-suite croissante $(x_{n_k})$. □

**5.14 Théorème** (de Bolzano-Weierstrass)**.** Toute suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ contient une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ qui a une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire :

$$\exists l \in \overline{\mathbb{R}}, \ \exists (x_{n_k}) \text{ tels que } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

Si, de plus, la suite $(x_n)$ est bornée, alors elle contient une sous-suite convergente $(x_{n_k})$ :

$$\exists l \in \mathbb{R}, \ \exists (x_{n_k}) \text{ tels que } \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l.$$

*Démonstration.* La suite $(x_n)$ contient une sous-suite monotone (théorème de Ramsey), qui a donc une limite (Théorème 5.10).

Supposons $(x_n)$ bornée. Soient $m, M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq x_n \leq M$. Alors $m \leq x_{n_k} \leq M$, d'où (Proposition 5.8)

$$-\infty < m \leq l := \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \leq M < \infty,$$

c'est-à-dire la sous-suite $(x_{n_k})$ converge. □

## Recollement

**5.15 Proposition** (la limite de la sous-suite est la limite de la suite)**.**
*Hypothèses.* $x_n \to l$. $(x_{n_k})$ sous-suite de $(x_n)$.

*Conclusion.* $x_{n_k} \to l$.

*Démonstration.* La preuve repose sur la remarque suivante : nous avons $n_k \geq k$, $\forall\, k$. ( Preuve par récurrence sur $k$.)

Parmi les possibilités $l = -\infty$, $l = \infty$, $l \in \mathbb{R}$, examinons le cas où $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $N$ tel que $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N$. Si $k \geq N$, alors $n_k \geq k \geq N$, et donc $|x_{n_k} - x_n| < \varepsilon$. □

La réciproque est fausse : Exercice5.25.

Examiner le cas où $l = \pm\infty$.

Le plus souvent, la Proposition 5.15 est utilisée pour montrer qu'une suite $(x_n)$ n'a pas de limite. Pour ce faire, il suffit de trouver deux sous-suites de $(x_n)$ ayant deux limites différentes. Si ces sous-suites existent, alors $(x_n)$ n'a pas de limite. Exercice 5.27.

Exercice 5.26.

Pour le résultat suivant, il sera plus commode d'utiliser la notation $(x_{\varphi(k)})$ pour désigner une sous-suite.

**5.16 Proposition** (recollement)**.**
*Hypothèses.* $(x_{\varphi_1(k)}), \ldots, (x_{\varphi_m(k)})$, sous-suites de $x_n$.

$$\exists \lim_{k\to\infty} x_{\varphi_1(k)} = \lim_{k\to\infty} x_{\varphi_2(k)} = \cdots = \lim_{k\to\infty} x_{\varphi_m(k)} := l.$$

$\exists\, n_0$ tel que tout $n \geq n_0$ soit de la forme $\varphi_j(k)$ pour un $k$. Ou encore :

$$\{\varphi_1(0), \varphi_1(1), \ldots\} \cup \{\varphi_2(0), \varphi_2(1), \ldots\} \ldots \cup \{\varphi_m(0), \varphi_m(1), \ldots\} \supset \{n_0, n_0 + 1, \ldots, \}.$$

*Conclusion.* $x_n \to l$.
Cas particulier : si $x_{2n} \to l$ et $x_{2n+1} \to l$, alors $x_n \to l$.

*Démonstration.* Nous avons plusieurs cas à examiner : $l = -\infty$, $l = \infty$, $l \in \mathbb{R}$. Considérons par exemple le cas où $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $k_1, \ldots, k_m$ tels que :

$$\forall\, j \in [\![1, m]\!],\ k \geq k_l \implies |x_{\varphi_j(k)} - l| < \varepsilon.$$

Soit $N := \max\{n_0, \varphi_1(k_1), \ldots, \varphi_m(k_m)\}$. Montrons que $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq N$. En effet, soit $n \geq N$. Alors $n \geq n_0$, et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ et $j \in [\![1, m]\!]$ tels que $n = \varphi_j(k)$. Comme $\varphi_j(k) \geq \varphi_j(k_j)$, on trouve $k \geq k_j$, et donc

$$|x_n - l| = |x_{\varphi_j(k)} - l| < \varepsilon.$$ □

Examiner le cas où $l = \pm\infty$.

Exercice 5.28.

## Suites de Cauchy

Pour l'instant, nous avons les moyens d'établir la convergence des suites monotones ou de suites obtenues par recollement à partir de suites monotones. Les suites n'étant pas toutes de ce type, il est utile d'avoir un autre critère de convergence à disposition.

**5.17 Définition.** Une suite est *de Cauchy* si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \text{ tel que } m, n \geq n_0 \implies |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

**5.18 Théorème.** Une suite est convergente $\iff$ elle est de Cauchy.

*Démonstration.* Ce sera notre première preuve un peu compliquée.
« $\implies$ » Soit $l := \lim_{n\to\infty} x_n$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_0$ tel que $|x_n - l| < \varepsilon/2$, $\forall\, n, m \geq n_0$. Alors

$$|x_n - x_m| = |(x_n + l) - (x_m + l)| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \varepsilon, \quad \forall\, n, m \geq n_0.$$

« $\impliedby$ » *Etape 1.* Une suite de Cauchy est bornée.
En effet, soit $n_0$ tel que $|x_n - x_m| < 1$, $\forall\, m, n \geq n_0$. Alors $|x_n - x_{n_0}| < 1$, $\forall\, n \geq n_0$, d'où $x_{n_0} - 1 < x_n < x_{n_0} + 1$, $\forall\, n \geq n_0$. Nous trouvons

$$\min\{x_0, \ldots, x_{n_0-1}, x_{n_0} - 1\} \leq x_n \leq \max\{x_0, \ldots, x_{n_0-1}, x_{n_0} + 1\}.$$

*Etape 2.* Une suite de Cauchy contient une sous-suite convergente $(x_{n_k})$.
En effet, la suite étant bornée, elle contient une sous-suite convergente, d'après le théorème de Bolzano-Weierstrass.
*Etape 3.* Conclusion.
Soit $l := \lim_{k\to\infty} x_{n_k}$. Montrons que $x_n \to l$. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Soit $k_0$ tel que $|x_{n_k} - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, k \geq k_0$. Soit $n_0$ tel que $|x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, $\forall\, n, m \geq n_0$. Soit $K := \max\{n_0, k_0\}$. Notons que $n_K \geq K$. Si $n \geq N$, alors

$$|x_n - l| = |(x_n - x_{n_K}) + (x_{n_K} - l)| \leq |x_n - x_{n_K}| + |x_{n_K} - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \square$$

☞ Nous aurions tout aussi bien pu commencer par $\varepsilon$ (au lieu de $\varepsilon/2$) et finir avec $2\varepsilon$, au nom du principe $2\varepsilon$.

✍ Les applications de ce théorème sont innombrables. A titre d'exemple, voir Exercice 5.29.

## Exercices

**5.19 Exercice.** Soient $(x_n)$ et $l \in \mathbb{R}$. Si $|x_n - l| \leq y_n$, avec $y_n \to 0$, alors $x_n \to l$.

**5.20 Exercice.** Montrer qu'une suite $(x_n)$ est bornée$\iff \exists M > 0$ tel que $|x_n| \leq M$, $\forall\, n$.

**5.21 Exercice.** Montrer que le fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{1}{x}$ a des dérivées de tout ordre, et que $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n\, n!}{x^{n+1}}$.

**5.22 Exercice.** Soient $(x_n)$, $(y_n)$ telles que $x_n \to l$ et $y_n \to L$. Si $L \neq 0$, montrer que $\dfrac{x_n}{y_n} \to \dfrac{l}{L}$.

**5.23 Exercice.** Soit $y_n := 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$, $\forall\, n \geq 1$. Nous nous proposons de montrer que la suite $(y_n)$ converge.[1] Pour ce faire, nous considérons la suite $x_n := 1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln(n+1)$, $\forall\, n \geq 1$.

Montrer que les suites $(x_n)$, $(y_n)$ sont adjacentes, et conclure.[2]

**5.24 Exercice** (moyenne arithmético-géométrique)**.** Soient $x_{-1}, y_{-1} > 0$. Nous définissons par récurrence $x_n := \sqrt{x_{n-1}y_{n-1}}$ et $y_n := \dfrac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$, $\forall\, n \geq 0$. Nous nous proposons de montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 0}$, $(y_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.[3]

1. Montrer que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq 0$.
2. Montrer que $x_n \leq x_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$.
3. Montrer que $y_n \geq y_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$.
4. En déduire que $(x_n)$ et $(y_n)$ convergent.
5. A partir de la relation donnant $x_n$, en déduire que les deux suites ont la même limite, puis qu'elles sont adjacentes.

**5.25 Exercice.** Soit $x_n := (-1)^n$. Etudier les limites des sous-suites $(x_{2n})$ et $(x_{2n+1})$, et de la suite $(x_n)$.

**5.26 Exercice** (limite de la suite des puissances)**.** Etudier l'existence de la limite de la suite géométrique $(x^n)$, avec $x \in \mathbb{R}$ fixé.

**5.27 Exercice** $(1/\pm 0)$**.** Soit $(x_n)$ une suite telle que :

1. $x_n \neq 0$, $\forall\, n$.
2. $x_n \to 0$.
3. $(x_n)$ contient une infinité de termes positifs et une infinité de termes négatifs.

Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ n'a pas de limite.

**5.28 Exercice** (théorème de Leibniz, ou théorème des séries alternées)**.** Soit $(a_n)_{n\geq 1}$ une suite telle que $a_n \searrow 0$. Nous définissons la suite $b_n$ par la formule $b_n := a_0 - a_1 + a_2 - \cdots + (-1)^n a_n$. Nous nous proposons de montrer la convergence de la suite $(b_n)_{n\geq 1}$. Soient $x_n$, $y_n$ définies par $x_1 := b_1$, $x_2 := b_3, \ldots, x_n := b_{2n-1}, \ldots$, $y_1 := b_2$, $y_2 := b_4, \ldots, y_n := b_{2n}, \ldots$

Montrer que les suite $(x_n)$, $(y_n)$ sont adjacentes, et conclure.

**5.29 Exercice** (les séries absolument convergentes sont convergentes)**.**
*Hypothèses.* $(b_n)$ suite de nombre positifs telle que $\exists M$ tel que $b_1+\cdots+b_n \leq M$, $\forall\, n$. $(a_n)$ suite bornée.

Nous posons $x_n := a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$.

*Conclusion.* La suite $(x_n)$ converge.
Stratégie de preuve :

1. Soit $y_n := b_1+\cdots+b_n$. Montrer que la suite $(y_n)$ est convergente. En déduire qu'elle est de Cauchy.
2. Montrer, avec $C > 0$ convenable, l'inégalité $|x_n - x_m| \leq C|y_n - y_m|$, $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$.
3. En déduire que $(x_n)$ est une suite de Cauchy, et conclure.

---

1. La limite $\gamma$ de cette suite est la *constante d'Euler*.
2. Pour étudier la monotonie des deux suites, on pourra appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction ln.
3. Leur limite commune est la *moyenne arithmético-géométrique* de $x_{-1}$ et $y_{-1}$.

# Chapitre 6

# Plus sur les limites

## Guide

Dans ce chapitre, nous montrons quelques résultats auxiliaires utilisés dans les preuves des grands théorèmes. Au passage, nous établissons de nouvelles propriétés intéressantes des limites.

## Retour sur les limites

Nous avons vu que la continuité de $f$ en $y$ s'exprime en termes de $\varepsilon$ et $\delta$. Il en va de même pour la limite $l = \lim_{x\to y} f(x)$, avec des variantes lorsque $l = \pm\infty$ ou $y = \pm\infty$.

**6.1 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A' \cap A \cap \mathbb{R}$. $l \in \mathbb{R}$.

*Conclusion.* Nous avons

$$\lim_{x\to y} f(x) = l \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } |f(x) - l| < \varepsilon \text{ si } x \in A \setminus \{y\} \text{ et } |x - y| < \delta.$$

*Démonstration.* Il suffit de reprendre la preuve de la Proposition 4.9. □

Exercice 6.21.

Continuons par examiner le lien entre limite en un point et la continuité.

**6.2 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A' \cap A$.

*Conclusion.* $f$ continue en $y \iff \lim_{x\to y} f(x) = f(y)$.

Cas particulier : si $I$ est un intervalle non dégénéré, alors

$$f : I \to \mathbb{R} \text{ est continue} \iff \lim_{x\to y} f(x) = f(y),\ \forall\, y \in I.$$

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$x \in A,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

En particulier,

$$x \in A \setminus \{y\},\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Nous concluons grâce à la Proposition 6.1.
« $\Longleftarrow$ » Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$x \in A \setminus \{y\},\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que

$$x \in A,\ |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Preuve du cas particulier : si $I$ est un intervalle non dégénéré, alors $y \in I \implies y \in I'$. Nous pouvons donc utiliser, en $y \in I$, la première partie de la proposition. □

# Changement de variable dans une limite

Considérons une limite de la forme $\lim\limits_{x \to y} f(x)$, avec $f : A \to \mathbb{R}$ et $y \in A'$. Un *changement de variables* est une substitution de la forme $x = g(z)$. Ici,

$$g : B \setminus \{t\} \to A \setminus \{y\} \text{ et bijective, et } \lim_{x \to y} g^{-1}(x) = t. \tag{6.1}$$

Exemple typique : $g : ]0, \infty[ \to ]0, \infty[$, $g(z) = \dfrac{1}{z}$, de sorte que $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$, et $\lim_{x \to 0} g^{-1}(x) = \infty$. Ainsi, $g$ est un changement de variables correspondant à $y = 0$, $t = \infty$.

**6.3 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $g$ vérifie (6.1). $\exists \lim_{z \to t} f(g(z)) = l$.

*Conclusion.* $\exists \lim_{x \to y} f(x) = l$.

*Démonstration.* Soit $(x_n) \subset A \setminus \{y\}$ telle que $x_n \to y$. Soit $z_n := g^{-1}(x_n)$, de sorte que $z_n \in B \setminus \{t\}$ et ☞ $z_n \to t$. Alors $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = \lim\limits_{n \to \infty} f(g(z_n)) = l$. □

✍ Exercice 6.22.

# Comment nier $x_n \to l$

**6.4 Proposition.** Soient $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Nous avons

$$x_n \not\to l \iff \exists (x_{n_k}) \text{sous-suite, } \exists L \neq l \text{ tels que } x_{n_k} \to L.$$

*Démonstration.* Etudions le cas où $l \in \mathbb{R}$. Alors

☞ $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall m$, $\exists n \geq m$ tel que $|x_n - l| \geq \varepsilon$.

Soit $m := 0$. Soit $m_0 \geq 0$ tel que $|x_{m_0} - l| \geq \varepsilon$. Soit $m := m_0 + 1$. Soit $m_1 \geq m > m_0$ tel que $|x_{m_1} - l| \geq \varepsilon$. Par récurrence, nous construisons une suite extraite $(x_{m_p})_{p \geq 0}$ telle que $|x_{m_p} - l| \geq \varepsilon$, $\forall p$. La suite $(x_{m_p})$ contient une sous-suite qui converge vers un $L \in \overline{\mathbb{R}}$. Notons cette nouvelle suite $(x_{n_k})$. Alors ☞ $(x_{n_k})$ est une sous-suite de $(x_n)$, ☞ $|x_{n_k} - l| \geq \varepsilon$, $\forall k$, et $x_{n_k} \to L$. Par passage à la limite dans l'inégalité $|x_{n_k} - l| \geq \varepsilon$, nous avons $|L - l| \geq \varepsilon$, d'où $L \neq l$. □

✍ Examiner le cas où $l = \pm\infty$.
✍ Exercices 6.23-6.24.

## Variantes du théorème des gendarmes

Une liste non exhaustive...

**6.5 Proposition.**
*Hypothèses.* $x_n \ge y_n$. $y_n \to \infty$.

*Conclusion.* $x_n \to \infty$.

**6.6 Proposition.**
*Hypothèses.* $x_n \le y_n$. $y_n \to -\infty$.

*Conclusion.* $x_n \to -\infty$.

**6.7 Proposition.**
*Hypothèses.* $f, g, h : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $f(x) \in [g(x), h(x)]$. $\lim_{x\to y} g(x) = \lim_{x\to y} h(x) = l$.

*Conclusion.* $\lim_{x\to y} f(x) = l$.

**6.8 Proposition.**
*Hypothèses.* $f, g : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $f(x) \ge g(x)$. $\lim_{x\to y} g(x) = \infty$.

*Conclusion.* $\lim_{x\to y} f(x) = \infty$.

**6.9 Proposition.**
*Hypothèses.* $f, g : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $f(x) \le g(x)$. $\lim_{x\to y} g(x) = -\infty$.

*Conclusion.* $\lim_{x\to y} f(x) = -\infty$.

Une autre forme de ce théorème est particulièrement utile pour montrer qu'une limite vaut 0.

**6.10 Proposition.**
*Hypothèses.* $|x_n| \le y_n$. $y_n \to 0$.

*Conclusion.* $x_n \to 0$.

**6.11 Proposition.**
*Hypothèses.* $f, g : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $|f(x)| \le g(x)$. $\lim_{x\to y} g(x) = 0$.

*Conclusion.* $\lim_{x\to y} f(x) = 0$.

Deux preuves au hasard.

*Preuve de la Proposition 6.5.* Soit $M \in \mathbb{R}$. Soit $n_0$ tel que $y_n > M$, $\forall n \ge n_0$. Alors $x_n > M$, $\forall n \ge n_0$. □

*Preuve de la Proposition 6.11.* Soit $(x_n) \subset A \setminus \{y\}$ telle que $x_n \to y$. Alors $g(x_n) \to 0$. Comme $-g(x_n) \le f(x_n) \le g(x_n)$, nous obtenons, grâce au théorème des gendarmes, $f(x_n) \to 0$. □

Montrer les autres propositions.

## Prolongement par continuité

**6.12 Proposition** (prolongement par continuité)**.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $y \notin A$. $\lim\limits_{x \to y} f(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$.
On définit $B := A \cup \{y\}$ et

$$\widetilde{f} : B \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A \\ l, & \text{si } x = y \end{cases}.$$

*Conclusions.*

1. $\widetilde{f}$ est continue en $y$.
2. Si, de plus, $f$ est continue, alors $\widetilde{f}$ est continue.
3. Si, de plus, $f$ est dérivable sur $A$, alors $\widetilde{f}$ est dérivable sur $A$ et nous avons $\widetilde{f}' = f'$ sur $A$.

*Démonstration. Etape* 1. Preuve de 1.
Comme $y \in A'$ et $B \supset A$, il s'ensuit que $y \in B'$. Par ailleurs, nous avons

$$\lim_{x \to y} \widetilde{f}(x) = \lim_{x \to y} f(x) = l = \widetilde{f}(y).$$

Nous concluons grâce à la Proposition 6.2.
*Etape* 2. Preuve de 2.
Grâce à la première étape, il suffit de montrer que $\widetilde{f}$ est continue en tout point $z \in A$. Soient $z \in A$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$|f(x) - f(z)| < \varepsilon \text{ si } x \in A \text{ et } |x - z| < \delta.$$

Supposons, par exemple, que $z < y$. Alors, quitte à diminuer $\delta$, nous avons $z + \delta < y$. Nous trouvons :

$$x \in B,\ |x - z| < \delta \implies x < z + \delta < y \implies x \in A.$$

Il s'ensuit que

$$x \in B,\ |x - z| < \delta \implies |\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(z)| = |f(x) - f(z)| < \varepsilon.$$

*Etape* 3. Preuve de 3.
Soient $z \in A$ et $\varepsilon > 0$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$\left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} - f'(z) \right| < \varepsilon \text{ si } x \in A \setminus \{z\} \text{ et } |x - z| < \delta.$$

En raisonnant comme dans le preuve de la propriété *2*, nous avons (quitte à diminuer $\delta$)

$$x \in B \setminus \{z\},\ |x - z| < \delta \implies \left| \frac{\widetilde{f}(x) - \widetilde{f}(z)}{x - z} - f'(z) \right| = \left| \frac{f(x) - f(z)}{x - z} - f'(z) \right| < \varepsilon.$$

□

✍ Exercice 6.25.

**6.13 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A' \cap A \cap \mathbb{R}$. $l \in \mathbb{R}$.

*Conclusion.*

$$f'(y) = l \iff f(x) = f(y) + (x-y)\widetilde{f}(x), \text{ où } \widetilde{f}(y) = l \text{ et } \widetilde{f} \text{ est continue en } y.$$

Ou encore :

$$f'(y) = l \iff f(x) = f(y) + (x-y)\widetilde{f}(x), \text{ où } (x_n) \subset A,\ x_n \to y \implies \widetilde{f}(x_n) \to l.$$

La fonction $\widetilde{f}$ est donnée par la formule

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}, & \text{si } x \neq y \\ l, & \text{si } x = y \end{cases}. \tag{6.2}$$

*Démonstration.* « $\implies$ » En utilisant la définition $f'(y)$ et la Proposition 6.12 (avec $f(x) \rightsquigarrow \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$), nous avons $\widetilde{f}$ continue en $y$. Par ailleurs, l'identité $f(x) = f(y) + (x-y)\widetilde{f}(x)$ est claire.
« $\impliedby$ » Pour $x \neq y$, nous avons $\widetilde{f}(x) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ si $x \neq y$. En utilisant l'Exercice 6.25, nous avons $\lim\limits_{x\to y} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = l$, d'où $f'(y) = l$. □

# Limites latérales

**6.14 Définition.** Soient $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ et $y \in \overline{\mathbb{R}}$. Soient :

1. $B := A \cap ]-\infty, y[$ et $C := A \cap ]y, \infty[$.
2. $f_B$ la restriction de $f$ à $B$ et $f_C$ la restriction de $f$ à $C$.

Si $y \in B'$, alors la limite $l_B := \lim\limits_{x\to y} f_B(x)$ a un sens. Si cette limite existe, alors c'est *la limite à gauche* de $f$ en $y$, notée $\lim\limits_{x\nearrow y} f(x)$ ou $\lim\limits_{x\to y-} f(x)$.

Nous définissons de même la *limite à droite*.

Une *limite latérale* est une limite à gauche ou à droite.

**6.15 Proposition.**

$$\lim_{x\to y} f(x) = l \implies \lim_{x\to y\pm} f(x) = l. \tag{6.3}$$

$$\lim_{x\to y-} f(x) = \lim_{x\to y+} f(x) = l \implies \lim_{x\to y} f(x) = l. \tag{6.4}$$

L'énoncé complet de cette proposition est plus long.
Enoncé complet de (6.3).

*Hypothèses.* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. $y \in A'$. $\exists \lim\limits_{x\to y} f(x)$. $y \in (A \cap ]-\infty, y[)'$.

*Conclusions.* $\exists \lim\limits_{x\to y-} f(x)$, et cette limite vaut $l$. Enoncé similaire pour la limite à droite.

Enoncé complet de (6.4).

*Hypothèses.* $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. $y \in (A\cap]-\infty, y[)'$. $y \in (A\cap]y,\infty[)'$. $\exists \lim\limits_{x\to y\pm} f(x) = l$.

*Conclusions.* $\exists \lim\limits_{x\to y} f(x)$, et cette limite vaut $l$.

*Démonstration.* *Etape 1.* Preuve de (6.3).
Considérons par exemple le cas de la limite à droite. Soit $(x_n) \subset A\cap]y,\infty[$ telle que $x_n \to y$. Alors $(x_n) \subset A$ et $x_n \to y$, d'où $f(x_n) \to l$.

*Etape 2.* Preuve de (6.4).
Plusieurs cas sont à considérer : $l \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$. Considérons par exemple le cas où $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soient $\delta_1, \delta_2$ tels que :

$$x \in A\cap]y,\infty[,\ |x-y| < \delta_1 \implies |f(x)-l| < \varepsilon \text{ et } x \in A\cap]-\infty, y[,\ |x-y| < \delta_2 \implies |f(x)-l| < \varepsilon.$$

Soit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Alors

☞ $$x \in A \setminus \{y\},\ |x-y| < \delta \implies |f(x)-l| < \varepsilon.$$ □

✍ Examiner les autres cas dans la preuve de (6.4). Exercice 6.26.

## Fonctions monotones

**6.16 Proposition.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$ croissante. $y \in (A\cap]y,\infty[)' \cap A$.

*Conclusions.* $\exists \lim\limits_{x\searrow y} f(x)$, et cette limite vaut $\inf\limits_{x>y} f(x)$. De plus, nous avons $\lim\limits_{x\searrow y} f(x) \geq f(y)$.
Conclusions analogues lorsque $f$ est décroissante et/ou la limite est à droite.

*Démonstration.* Soit $m := \inf\limits_{x>y} f(x)$. Nous avons $f(x) \geq f(y) \in \mathbb{R}$, $\forall\, x > y$, ☞ d'où $m \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$.

Soit $x > y$ tel que $f(x) < m + \varepsilon$. Soit $(x_n) \subset A\cap]y,\infty[$ telle que $x_n \to y$. Alors ☞ il existe $n_0$ tel que $x_n < x$, $\forall\, n \geq n_0$, d'où

☞ $$m - \varepsilon < m \leq f(x_n) \leq f(x) < m + \varepsilon, \quad \forall\, n \geq n_0.$$ □

**6.17 Proposition.**
*Hypothèse.* $f : I \to \mathbb{R}$ monotone.

*Conclusion.* On a

$$f \text{ continue} \iff f(I) \text{ est un intervalle.}$$

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » suit du théorème des valeurs intermédiaires.

« $\Longleftarrow$ » Soit $y \in I = \wr a,b \wr$. Plusieurs cas sont à considérer : $y = a$, $y = b$, $y \in ]a,b[$, $f$ croissante, $f$ décroissante. Supposons par exemple $y \in ]a,b[$ et $f$ croissante. Alors nous avons

$$\lim_{x \nearrow y} f(x) = \sup_{x<y} f(x) \leq f(y) \leq \inf_{x>y} f(x) = \lim_{x>y} f(x). \tag{6.5}$$

Au vu de la Proposition 6.15, la continuité de $f$ en $y$ suit si nous avons partout des égalités dans (6.5). Preuve par l'absurde : Supposons, par exemple, que nous avons $f(y) < m := \inf_{x>y} f(x)$. Soit $c \in ]f(x), m[$ et soit $z \in I$ tel que $z > x$. Alors $f(x) < c < f(z)$, et donc $c \in f(I)$. Par ailleurs, nous avons $f(t) \geq m > c$ si $t > x$ et $f(t) \leq f(x) < c$ si $t \leq x$. Il s'ensuit que $c \notin f(I)$. □

Examiner les autres cas.

## Caractérisation du sup

**6.18 Proposition.** Nous avons

$$M = \sup A \Longleftrightarrow M \text{ majorant de } A \text{ et } \exists (x_n) \subset A \text{ telle que } x_n \to M. \tag{6.6}$$

*Démonstration.* Si $M = -\infty$, alors $A = \{-\infty\}$. Ce cas est laissé en exercice. Supposons que $M > -\infty$.

« $\Longrightarrow$ » Considérons une suite $(M_n) \subset \mathbb{R}$ telle que $M_n > M$ et $M_n \nearrow$. ( Construire une telle suite.) Alors il existe $x_n \in A$ tel que $x_n > M_n$. Nous obtenons $M_n < x_n \leq M$. Le théorème des gendarmes implique $x_n \to M$.

« $\Longleftarrow$ » Soit $M'$ un majorant de $A$. Alors $x_n \leq M'$, $\forall n$, d'où $M = \lim x_n \leq M'$. □

## Règle de l'Hôpital $\infty/\infty$

**6.19 Théorème** (règle de l'Hôpital $\infty/\infty$)**.**
*Hypothèses.* $f : I \to \mathbb{R}$. $g : I \to \mathbb{R}^*$. $f$ et $g$ dérivables. $g' \neq 0$. $y \in I'$. $\exists \lim\limits_{x\to y} f(x) \in \{-\infty, \infty\}$. $\exists \lim\limits_{x\to y} g(x) \in \{-\infty, \infty\}$. $\exists\, l := \lim\limits_{x\to y} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.
*Conclusions.* $\exists \lim\limits_{x\to y} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ et cette limite vaut $l$.

*Démonstration.* L'hypothèse $g'(x) \neq 0$ implique $g$ strictement monotone sur chacun des intervalles $I \cap ]-\infty, y[$ et $I \cap ]y, \infty[$. Plusieurs cas sont à considérer : $y \in \mathbb{R}$, $y = \pm\infty$, $\lim_{x\to y} g(x) = \infty$ ou $-\infty$, $l \in \mathbb{R}$, $l = \pm\infty$. Considérons par exemple le cas où $y = \infty$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ (d'où $g$ strictement croissante) et $l \in \mathbb{R}$. Soit $M_1$ tel que

$$l - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < l + \varepsilon, \quad \forall x > M_1.$$

Soit $M_2$ tel que

$$g(x) > 0, \quad \forall x > M_2.$$

Soit $M_3 := \max\{M_1, M_2\}$.

Soit $x > M_3$. Soit $y_n \in ]M_3+1, x_n[$ tel que

$$l-\varepsilon < \frac{f(x_n)-f(M_3+1)}{g(x_n)-g(M_3+1)} = \frac{f'(y_n)}{g'(y_n)} < l+2\varepsilon.$$

Nous obtenons

$$l-\varepsilon+\frac{f(M_3+1)-(l-\varepsilon)g(M_3+1)}{g(x)} < \frac{f(x)}{g(x)} < l+\varepsilon+\frac{f(M_3+1)-(l+\varepsilon)g(M_3+1)}{g(x)}.$$

Comme

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(M_3+1)-(l-\varepsilon)g(M_3+1)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f(M_3+1)-(l+\varepsilon)g(M_3+1)}{g(x)} = 0,$$

nous obtenons l'existence d'un $M \geq M_3$ tel que

$$l-2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l+2\varepsilon, \quad \forall\, x > M.$$

Nous concluons grâce au principe $2\varepsilon$. □

Examiner les autres cas.

Nous ne sommes pas servis du fait que $\lim_{x\to y} g(x) = \pm\infty$, ni même de l'existence de cette limite. Nous venons donc d'établir la règle de l'Hôpital $?/\pm\infty$.

# Caractérisation des intervalles

**6.20 Proposition.** Nous avons

$$J \subset \overline{\mathbb{R}} \text{ intervalle} \iff ]a,b[\subset J, \quad \forall\, a,b \in J \text{ tels que } a \neq b.$$

*Démonstration.* « $\Longrightarrow$ » est claire.

« $\Longleftarrow$ » Nous pouvons supposer $J$ non vide. Soient $m := \inf J$ et $M := \sup J$. Nous avons $J \subset [m,M]$. Nous allons montrer que $J \supset ]m,M[$, ce qui donne $J = \wr m, M \int$ et la conclusion voulue.

Soit $c \in ]m,M[$. Alors $c < M$, d'où il existe $b \in J$ tel que $b < M$. De même, il existe $a \in J$ tel que $a < c$. Nous avons $c \in ]a,b[$, d'où $c \in J$. □

# Exercices

**6.21 Exercice.** Soient $f : A \to \mathbb{R}$ et $y \in A'$. Soit $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que :

1. Si $y \in \mathbb{R}$ et $l = \infty$, alors

$$\lim_{x\to y} f(x) = \infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } f(x) > M \text{ si } |x-y| < \delta.$$

2. Si $y = \infty$ et $l = \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M \text{ tel que } |f(x)-l| < \varepsilon \text{ si } x > M.$$

3. Caractériser le fait que $\lim_{x\to y} f(x) = l$ dans les autres situations où au moins l'un des $y$ et $l$ n'est pas fini.

**6.22 Exercice.** Donner un sens à l'égalité $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(-x)$.

**6.23 Exercice.** De la preuve de la Proposition 6.4, déduire le fait suivant : si $x_n \not\to l \in \mathbb{R}$, alors il existe $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(x_{n_k})$ tels que $|x_{n_k} - l| \geq \varepsilon$, $\forall\, k$.

**6.24 Exercice.** Soient $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Supposons que

$$\forall\,(x_{n_k}),\ \exists (x_{n_{k_p}}) \text{ telle que } x_{n_{k_p}} \to l.$$

Alors $x_n \to l$.

**6.25 Exercice** (réciproque du prolongement par continue)**.**
*Hypothèses.* $f : A \to \mathbb{R}$. $y \in A'$. $y \notin A$. $B := A \cup \{y\}$.

$$\widetilde{f} : B \to \mathbb{R},\ \widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in A \\ l, & \text{si } x = y \end{cases} \quad \text{est continue.}$$

*Conclusions.* $\exists \lim_{x\to y} f(x)$, et cette limite vaut $l$.

**6.26 Exercice.** Nous nous proposons de prouver (6.4) par une méthode différente de celle présentée dans la preuve de la Proposition 6.15. Boîte noire : toute partie infinie $B$ de $\mathbb{N}$ s'écrit comme

$$B = \{n_0 < n_1 < n_2 < \ldots\}.$$

1. Soit $(x_n) \subset A \setminus \{y\}$. En considérant les ensembles

$$B := \{n \in \mathbb{N};\, x_n < y\},\ C := \{n \in \mathbb{N};\, x_n > y\}$$

(qui peuvent être finis ou infinis), montrer que :
– Soit il existe $n_0$ tel que $x_n < y$, $\forall\, n \geq n_0$.
– Soit il existe $n_0$ tel que $x_n > y$, $\forall\, n \geq n_0$.
– Soit il existe deux sous-suites $(x_{\varphi_1(n)})$ et $(x_{\varphi_2(n)})$, avec $x_{\varphi_1(n)} < y$, $x_{\varphi_2(n)} > y$ et $\mathbb{N} = \varphi_1(\mathbb{N}) \cup \varphi_2(\mathbb{N})$.

2. En déduire (6.4).

# Chapitre 7

# Fonctions et nombres remarquables

## Guide

La fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ peut être définie de plusieurs façons :

1. Soit on définit d'abord le nombre $e$, puis $e^m$, avec $m$ entier, puis $e^{m/n}$, avec $m/n$ rationnel, puis, par passage à la limite, $e^x$.
2. Soit on définit d'abord le logarithme (naturel) et on définit par la suite l'exponentielle comme la réciproque du logarithme.
3. Soit on définit l'exponentielle comme la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$ et $f(0) = 1$ (encore faut-il montrer qu'une telle fonction existe).

De même, on peut définir le logarithme $x \mapsto \ln x$, $x > 0$

1. Soit comme la réciproque de l'exponentielle.
2. Soit comme $x \mapsto \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,dt$, $x > 0$ (c'est-à-dire comme la fonction $F : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ telle que $F(1) = 0$ et $F'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\ x > 0$).

De même, plusieurs définitions sont possibles pour sin, cos et les nombres $e$ et $\pi$.

Nous allons montrer dans la suite que toutes les définitions de l'exponentielle, logarithme, etc., sont équivalentes, et surtout que ces fonctions et nombres existent bien !

Pour montrer l'équivalence des définitions possibles, nous utilisons trois boîtes noires :

1. Le théorème de Leibniz-Newton), c'est-à-dire : si $f : I \to \mathbb{C}$ et continue, si $x_0 \in I$ et si $C \in \mathbb{C}$, alors il existe une (unique) $F : I \to \mathbb{C}$ telle que $F' = f$ et $F(x_0) = C$. La fonction $F$ est notée $x \mapsto C + \displaystyle\int_{x_0}^x f(t)\,dt$.
2. La formule de la longueur du graphe : si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable de dérivée continue, alors la longueur du graphe de $f$ est $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$.
3. La formule de l'aire comprise entre deux graphes : si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont continues, alors l'aire comprise entre les graphes de $f$ et $g$ est $\displaystyle\int_a^b (g(t) - f(t)\,dt$.

## Exponentielle et logarithme

Quelques notations : pour $h \geq 0$, $N \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ et $M \in \mathbb{N}$ tels que $N < M$, nous posons

$$R_{N,M}(h) := \sum_{n=N+1}^{M} \frac{h^n}{n!},\ R_N(h) := \sup R_{N,M}(h) = \lim_{M \to \infty} R_{N,M}(h)$$

(la dernière égalité se justifie par le fait que, à $h$ et $N$ fixés, la suite $(R_{N,M}(h))_{M>N}$ est croissante).

**7.1 Lemme.** Soit $h \geq 0$. Alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h^n}{n!} = 0$.

*Démonstration.* Soit $N > h$ (par exemple, soit $N = E(h)+1$). Pour $n > N$, nous avons

$$0 \leq \frac{h^n}{n!} = \frac{h^N}{N!}\frac{h^{n-N}}{(N+1)\cdot\ldots\cdot n} \leq \frac{h^N}{N!}\left(\frac{h}{N+1}\right)^{n-N} \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

On conclut grâce au théorème des gendarmes. □

**7.2 Lemme.**
1. Pour tout $h$ et $N$, nous avons $R_N(h) < \infty$.
2. Nous avons, pour $h$ fixé, $\lim_{N\to\infty} R_N(h) = 0$.

*Démonstration.* On note d'abord que, si $N_1 < N_2$, alors $R_{N_1}(h) = R_{N_2}(h) + \sum\limits_{n=N_1+1}^{N_2} \dfrac{h^n}{n!}$. Ainsi, $R_{N_1}(h)$ est un nombre fini $\Longleftrightarrow$ $R_{N_2}(h)$ l'est. Donc, pour montrer *1*, il suffit de trouver une valeur de $N$ telle que $R_N(h)$ soit fini. On choisit $N > h$. Alors

$$\begin{aligned} R_{N,M}(h) &= \frac{h^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{n=N+1}^{M}\frac{h^{n-N-1}}{(N+2)\cdot\ldots\cdot n} \\ &\leq \frac{h^{N+1}}{(N+1)!}\sum_{n=N+1}^{M}\left(\frac{h}{N+2}\right)^{n-N-1} \leq \frac{h^{N+1}}{(N+1)!(1-h/(N+2))}. \end{aligned}$$

On trouve que

$$0 \leq R_N(h) \leq \frac{h^{N+1}}{(N+1)!(1-h/(N+2))} \text{ si } N > h. \tag{7.1}$$

Si on fait, dans cette inégalité et à $h$ fixé, $N \to \infty$, on trouve, grâce au théorème des gendarmes et au lemme précédent, la conclusion de *2*. □

**7.3 Définition.** Soit $(z_n) \subset \mathbb{C}$. On dit que la suite $(z_n)$ converge si la suite des parties réelles des $z_n$ et la suite des parties imaginaires des $z_n$ convergent.

**7.4 Remarque.** On vérifie aisément qu'une suite de nombres complexes converge $\Longleftrightarrow$ elle est de Cauchy.

**7.5 Proposition.** Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N}\dfrac{z^n}{n!}\right)_{N\geq 0}$ converge.

*Démonstration.* Soient $N, M \in \mathbb{N}$. On suppose, par exemple, que $N < M$. Alors

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{M}\frac{z^n}{n!}\right| \leq R_{N,M}(|z|) \leq R_N(|z|).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Le Lemme 7.2 implique qu'il existe un $N_0$ tel que $R_N(|z|) < \varepsilon$ si $N \geq N_0$. On trouve que, si $N, M \geq N_0$, alors

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{z^n}{n!} - \sum_{n=0}^{M}\frac{z^n}{n!}\right| < \varepsilon.$$

Il s'ensuit que la suite $\left(\sum\limits_{n=0}^{N}\dfrac{z^n}{n!}\right)_{N\geq 0}$ est de Cauchy, donc convergente. □

**7.6 Définition.** La proposition précédente nous permet de définir :

1. La fonction exponentielle par la formule $e^z := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$.
2. En particulier, $e^x := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Les fonctions sin et cos par les formules $\sin x := \operatorname{Re}(e^{\imath x})$, $\cos x := \operatorname{Im}(e^{\imath x})$, $x \in \mathbb{R}$.
4. Le nombre $e$ par $e := e^1 = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$.

**7.7 Proposition.** Nous avons $e^{z+w} = e^z e^w$, $\forall\ z, w \in \mathbb{C}$.

*Démonstration.* Il suffit de montrer que

$$\lim_{N\to\infty,\ N \text{ impair}} \left( \underbrace{\sum_{k=0}^{N} \frac{z^k}{k!} \sum_{l=0}^{N} \frac{w^l}{l!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!}}_{A(N)} \right) = 0.$$

Nous partons de l'identité

$$A(N) = \underbrace{\sum_{k+l\le N} \frac{z^k}{k!}\frac{w^l}{l!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(z+w)^n}{n!}}_{B(N)} + \underbrace{\sum_{k+l>N, k\le N, l\le N} \frac{z^k}{k!}\frac{w^l}{l!}}_{C(N)}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k+l\le N} \frac{z^k}{k!}\frac{w^l}{l!} &= \sum_{L=0}^{N}\sum_{k=0}^{L} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{L-k}}{(L-k)!}\\ &= \sum_{L=0}^{N}\sum_{k=0}^{L} \frac{1}{L!}\sum_{k=0}^{L} C_L^k z^k w^{L-k} = \sum_{L=0}^{N} \frac{(z+w)^L}{L!}\end{aligned}$$

(par la formule du binôme), de sorte que $B(N) = 0$, et donc $A(N) = C(N)$. On est ramené à prouver que $\lim_{N\to\infty,\ N \text{ impair}} C(N) = 0$. Pour ce faire, notons que, si $k + l \ge N + 1$, alors ou bien $k \ge \frac{N+1}{2}$, ou bien $l \ge \frac{N+1}{2}$. Grâce au Lemme 7.2, nous trouvons

$$\begin{aligned}|C(N)| &\le \sum_{k=(N+1)/2}^{N}\sum_{l=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!}\frac{|w|^l}{l!} + \sum_{l=(N+1)/2}^{N}\sum_{k=0}^{N} \frac{|z|^k}{k!}\frac{|w|^l}{l!}\\ &= R_{(N+1)/2,N}(|z|)R_{-1,N}(|w|) + R_{(N+1)/2,N}(|w|)R_{-1,N}(|z|)\\ &\le R_{(N+1)/2}(|z|)e^{|w|} + R_{(N+1)/2}(|w|)e^{|z|} \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty.\end{aligned}$$

□

**7.8 Corollaire.** Nous avons $e^z \ne 0$ et $\frac{1}{e^z} = e^{-z}$, $\forall\ z \in \mathbb{C}$.

*Démonstration.* Il suffit de noter que $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$. □

**7.9 Théorème** (Propriétés de l'exponentielle)**.** Soit $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp(x) := e^x$. Alors :

1. $\exp(0) = 1$.

2. $\exp(x) > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
3. exp est dérivable et $\exp' = \exp$. En particulier, exp est continue.
4. exp est strictement croissante et $\exp(\mathbb{R}) = ]0, \infty[$.

*Démonstration. Etape 1. 1* est claire.
*Etape 2.*Preuve de *2*.
Si $x \geq 0$, alors $\exp(x) \geq 1 > 0$ (car $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \geq 1$). Si $x < 0$, alors $1 = \exp(0) = \exp(x)\exp(-x)$, d'où $\exp(x) = 1/\exp(-x) > 0$.
*Etape 3.* Preuve de *3*.
Nous avons

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h)-\exp(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(x)\exp(h)-\exp(x)}{h} = \exp(x)\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h}.$$

On est ramené à montrer que $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$. Nous avons $\exp(h) - 1 - h = \displaystyle\lim_{M\to\infty} R_{1,M}(h)$, d'où

$$\left|\frac{\exp(h)-1}{h} - 1\right| \leq \lim_{M\to\infty} \frac{R_{1,M}(|h|)}{|h|} = \frac{R_1(|h|)}{h}.$$

L'inégalité (7.1) donne $R_1(|h|) < \dfrac{|h|^2}{2-2|h|/3}$ si $|h| < 1$, d'où $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{\exp(h)-1}{h} = 1$.
*Etape 4.* Preuve de *4*.
Comme $\exp' = \exp > 0$, la fonction exp est strictement croissante et continue. Son image est alors l'intervalle $]a, b[$, où $a = \displaystyle\inf_{x\in\mathbb{R}} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \exp(x)$ et $b = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \exp(x) = \lim_{x\to+\infty} \exp(x)$. D'une part, nous avons $\exp(x) \geq 1 + x$ si $x \geq 0$ (cette inégalité s'obtient faisant $N \to \infty$ dans $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{x^n}{n!} \geq 1 + x$, $N \geq 1$). Ceci entraîne $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \exp(x) = +\infty$, et donc $b = +\infty$. D'autre part, nous avons $a = \displaystyle\lim_{x\to-\infty} \exp(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\exp(-x)} = \frac{1}{b} = 0$. □

**7.10 Définition.** De ce qui précède, nous pouvons définir la fonction réciproque de l'exponentielle : c'est le logarithme (naturel) $\ln : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$, $\ln = (\exp)^{-1}$.

**7.11 Théorème** (Propriétés du logarithme)**.** Nous avons

1. $\ln 1 = 0$.
2. ln est dérivable et $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.
3. Si $n \in \mathbb{N}^*$ et si $x > 0$, alors $x^n = \exp(n \ln x)$.

*Démonstration. Etape 1.* Preuve de *1.*
Nous avons $\exp(0) = 1$, d'où $\ln 1 = 0$.
*Etape 2.* Preuve de *2*.
La fonction exp étant dérivable de dérivée qui ne s'annule pas, sa fonction réciproque est dérivable et $\ln'(x) = \dfrac{1}{\exp'(\ln x)} = \dfrac{1}{\exp(\ln x)} = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.
*Etape 3.* Preuve de *3*.
Nous avons $x = \exp(\ln x)$, d'où $x^n = \underbrace{\exp(\ln x) \cdot \ldots \cdot \exp(\ln x)}_{n \text{ fois}} = \exp(n \ln x)$ (preuve rigoureuse par récurrence sur $n$). □

**7.12 Corollaire** (Unicité du logarithme)**.** Si nous définissons le logarithme
*1.* Comme la primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x > 0$, qui vaut 0 en 1 (càd $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$).
Ou
*2.* Comme la réciproque de l'exponentielle,
alors les deux fonctions ainsi définies coïncident.

En particulier, la fonction $x \mapsto \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$, $x > 0$, est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $\mathbb{R}$.

*Démonstration.* De par la théorème précédent, les fonctions données par *1* et *2* ont la même dérivée sur $]0,+\infty[$ et coïncident en $x = 1$. Elles sont donc égales sur $]0,+\infty[$. □

**7.13 Proposition** (Unicité de l'exponentielle)**.**
1. Nous avons $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$. En particulier, nous avons $e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
2. L'exponentielle est la seule fonction dérivable $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$, et $f(0) = 1$.

*Démonstration. Etape 1.* Preuve de *1*.
Notons d'abord que $\ln'(1) = 1$, d'où $\ln(1+h) = hg(h)$, avec $g$ continue en 0 et $g(0) = 1$. Nous avons $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right) = 1$. Ainsi, pour $x$ fixé et $n$ grand, nous avons $1 + \frac{x}{n} > 0$. Pour un tel $n$, nous trouvons

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(n \frac{x}{n} g(x/n)\right) \to \exp(x) \text{ quand } n \to \infty.$$

*Etape 2.* Preuve de *2*.
Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x)\exp(-x)$. Nous avons $g(0) = 1$ et $g'(x) = f'(x)\exp(-x) - f(x)\exp(-x) = 0$. Nous obtenons $g(x) \equiv 1$, d'où $f \equiv \exp$. □

**7.14 Corollaire.** Nous avons l'identité $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!}$.

## sin, cos

**7.15 Théorème** (Propriétés de sin et cos)**.**
1. Nous avons $\sin 0 = 0$ et $\cos 0 = 1$.
2. Nous avons $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.
3. Les fonctions sin et cos sont dérivables et nous avons $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.
4. Nous avons $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ et $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$.

*Démonstration. Etape 1.* Preuve de *1*.
Nous avons $1 = e^{\imath 0} = \cos 0 + \imath \sin 0$, d'où la conclusion.

*Etape 2.* Preuve de *2*.
Nous notons d'abord que les nombres $z := e^{\imath x}$ et $w := e^{-\imath x}$ sont conjugués si $x \in \mathbb{R}$ ; ceci découle des formules donnant ces nombres. Par ailleurs, nous avons $zw = e^0 = 1$. Nous trouvons $1 = zw = z\overline{z} = |z|^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

*Etape 3.* Preuve de *3*.
En copiant la preuve du point *3* du Théorème 7.9, nous obtenons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) := \exp(\imath x)$, est dérivable et $f' = \imath f$. En particulier, Re $f$ et Im $f$ (càd cos et sin) sont dérivables et $f' = \imath f$ devient $\cos' + \imath \sin' = \imath(\cos + \imath \sin)$, d'où $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$.

*Etape 4.* Preuve de *4*.

Pour prouver cette propriété, nous partons de

$$e^{\imath(x+y)} = e^{\imath x}e^{\imath y}, \tag{7.2}$$

nous utilisons la propriété $e^{\imath t} = \cos t + \imath \sin t$, et nous identifions dans (7.2) les parties réelles et imaginaires. □

**7.16 Proposition** (Unicité de cos et sin)**.** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables telles que $f(0) = 1$ et $g(0) = 0$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $f = \cos$ et $g = \sin$ ;
2. $f' = -g$ et $g' = f$ ;
3. $f^2 + g^2 = 1$, $f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)$, $g(x+y) = f(x)g(y) + g(x)f(y)$, et $g'(0) = 1$.

Autrement dit, les propriétés *1* et *3* (ou *1*, *2* et *4*) du théorème précédent déterminent de manière unique les fonctions cos et sin.

*Démonstration.* Nous avons déjà montré « *1* ⟹ *2* » et « *1* ⟹ *3* ».

*Etape 1.* « *2* ⟹ *1* ».

Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $F(x) := (f(x) + \imath g(x))(\cos x - \imath \sin x)$. Par calcul direct, nous avons $F' = 0$, d'où $F$ constante. Comme $F(0) = 1$, nous trouvons $(f + \imath g)(\cos - \imath \sin) = 1$, d'où $f + \imath g = 1/(\cos - \imath \sin) = \cos + \imath \sin$. Nous obtenons $f = \cos$ et $g = \sin$.

*Etape 2.* « *3* ⟹ *2* ».

Nous avons $f^2 + g^2 \equiv 1$, d'où (en dérivant) $2ff' + 2gg' \equiv 0$. En particulier, $2f(0)f'(0) + 2g(0)g'(0) = 0$, d'où $f'(0) = 0$.

Pour $h \neq 0$, nous avons

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - f(0)}{h} - g(x)\frac{g(h) - g(0)}{h}.$$

Pour $h \to 0$, nous trouvons $f'(x) = f'(0)f(x) - g'(0)g(x) = -g(x)$.

De même, à partir de l'identité

$$\frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f(x)\frac{g(h) - g(0)}{h} + g(x)\frac{f(h) - f(0)}{h}$$

nous trouvons $g'(x) = g'(0)f(x) + f'(0)g(x) = f(x)$. □

## Le nombre $\pi$ et son lien avec cos et sin

Le nombre $\pi$ peut être défini comme la demi-longueur du cercle unité (ou, de manière équivalente, comme la longueur du demi-cercle unité). Par ailleurs, nous pouvons voir $\pi$ comme le plus petit $x > 0$ tel que $\sin x = 0$, ou encore le double du premier $y > 0$ tel que $\cos y = 0$. Le but de cette partie est de voir que les trois définitions donnent le même nombre. Au passage, nous prouverons les propriétés connues de monotonie de cos et sin.

**7.17 Lemme.** Il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ayant en même temps les trois propriétés suivantes :

1. $f$ deux fois dérivable ;
2. $f'' < 0$ ;

3. $f \geq 0$.

*Démonstration.* Preuve par l'absurde. De *2*, la dérivée $f'$ est strictement décroissante. En particulier, $f'$ n'est pas constante, et il existe donc $a \in \mathbb{R}$ tel que $f'(a) \neq 0$. Supposons, par exemple, que $f'(a) > 0$. Soit $x < a$. Alors il existe un $c \in ]x,a[$ tel que $f(x) = f(a)+(x-a)f'(c)$. Comme $f'$ est décroissante, nous trouvons $f(x) \leq f(a)+(x-a)f'(a)$. En faisant $x \to -\infty$, nous obtenons $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, ce qui est incompatible avec $f \geq 0$. Le cas où $f'(a) < 0$ est traité de la même manière, en considérant $x > a$. □

**7.18 Lemme.** Nous avons $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

*Démonstration.* La définition de $e^z$ implique $e^{-\imath x} = \overline{e^{\imath x}}$, d'où la conclusion. □

**7.19 Proposition** (Définition de $\pi$ à partir du cos)**.** Il existe un plus petit $y > 0$ tel que $\cos y = 0$.
Ceci nous permet de définir $\pi := 2y$.

*Démonstration.* Montrons d'abord qu'il existe un $x > 0$ tel que $\cos x = 0$. Preuve par l'absurde : sinon, cos ne s'annule pas pour $x > 0$, d'où (par parité) cos ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. La fonction cos étant continue, il s'ensuit que cette fonction est de signe constant sur $\mathbb{R}$. Comme $\cos 0 = 1$, nous trouvons $\cos > 0$ dans $\mathbb{R}$. Par ailleurs, nous avons $\cos'' = (\cos')' = (-\sin') = -\cos$, d'où $\cos'' < 0$. Nous avons donc $\cos > 0$ et $\cos'' < 0$ ; impossible, d'après le Lemme 7.17.

Soit $A := \{x > 0; \cos x = 0\}$. Cet ensemble est non vide. Comme $\cos 0 = 1$ et cos est continue, il existe un $\delta > 0$ tel que $\cos x > 0$ si $x \in [0,\delta[$. Il s'ensuit que $\delta$ est un minorant de $A$. Soit maintenant $y := \inf A$, de sorte que $y \geq \delta > 0$ et $\cos x > 0$ si $x \in [0,y[$. Comme $y = \inf A$, il existe une suite $(y_n) \subset A$ telle que $y_n \to y$. Comme $\cos y_n = 0$, nous trouvons $\cos y = 0$. Ainsi, $y > 0$ est bien le plus petit $x > 0$ tel que $\cos x = 0$. □

**7.20 Proposition** (arcsin et ses propriétés)**.**

1. La fonction $\sin : [-\pi/2,\pi/2] \to [-1,1]$ est strictement croissante et bijective. Ceci nous permet de définir $\arcsin : [-1,1] \to [-\pi/2,\pi/2]$ comme la réciproque (continue) du sin sur $[-\pi/2,\pi/2]$.
2. arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\forall\ x \in ]-1,1[$.
3. Nous avons

$$\pi = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx. \tag{7.3}$$

*Démonstration. Etape 1.* Preuve de *1*.
Par parité, nous trouvons $\cos x > 0$ si $x \in ]-\pi/2,\pi/2[$, alors que $\cos(\pm\pi/2) = 0$. Compte tenu du fait que $\sin' = \cos$, nous trouvons que sin est strictement croissante sur $]-\pi/2,\pi/2[$ et donc (par continuité) sur $[-\pi/2,\pi/2]$. En particulier, $\sin(-\pi/2) < 0 = \sin 0 < \sin(\pi/2)$. Comme $\sin^2 + \cos^2 \equiv 1$, nous avons $\sin(\pm\pi/2) \in \{-1,1\}$, d'où $\sin(-\pi/2) = -1$ et $\sin(\pi/2) = 1$. En conclusion, sin est strictement croissante et bijective de $[-\pi/2,\pi/2]$ vers $[-1,1]$. Sa réciproque arcsin est continue et strictement croissante.
*Etape 2.* Preuve de *2*.
De ce qui précède, la fonction arcsin est continue. De plus, elle est dérivable dans les points de la forme $\sin x$, avec $\sin' x \neq 0$, càd de la forme $\sin x$, avec $x \in ]-\pi/2,\pi/2[$, càd sur $]-1,1[$. Si $a = \sin x \in ]-1,1[$, avec $x \in ]-\pi/2,\pi/2[$, alors $\arcsin'(a) = \dfrac{1}{\cos x}$. Or $\sin x = a$ et $x \in ]-\pi/2,\pi/2[ \implies \cos x = \sqrt{1-a^2}$.
Nous trouvons $\arcsin'(a) = \dfrac{1}{\sqrt{1-a^2}}$, $\forall\ a \in ]-1,1[$.

*Etape 3.* Preuve de *3*.
De par le théorème de Leibniz-Newton, nous avons

$$\arcsin(1-\varepsilon)-\arcsin(-1+\varepsilon)=\arcsin\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}=\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Nous trouvons (7.3) en faisant $\varepsilon \searrow 0$ et en utilisant le fait que $\arcsin(\pm 1)=\pm\pi/2$. □

**7.21 Théorème** (Unicité de $\pi$)**.** Les trois quantités suivantes sont égales (et notées $\pi$) :

1. $2y$, où $y$ est le plus petit $x>0$ tel que $\cos x=0$ ;
2. $z$, où $z$ est le plus petit $x>0$ tel que $\sin x=0$ ;
3. la longueur du demi-cercle unité.

*Démonstration.* La quantité du *1* est la définition choisie pour $\pi$.
*Etape 2.* $z=\pi$.
La formule $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$ donne $\sin(2x)=2\sin x\cos x$. En particulier, $\sin\pi = 2\sin(\pi/2)\cos(\pi/2)=0$. Pour $x\in]0,\pi[$, nous avons $x/2\in]0,\pi/2[$, d'où $\sin(x/2)>0$ et $\cos(x/2)>0$. Nous obtenons $\sin x=2\sin(x/2)\cos(x/2)>0$.
*Etape 3.* $\pi$ est la longueur du demi-cercle unité.
Le demi-cercle $\{(x,y)\in\mathscr{C}(0,1); y\geq 0\}$ est le graphe de la fonction $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$. La longueur du demi-cercle est la limite, pour $\varepsilon\searrow 0$, de la longueur du graphe de cette fonction restreinte à $[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$, càd :

$$\pi=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx=\lim_{\varepsilon\searrow 0}\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Nous concluons grâce à la proposition précédente. □

**7.22 Remarque.** Il y a une quatrième définition possible : $\pi$ est l'aire du disque unité. Cette définition donne encore le même nombre que les trois définitions discutées ci-dessus. En effet, l'aire du disque est l'aire comprise entre les graphes des fonctions $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ et $x\mapsto -\sqrt{1-x^2}$, avec $x\in[-1,1]$. Nous obtenons

$$\pi=\int_{-1}^{1}\left(\sqrt{1-x^2}-\left(-\sqrt{1-x^2}\right)\right)dx=2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

Par ailleurs, nous avons

$$\left(x\sqrt{1-x^2}\right)'=2\sqrt{1-x^2}-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Nous obtenons

$$2\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\sqrt{1-x^2}\,dx=\int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx+x\sqrt{1-x^2}\Big|_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon}.$$

Nous concluons en faisant $\varepsilon\searrow 0$.

# Exercices

**7.23 Exercice.** Si $a\in\mathbb{R}$ et $x>0$, nous définissons $x^a := e^{a\ln x}$. Montrer que $x^{1/n}=\sqrt[n]{x}$ et que $x^{m/n}=\sqrt[n]{x^m}$, $\forall\, m,n\in\mathbb{N}^*$.

**7.24 Exercice.** Montrer rigoureusement les résultats suivant concernant les croissances comparées.

1. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^n}=\infty$, $\forall\, n\in\mathbb{N}$.
2. $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^a}{\ln x}=\infty$, $\forall\, a>0$. (Utiliser la règle de l'Hôpital.)

# Chapitre 8

# Propriétés de $\mathbb{R}$

## Guide

Nous détaillons les propriétés de $\mathbb{R}$ qui sont utilisées comme des briques élémentaires en analyse. Puis nous discutons nature de ces propriétés : axiomes ou théorèmes.

## Boîtes noires

Aucune, si ce n'est l'existence même de $\mathbb{R}$ avec toutes les propriétés que nous lui supposons.

## Propriétés algébriques

C'est une liste un peu ennuyeuse de propriétés, que voici en résumé :

1. Nous pouvons additionner deux réels, et l'addition est associative et commutative. De plus, $x+0=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$, et pour tout $x$ il existe un unique réel, noté $-x$, tel que $x+(-x)=0$. En bref, $\mathbb{R}$ avec l'opération $+$ est un *groupe commutatif*.
2. Nous pouvons multiplier les réels. La multiplication est associative et commutative. Nous avons $x\cdot 1=x$, et pour tout $x\neq 0$ il existe un unique réel, noté $\dfrac{1}{x}$, tel que $x\cdot\dfrac{1}{x}=1$.
   Les deux opérations sont liées par la distributivité. Tout ceci rend $\mathbb{R}$ avec les deux opérations un *corps commutatif*.

## Propriétés d'ordre

La relation d'ordre « $\leq$ » a les propriétés suivantes :

1. Nous pouvons toujours comparer deux réels : si $x,y\in\mathbb{R}$, nous avons ou bien $x\leq y$, ou bien $y\leq x$. (D'où, en particulier, $x\leq x$.)
2. Si $x\leq y$ (qui s'écrit aussi $y\geq x$) et $y\leq x$, alors $x=y$.
3. Si $x\leq y$ et $y\leq z$, alors $x\leq z$.
   Par ailleurs, la relation d'ordre est compatible avec $+$ et $\cdot$, au sens suivant :
4. Si $x\leq y$, alors $x+z\leq y+z$.
5. Si $x\geq 0$ et $y\geq 0$, alors $xy\geq 0$.

Tout ceci fait de $\mathbb{R}$ un *corps totalement ordonné*.

Puisque nous pouvons toujours comparer deux éléments $x$ et $y$, nous pouvons poser

$$\max\{x,y\}=\begin{cases} x, & \text{si } x\geq y\\ y, & \text{si } x\leq y\end{cases}.$$

Nous définissons de même $\min\{x,y\}$. Puis par récurrence

$$\max\{x_1,\dots,x_{n-1},x_n\} = \max\{\max\{x_1,\dots,x_{n-1}\},x_n\}.$$

Notations plus compactes :

$$x \vee y = \max\{x,y\},\ x \wedge y = \min\{x,y\}.$$

Il est possible de montrer que les opérations $\vee$ et $\wedge$ sont associatives et commutatives. Ainsi, par exemple

$$(x \vee y) \vee z = y \vee (z \vee x).$$

Enfin, nous pouvons poser

$$|x| = x \vee (-x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

Notons que $|x| = |-x|$.

Les propriétés usuelles des inégalités s'obtiennent à partir des axiomes ci-dessous. A titre d'exemple :

**8.1 Proposition.** Nous avons :

1. $x \leq y \iff -x \geq -y$.
2. $x \vee y \leq a \iff x \leq a$ et $y \leq a$.
3. $|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$, $\forall\, a \geq 0$.
4. $-|x| \leq x \leq |x|$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
5. (Inégalité triangulaire)

$$|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x+y| \leq |x| + |y|, \quad \forall\, x,y \in \mathbb{R}.$$

*Démonstration. Etape 1.* Preuve de *1.*
Montrons par exemple « $\Longrightarrow$ ». Nous avons

$$x \leq y \implies x - (x+y) \leq y - (x+y) \iff -y \leq -x.$$

L'autre implication est similaire.
*Etape 2.* Preuve de *2.*
Montrons par exemple « $\Longrightarrow$ ». Preuve par cas. Si $x \geq y$, alors $x \vee y = x$, et donc $y \leq x \leq a$, d'où $x \leq a$ et $y \leq a$. Preuve similaire dans l'autre cas. ✍ Examiner la réciproque.
*Etape 3.* Preuve de *3.*
Des deux propriétés précédentes, nous obtenons

$$|x| \leq a \iff x \vee (-x) \leq a \iff x \leq a \text{ et } -x \leq a \iff x \leq a \text{ et } x \geq -a \iff -a \leq x \leq a.$$

*Etape 4.* Preuve de *4.*
Il suffit de noter que $|x| \leq |x|$ et d'appliquer la propriété précédente.
*Etape 5.* Preuve de *5.*
La première inégalité suit du *4.* La dernière s'obtient ainsi : nous avons $x \leq |x|$ et $y \leq |y|$, d'où $x + y \leq |x| + |y|$. De même, $x + y \geq -|x| - |y|$. Nous concluons grâce au *3.*
Enfin, nous obtenons la deuxième inégalité ainsi. Supposons par exemple que $|x| \geq |y|$, de sorte que $||x| - |y|| = |x| - |y|$. Nous avons

$$|x| = |x + y + (-y)| \leq |x+y| + |-y| = |x+y| + |y| \implies |x+y| \geq |x| - |y| = ||x| - |y||. \qquad \square$$

✍ Exercices 8.5-8.9.

## Axiome de la borne supérieure

Les propriétés algébriques et d'ordre données ci-dessus ne permettent pas de distinguer entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$, car tous les deux ont ces propriétés-là. Le différence se fait au niveau de l'axiome de la borne supérieure.

✍ Exercices 8.10-8.12.

**8.2 Proposition** (propriété d'Archimède)**.**
*Hypothèses.* $y \in \mathbb{R}$. $x > 0$.

*Conclusion.* $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.

*Démonstration.* Par l'absurde. Sinon, $n \leq y/x$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\mathbb{N}$ a un sup $M$, et que celui-ci est $\geq 0$ et $\leq y/x$, et donc fini. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > M - 1$. D'où $n \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > M$ ✂. □

✍ Exercice 8.13.

**8.3 Proposition** (partie entière)**.** Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \leq x < n+1$. $n$ est la partie entière de $x$, notée $[x]$ ou $E(x)$.

*Démonstration. Etape 1.* Unicité.
Si $n, m \leq x < n+1, m+1$, alors $-1 < m - n < 1$, d'où $m = n$.
*Etape 2.* Existence.
Soit $A := \{m \in \mathbb{Z}\,;\, m \leq x\}$. Le plan est de montrer que $A$ est non vide, et que $\sup A$ convient.
*Etape 2.1.* $A \neq \emptyset$.
En effet, si $x \geq 0$, alors $0 \in A$. Si $x < 0$, alors il existe (de par la propriété d'Archimède) $m \in \mathbb{N}$ tel que $m > -x$, et alors $-m \in A$. Par ailleurs, $x$ est un majorant de $A$, d'où $n := \sup A$ est un réel.
*Etape 2.2.* $n$ convient.
Si $k \in \mathbb{N}^*$, alors il existe un $m_k \in A$ tel que $n - 1/k < m_k \leq n$. Nous trouvons $(m_k) \subset \mathbb{Z}$ et $m_k \to n$, d'où $n \in \mathbb{Z}$ (Lemme 8.4). Par ailleurs, comme $m_k \leq x$ et $m_k \to x$, nous avons $n \leq x$. Enfin, $n + 1 \notin A$ (car $n + 1 > n$), d'où $n + 1 > x$. □

**8.4 Lemme.**
*Hypothèses.* $(x_n) \subset \mathbb{Z}$. $x_n \to x \in \mathbb{R}$.

*Conclusions.* $x \in \mathbb{Z}$. $\exists n_0$ tel que $x_n = x$, $\forall n \geq n_0$.

*Démonstration.* Soit $n_0$ tel que $|x_m - x_n| < 1$, $\forall m, n \geq n_0$. Comme $x_m - x_n \in \mathbb{Z}$, nous trouvons $x_m = x_n$, $\forall n \geq n_0$, d'où $x_n = x_{n_0}$, $\forall n \geq n_0$. Il s'ensuit que $x = x_{n_0} \in \mathbb{Z}$ et $x_n = x$, $\forall n \geq n_0$. □

## Construction de ℝ

Récapitulons : $\mathbb{R}$ est un corps totalement ordonné satisfaisant l'axiome de la borne supérieure. Y a-t-il un tel objet ? Est-il unique ? La réponse à la première question est oui, à la seconde, non, mais oui si on la pose bien.

Il y a deux façons usuelles de construire $\mathbb{R}$. Les deux reposent sur la « complétion » de $\mathbb{Q}$. (Intuitivement, il faut voir les rationnels comme une droite trouée, et la complétion remplit les trous).

Ceci demande d'abord de savoir que les rationnels existent. Ceci se montre en plusieurs étapes.

1. Dans un premier temps, on construit $\mathbb{N}$ comme l'ensemble vérifiant le système d'axiomes de Péano
   http://fr.wikipedia.org/wiki/Axiomes_de_Peano
   L'ensemble $\mathbb{N}$ ainsi construit est *unique au sens algébrique du terme* (on dit plutôt *unique à isomorphisme près*), c'est-à-dire si $M$ vérifie les mêmes propriétés que $\mathbb{N}$, alors il existe une bijection $\varphi : \mathbb{N} \to M$ telle que $\varphi(m+n) = \varphi(m) + \varphi(n)$, $\forall\, m, n \in \mathbb{N}$.
2. A partir de $\mathbb{N}$, nous construisons $\mathbb{Q}$ comme le corps engendré par $\mathbb{N}$. L'ensemble ainsi obtenu est un corps totalement ordonné, et est unique (en tant que corps engendré par $\mathbb{N}$) à un isomorphisme près.

   Cette construction standard sera vue plus tard en algèbre.

Passons à la construction de $\mathbb{R}$ à partir de $\mathbb{Q}$. La première méthode est la *construction par coupures*, due à Dedekind.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Coupure_de_Dedekind
La deuxième, par de suites de Cauchy (due à Cantor) est moins intuitive, mais s'applique à des situations générales (complétion d'un espace métrique).
http://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_réels#Construction_via_les_suites_de_Cauchy
Enfin, il faut montrer que $\mathbb{R}$ ainsi obtenu est unique. Ceci est vrai, à condition d'entendre l'unicité sous la forme suivante : deux corps totalement ordonnés vérifiant l'axiome de la borne supérieure sont uniques à isomorphisme près. C'est-à-dire, si $\mathbb{K}$ est un tel corps, alors il existe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une bijection telle que :

1. $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ et $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
2. $x \le y \implies \varphi(x) \le \varphi(y)$.

http://fr.wikipedia.org/wiki/Construction_des_nombres_réels#.C3.89quivalence_des_deux_constructions

Retour sur l'axiome de la borne supérieure, qui est à l'analyse ce que l'axiome des parallèles est à la géométrie euclidienne : le moins évident des axiomes. Axiome ou théorème ? Axiome si on définit $\mathbb{R}$ comme un corps totalement ordonné vérifiant l'axiome de la borne supérieure. Théorème si on a construit $\mathbb{R}$, car on peut alors vérifier que $\mathbb{R}$ a bien la propriété de la borne supérieure.

# Exercices

**8.5 Exercice.** Montrer que :

1. $x^2 \ge 0$ et $|x| \ge 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
2. $|x| = \sqrt{x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.
3. $x \vee y = \dfrac{x+y+|x-y|}{2}$, $x \wedge y = \dfrac{x+y-|x-y|}{2}$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

**8.6 Exercice.** 1. Montrer que $0 < x/2 < x$, $\forall\, x > 0$.

2. En déduire que si $x < \varepsilon$, $\forall\, \varepsilon > 0$, alors $x \le 0$.

**8.7 Exercice.** Montrer que la fonction $x \mapsto |x|$ est continue.

**8.8 Exercice.** Soit $A = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Soit $a := x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$. Montrer (par récurrence sur $n$) que $a$ ne dépend pas de l'ordre des éléments $x_j$, que $a \in A$ et que $x_j \le a$, $\forall\, j$. (Cette dernière propriété définit $a$ comme étant le plus grand élément de $A$.)

Conclusion : toute partie finie de $\mathbb{R}$ admet un plus grand élément. (Et un plus petit élément ?)

**8.9 Exercice (toute partie non vide de $\mathbb{N}$ a un plus petit élément).** Soit $A \subset \mathbb{N}$. Nous nous proposons de montrer qu'il existe $a \in A$ tel que $a \le n$, $\forall\, n \in A$.

1. Soit $m \in A$. Soit $B := \{n \in A\ ; n \leq m\}$. Montrer que $B$ est non vide et fini.
2. De l'Exercice 8.8, $B$ admet un plus petit élément $a$. Montrer que $a$ est le plus petit élément de $A$.

**8.10 Exercice.** Soient $A, B \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.
2. Montrer que $\sup(A \cup B) = \sup A \vee \sup B$.

**8.11 Exercice.** Le but de cet exercice est de clarifier le lien entre max et sup. (Conclusions similaires concernant min et inf.) Soit $A \subset \mathbb{R}$.

1. Montrer que, si $A$ possède un plus grand élément $M \in A$, alors $M = \sup A$.
2. Soit $A = ]01,[$. Montrer que $A$ n'a pas de plus grand élément. Plus précisément, si $x \in A$, alors $y := \dfrac{x+1}{2} \in A$ et $y > x$.

**8.12 Exercice.** Le but de ce long exercice est de montrer que l'ensemble $\mathbb{Q}$ ne vérifie pas l'axiome de la borne supérieure. C'est-à-dire : de construire un ensemble $A \subset \mathbb{Q}$ sans sup dans $\mathbb{Q} \cup \{-\infty, \infty\}$. Soit $A := \{x \in \mathbb{Q}\,; x < \sqrt{2}\}$.

1. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

   Dans la suite, supposons par l'absurde que $A$ ait un sup $a \in \mathbb{Q}$. Le but du jeu sera d'obtenir la contradiction $a = \sqrt{2}$.
2. Soient $x_0 > 0$ et, par récurrence, $x_{n+1} = \dfrac{x_n + 2/x_n}{2}$, $\forall\, n \geq 0$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est décroissante et converge vers $\sqrt{2}$.
3. En prenant $x_0 \in \mathbb{Q}$, en déduire qu'il existe une suite $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $x_n \to \sqrt{2}$.
4. En déduire que $a \leq \sqrt{2}$.

   Comme $a \in \mathbb{Q}$, nous devons donc avoir $a < \sqrt{2}$. D'où $a \in A$.
5. Montrer que $a > 0$.
6. Trouver un rationnel $\varepsilon > 0$ tel que $a + \varepsilon < \sqrt{2}$. Obtenir une ✂.

**8.13 Exercice.** En utilisant le principe d'Archimède, montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.

# Chapitre 9

# Applications

## Guide

Ce chapitre présente quelques résultats remarquables dont la preuve ne requiert que les outils développés jusqu'ici.

## Fonctions lipschitziennes

**9.1 Définition.** Soient $A \subset \mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$. $f$ est :

1. *$k$-lipschitzienne* (avec $k \geq 0$ constante) si $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, $\forall\, x, y \in A$.
2. *Lipschitzienne* s'il existe $k \geq 0$ tel que $f$ soit $k$-lipschitzienne.

Exercice 9.22.

**9.2 Proposition** (prolongement des fonctions lipschitziennes)**.**
*Hypothèse.* $f : A \to \mathbb{R}$ est $k$-lipschitzienne.

Posons $g(x) := \inf\{f(y) + k|x - y|\,;\, y \in A\}, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$.

*Conclusions.* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est $k$-lipschitzienne. $g$ est une extensions de $f$.

De manière équivalente : toute fonction $k$-lipschitzienne définie sur une partie de $\mathbb{R}$ admet une extension $k$-lipschitzienne définie sur $\mathbb{R}$.

*Démonstration. Etape 1.* $g$ est une extension de $f$.
Soit $x \in A$. D'une part, nous avons

$$g(x) := \inf\{f(y) + k|x - y|\,;\, y \in A\} \leq f(x) + k|x - x| = f(x).$$

D'autre part, nous avons, pour tout $y \in A$,

$$|f(y) - f(x)| \leq k|x - y| \implies f(y) - f(x) \geq -k|x - y| \implies f(y) + k|x - y| \geq f(x) \implies g(x) \geq f(x).$$

Finalement, nous avons $g(x) = f(x)$, $\forall\, x \in A$.
*Etape 2.* $g$ est $k$-lipschitzienne.
Soient $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Nous avons, pour $y \in A$,

$$\underbrace{f(y) + k|x_1 - y|}_{\geq g(x_1)} \leq f(y) + k|x_2 - y| + k|x_1 - x_2| \implies g(x_1) \leq f(y) + k|x_2 - y| + k|x_1 - x_2|$$

$$\implies g(x_1) \leq g(x_2) + k|x_1 - x_2|.$$

Par symétrie, nous avons $g(x_2) \le g(x_1) + k|x_1 - x_2|$, d'où $|g(x_1) - g(x_2)| \le k|x_1 - x_2|$.
*Etape 3*. $g$ est finie. Fixons $x_0 \in A$. Alors

$$|g(x) - g(x_0)| = |g(x) - f(x_0)| \le k|x - x_0| < \infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

d'où $g(x) \in \mathbb{R}$. □

# Point fixe des applications contractantes

**9.3 Définition.** $f : A \to \mathbb{R}$ est *contractante* si $f$ est $k$-lipschitzienne pour un $k \in [0, 1[$.

**9.4 Définition.** $A \subset \mathbb{R}$ est *fermé* si :

$$(x_n) \subset A,\ x_n \to x \implies x \in A.$$

**9.5 Définition.** Soit $f : A \to A$. $x_0 \in A$ est un point fixe de $A$ si $f(x_0) = x_0$.

Exercice 9.23.

**9.6 Théorème** (théorème du point fixe de Picard)**.**
*Hypothèses.* $A \subset \mathbb{R}$ fermé. $f : A \to A$ contractante.

*Conclusion.* $f$ a exactement un point fixe $x_0$.

Nous présentons deux preuves de ce résultat ; la seconde s'applique à des situations plus générales. Aussi importante que la conclusion du théorème est la méthode employée dans la deuxième preuve, qui permet de trouver une approximation du point fixe $x_0$.

*Première preuve du Théorème 9.6. Etape 1*. Unicité de $x_0$.
Soit $x$ un point fixe de $f$. Alors

$$|x - x_0| = |f(x) - f(x_0)| \le k|x - x_0| \implies x = x_0.$$

*Etape 2*. Existence de $x_0$.
Soit $k \in [0, 1[$ telle que $f$ soit $k$-lipschitzienne. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une extension $k$-lipschitzienne de $f$. Alors

$$|g(x) - g(0)| \le k|x| \implies g(0) - k|x| \le g(x) \le g(0) + k|x|.$$

Soient $x_1 > 0, x_2 < 0$ tels que $x_1 > g(0)/(1-k)$ et $x_2 < g(0)/(1-k)$. Alors $g(x_1) - x_1 > 0$ et $g(x_2) - x_2 < 0$, ou encore $h(x_1) > 0$ et $h(x_2) < 0$, où $h(x) := g(x) - x$. De par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $h(x_0) = 0$, ou encore $g(x_0) = x_0$. Montrons que $x_0$ convient, ce qui revient à montrer que $x_0 \in A$.

Preuve par l'absurde : sinon, $x_0 \notin A$. Soit $m := \inf\{|x - x_0|\,;\, x \in A\}$. Par définition de l'infimum, il existe une suite $(x_n)_{n\ge1} \subset A$ telle que $|x_n - x_0| \to m$. Soit $n_0$ tel que $m - 1 < |x_n - x_0| < m + 1$, $\forall\, n \ge n_0$. Alors

$$x_0 - (m+1) < x_n < x_0 + (m+1), \quad \forall\, n \ge n_0,$$

d'où la suite $(x_n)$ est bornée. Il s'ensuit que $(x_n)$ contient une sous-suite $(x_{n_k})$ convergeant vers un $x \in \mathbb{R}$. $A$ étant fermé, nous avons $x \in A$. De par la continuité de la fonction valeur absolue, nous avons $|x_{n_k} - x_0| \to |x - x_0|$, d'où $|x - x_0| = m$. Ainsi, il existe $x \in A$ tel que

$$|x - x_0| \leq |y - x_0|, \quad \forall\, y \in A.$$

Comme nous avons $f(x) \in A$, ceci nous mène à

$$|x - x_0| \leq |f(x) - x_0| = |g(x) - g(x_0| \leq k|x - x_0| < |x - x_0| \text{ ✂}. \qquad \square$$

*Deuxième preuve du Théorème 9.6.* Commençons par expliquer la méthode, qui est celle des *itérations de Picard*. Fixons un $y_0 \in A$ quelconque. Posons par récurrence $y_n := f(y_{n-1})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$. La définition fait sens, car $x \in A \implies f(x) \in A$. Le plan est de montrer que la suite $(y_n)$ est de Cauchy, donc convergente. Puis de montrer que la limite $x_0$ de la suite $(y_n)$ est un point fixe de $f$. Au passage, nous obtenons une estimation de la distance entre $y_n$ et $x_0$. Ceci a des implications pratiques, car $x_0$ n'est pas connu, et ces estimations donnent un encadrement de $x_0$ à partir de $y_n$.

*Etape 1*. La suite $(y_n)$ est de Cauchy.

Une récurrence immédiate donne $|y_n - y_{n-1}| \leq k^{n-1}|y_1 - y_0|$. Par la suite, nous avons, si $m \geq n$,

$$\begin{aligned}
&|y_m - y_n| \leq |y_m - y_{m-1}| + |y_{m-1} - y_{m-2}| + \cdots + |y_{n+1} - y_n| \\
&\leq (k^{m-1} + \cdots + k^n)|y_1 - y_0| = k^n \frac{1 - k^{m-n}}{1-k}|y_1 - y_0| \leq \frac{k^n}{1-k}|y_1 - y_0|.
\end{aligned} \tag{9.1}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Comme nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k^n}{1-k}|y_1 - y_0| = 0$, il existe $n_0$ tel que $\dfrac{k^n}{1-k}|y_1 - y_0| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$. Nous trouvons $|y_m - y_n| < \varepsilon$, $\forall\, m, n \geq n_0$, d'où $(y_n)$ est une suite de Cauchy.

*Etape 2*. Existence du point fixe.

Soit $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Alors $x_0 \in A$, car $A$ est fermé. Nous trouvons

$$f(x_0) = f\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} y_{n+1} = \lim_{n\to\infty} y_n = x_0. \qquad \square$$

Bien qu'elle ne soit pas nécessaire à la preuve, notons cette information : $|y_n - x_0| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|y_1 - y_0|$. En effet, cette inégalité s'obtient en faisant $m \to \infty$ dans (9.1).

# Densité des polynômes

**9.7 Théorème** (Weierstrass)**.** Soient $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $\varepsilon > 0$. Alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $|f - P| < \varepsilon$.

La plus spectaculaire des preuves de ce théorème est due à Bernstein et utilise la propriété suivante des coefficients binomiaux $\dbinom{n}{k}$ (notés aussi $C_n^k$).

**9.8 Lemme.** Nous avons l'identité

$$\sum_{k=0}^{n} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{1}{n} x(1-x), \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{9.2}$$

*Preuve du Théorème 9.7. Etape 1.* Réduction au cas $[a,b]=[0,1]$.
Montrons que, si le théorème est vrai lorsque $[a,b]=[0,1]$, alors il est vrai sur tout intervalle $[a,b]$. En effet, soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continue et soit $g(x):=f(a+x(b-a))$, $\forall\, x\in[0,1]$. Alors $g$ est continue. Soit $Q\in\mathbb{R}[X]$ tel que $|g-Q|<\varepsilon$. Soit $P(x):=Q((x-a)/(b-a))$. Alors $Q\in\mathbb{R}[X]$ et $|f-P|<\varepsilon$.
*Etape 2.* Construction de $P$.
Pour $n\in\mathbb{N}$, soit

$$P_n(X):=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}X^k(1-X)^{n-k}.$$

Nous allons montrer que, si $n$ est suffisamment grand (dépendant de $\varepsilon$), alors $|f-P_n|<\varepsilon$.
*Etape 3.* Estimation de $|f-P_n|$.
Soit $M$ tel que $|f|\le M$. (L'existence de $M$ suit du théorème des bornes.) Soit $\delta>0$ (le même pour tous les $x\in[0,1]$) tel que

$$|x-y|<\delta \implies |f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

(L'existence de $\delta$ découle du théorème de Heine.) Soient $A:=\{k\,;\,|x-k/n|<\delta\}$, $B:=\{k\,;\,|x-k/n|\ge\delta\}$. Notons que

$$1\le\frac{(x-k/n)^2}{\delta^2}\quad\forall\,k\in B,$$

d'où

$$\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\sum_{k\in B}\frac{(x-k/n)^2}{\delta^2}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{x(1-x)}{n\delta^2}\le\frac{1}{4n\delta^2}; \tag{9.3}$$

nous avons utilisé ici (9.2) et le fait que $x(1-x)\le 1/4$.
Nous avons (en utilisant l'identité du binôme

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+(1-x))^n=1),$$

l'inégalité triangulaire, la définition de $\delta$, et (9.3)) :

$$\begin{aligned}
|f(x)-P_n(x)| &= \left|\sum_{k=0}^{n}(f(x)-f(k/n))\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|\le\sum_{k=0}^{n}|f(x)-f(k/n)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k\in A}|f(x)-f(k/n)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{k\in B}|f(x)-f(k/n)|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\le\varepsilon\sum_{k\in A}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+M\sum_{k\in B}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\le\varepsilon\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{M}{4n\delta^2}=\varepsilon+\frac{M}{4n\delta^2}.
\end{aligned}$$

Pour $n$ suffisamment grand, nous obtenons $|f-P_n|<2\varepsilon$. □

*Preuve du Lemme 9.8.* Calculons d'abord (en utilisant l'identité $k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$, $\forall\,k\ge1$)

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=n\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=nx\sum_{l=0}^{n}\binom{n-1}{l}x^l(1-x)^{n-1-l}=nx.
\end{aligned}$$

De même, en utilisant l'identité $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-2}{k-2}$, $\forall\, k \geq 2$, nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2,$$

d'où

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n(n-1)x^2 + nx.$$

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (x-k/n)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} (n^2x^2 - 2knx + k^2)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{n^2}(n^2x^2 - 2nx \cdot (nx) + n(n-1)x^2 + nx) = \frac{1}{n} x(1-x).\end{aligned}$$

□

# Théorème de Leibniz-Newton

**9.9 Théorème.** Une fonction continue $f : I \to \mathbb{C}$ a une primitive.

Bien que ce ne soit pas essentiel pour la conclusion, nous allons simplifier la preuve en supposant l'intervalle $I$ de la forme $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$.

*Démonstration.* La conclusion est claire (par calcul explicite) si $f$ est un polynôme. De plus, dans ce cas nous pouvons choisir la primitive $F$ de $f$ telle que $F(a) = 0$.

Considérons une suite de polynômes $(P_n)$ telle que $|f - P_n| < 1/n$. Soit $R_n$ la primitive de $P_n$ telle que $R_n(a) = 0$. Le plan de la suite de la preuve est le suivant : montrer que, pour tout $x$, la suite $(R_n(x))$ est de Cauchy. Dès lors, nous pouvons définir $F(x) := \lim_{n\to\infty} R_n(x)$. Nous montrons ensuite que $F$ est une primitive de $f$.

*Etape 1.* $(R_n(x))$ est une suite de Cauchy, $\forall\, x \in I$.
En effet, nous avons

$$|R_m' - R_n'| = |P_m - P_n| \leq |P_m - f| + |P_n - f| < \frac{1}{m} + \frac{1}{n},$$

d'où

$$|R_m(x) - R_n(x)| = |(R_m - R_n)(x) - (R_m - R_n(a))| \leq |x-a| \sup_{z\in]a,x[} |(R_m - R_n)'(z)| < (b-a)\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Choisissons $n_0 > 1/\varepsilon$. De ce qui précède, nous avons

$$|R_m(x) - R_n(x)| \leq 2(b-a)\varepsilon, \quad \forall\, m, n \geq n_0.$$

Il s'ensuit que $(R_n(x))$ est une suite de Cauchy. Posons $F(x) := \lim_{n\to\infty} R_n(x)$.

*Etape 2.* $F$ est une primitive de $f$.
Soient $y \in I$, $(x_k) \subset I \setminus \{y\}$ tels que $x_k \to y$. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ tel que

$$|z - y| < \delta \implies |f(z) - f(y)| < \varepsilon.$$

Montrons qu'il existe $k_0$ tel que

$$\left|\frac{F(x_k)-F(y)}{x_k-y}-f(y)\right|<3\varepsilon, \quad \forall\, k\geq k_0.$$

En effet, soit $k_0$ tel que $|x_k-y|<\delta$, $\forall\, k\geq k_0$. Pour chaque $n$ et $k$, soit $z_{n,k}\in]y,x_k[$ tel que

$$\frac{R_n(x_k)-R_n(y)}{x_k-y}=R_n'(z_{n,k})=P_n(z_{n,k}),$$

ce qui donne l'identité

$$\frac{F(x_k)-F(y)}{x_k-y}-f(y)=\frac{[F(x_k)-R_n(x_k)]-[F(y)-R_n(y)]}{x_k-y}+\left[P_n(z_{n,k})-f(z_{n,k})\right]+\left[f(z_{n,k})-f(y)\right].$$

Pour $k\geq k_0$ nous avons

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x_k)-F(y)}{x_k-y}-f(y)\right| &\leq \left|\frac{[F(x_k)-R_n(x_k)]-[F(y)-R_n(y)]}{x_k-y}\right|+|P_n(z_{n,k})-f(z_{n,k})|+|f(z_{n,k})-f(x)|\\ &< \left|\frac{[F(x_k)-R_n(x_k)]-[F(y)-R_n(y)]}{x_k-y}\right|+\frac{1}{n}+\varepsilon<3\varepsilon,\end{aligned}$$

la dernière inégalité étant valide si $n$ est suffisamment grand. □

Exercice 9.24.

## Equations à variables séparées

Une telle équation est de la forme

$$y'=a(y)b(x),\ \text{avec } b:K\to\mathbb{R} \text{ continue},\ a:J\to\mathbb{R} \text{ de classe } C^1,\ J \text{ intervalle ouvert.} \tag{9.4}$$

Ici, $K$ est un intervalle, et nous cherchons des solutions $y:I\to J$, avec $I\subset K$. Nous complétons cette équation par la condition initiale

$$y(x_0)=y_0, \tag{9.5}$$

avec $x_0\in K$ et $y_0\in J$.

La clé pour la résolution du problème (9.4)-(9.5) est donnée par le résultat suivant.

**9.10 Lemme.**
*Hypothèses.* $y:I\to\mathbb{R}$ solution de (9.4)-(9.5). $a(y)$ s'annule en un point de $I$.

*Conclusion.* $y$ est constante.

Ce résultat est un cas particulier de la partie d'unicité du théorème de Cauchy-Lipschitz, qui sera vu en troisième année, avec une preuve différente de celle qui suit (basée sur le lemme de Gronwall et une définition qui dépasse le cadre de ce cours). La preuve qui suit n'utilise que le théorème des bornes et le théorème des accroissements finis.

*Démonstration.* Soit $x_1\in I$ tel que $a(y(x_1))=0$. Soit $y_1:=y(x_1)$. Montrons que $y\equiv y_1$, par exemple à droite de $x_1$. Il en va de même à gauche de $x_1$. Soit $B:=I\cap[x_1,\infty[$, de sorte que $B$ est de la forme $B=[x_1,c\int$.

$$A:=\{x\geq x_1\,;\,y(t)=y_1,\ \forall\, t\in[x_1,x]\}.$$

Alors $A$ est non vide, car $x\in A$. Soit $x_2:=\sup A$. Si $x_2=c$, alors $y=y_1$ dans $B$. Supposons par l'absurde que $x_2<c$. Notons que $y(x_2)=y_1$.

Considérons les quantités suivantes :

1. $m_1 > 0$ tel que $x_2 + m_1 < c$.
2. $m_2 := \sup\{|b(x)|\,;\, x \in [x_2, x_2 + m_1]\}$.
3. $m_3 > 0$ tel que $[y_1 - m_3, y_1 + m_3] \subset J$.
4. $0 < m_4 < m_1$ tel que $x \in [x_2, x_2 + m_4] \implies y(x) \in [y_1 - m_3, y_1 + m_3]$.
5. $m_5 := \sup\{|a'(z)|\,;\, z \in [y_1 - m_3, y_1 + m_3]\}$, de sorte que

$$|a(z)| = |a(z) - a(y_1)| \le m_5 |z - y_1|, \quad \forall\, z \in [y_1 - m_3, y_1 + m_3].$$

6. $m_6$ tel que $0 < m_6 < \min\{m_4, 1/(m_2 m_5)\}$.
7. $m_7 := \sup\{|y(x) - y_1|\,;\, x \in [x_2, x_2 + m_6]\}$.

Par définition de $x_2$ et $m_6$, la fonction $y - y_1$ et bien définie et n'est pas identiquement nulle sur $[x_2, x_2 + m_6]$, de sorte que $m_7 > 0$. Soit $x_3 \in [x_2, x_2 + m_6]$ tel que $|y(x_3) - y_1| = m_7$. Nous obtenons la contradiction suivante :

$$\begin{aligned} 0 < m_7 &= |y(x_3) - y_1| = |y(x_3) - y(x_2)| \le |x_3 - x_2| \sup_{z \in [x_2, x_3]} |y'(z)| \\ &\le m_6 \sup_{z \in [x_2, x_3]} |a(y(z))||b(z)| \le m_6 m_2 m_5 \sup_{z \in [x_2, x_3]} |y(z) - y_1| \le \underbrace{m_6 m_2 m_5}_{<1} m_7 < m_7. \end{aligned}$$

□

Ceci nous amène à la méthode suivante :

1. Ou bien $a(y_0) = 0$, et alors $y \equiv y_0$.
2. Ou bien $a(y_0) \ne 0$, et alors $a(y) \ne 0$, et l'équation devient

$$\frac{y'}{a(y)} = b(x) \iff A(y) = B(x) + C, \tag{9.6}$$

où $A$ est une primitive de $\dfrac{1}{a}$, $B$ est une primitive de $b$ et $C$ est une constante. Nous résolvons le problème (9.4)-(9.5) en résolvant (9.6).

✍ Exercices 9.25-9.26.

# Ecriture décimale

Une écriture décimale est une écriture de la forme $\overline{m, a_1 a_2 \ldots}$, avec $m \in \mathbb{N}$, $a_j \in [\![0, 9]\!]$ tels que tous les $a_j$ ne soient pas tous égaux à 9 à partir d'un certain rang. (De manière équivalente, au-delà de tout rang $n_0$ il existe un chiffre $a_n \le 8$.)

Un nombre $x \ge 0$ est représenté par cette écriture, et on écrit $x = \overline{m, a_1 a_2 \ldots}$, si

$$x = m + \lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{10^n}. \tag{9.7}$$

Cette égalité est notée en abrégé $x = m + \sum_{n \ge 1} \dfrac{a_n}{10^n}$. $a_n$ est le $n^{\text{e}}$ chiffre décimal de $x$.

**9.11 Théorème.** A chaque nombre réel positif correspond une et une seule écriture décimale, et réciproquement.

*Démonstration. Etape 1.* A tout écriture correspond un nombre.
Autrement dit, la limite de (9.7) existe. En effet, soit $b_n := \dfrac{1}{10^n}$, $n \geq 1$, de sorte que

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{10}\frac{1-1/10^n}{1-1/10} < \frac{1}{9}.$$

En utilisant l'Exercice 5.29, nous obtenons la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{10^n}$.

*Etape 2.* Nous avons $0 \leq \sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{10^n} < 1$.
En effet, soit $n_0$ tel que $a_{n_0} \leq 8$. Si $n \geq n_0$, alors

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{a_n}{10^n} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^n} - \frac{1}{10^{n_0}} = 1 - \frac{1}{10^n} - \frac{1}{10^{n_0}} < 1 - \frac{1}{10^{n_0}}.$$

Nous obtenons $\sum_{n\geq 1} \dfrac{a_n}{10^n} < 1 - \dfrac{1}{10^{n_0}} < 1$.
*Etape 3.* Deux écritures qui donnent le même nombre coïncident.
Preuve par l'absurde. Supposons

$$x = m + \sum_{n\geq 1} \frac{a_n}{10^n} = m' + \sum_{n\geq 1} \frac{a'_n}{10^n},$$

avec soit $m \neq m'$, soit $a_n \neq a'_n$ pour un $n$. Si $m \neq m'$, supposons par exemple $m < m'$. Alors

$$x < m + 1 \leq m' \leq x \text{ ✂}.$$

Si $m = m'$, soit $n_0$ le plus petit $n$ tel que $a_n \neq a'_n$. Supposons par exemple que $a_{n_0} < a'_{n_0}$. Nous avons donc

$$\frac{1}{10^{n_0}} \leq \frac{a'_{n_0} - a_{n_0}}{10^{n_0}} = \sum_{n>n_0} \frac{a_n - a'_n}{10^n} < \sum_{n>n_0} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^{n_0}} \text{ ✂}.$$

L'inégalité stricte ci-dessus se justifie par le fait que l'égalité demanderait $a_n = 9$, $\forall\, n > n_0$, ce qui est impossible.
*Etape 4.* Chaque $x$ a une écriture.
Soient $m := E(x)$ et $y := x - m \in [0,1[$. Posons $a_1 := E(10y)$ et, par récurrence,

$$a_n := E\left(10^n y - \sum_{l=1}^{n-1} 10^{n-l} a_l\right).$$

Montrons par récurrence sur $n$ que $a_n \in [\![0,9]\!]$ et

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{a_k l}{10^l} \leq y < \sum_{l=1}^{n} \frac{a_l}{10^l} + \frac{1}{10^n}. \tag{9.8}$$

Le cas $n = 1$ est laissé au lecteur. L'inégalité (9.8) au rang $n-1$ donne

$$0 \leq 10^n y - \sum_{l=1}^{n-1} 10^{n-l} a_l < 10,$$

d'où $0 \leq a_n < 10$. Par ailleurs, nous avons

$$a_n \leq 10^n y - \sum_{l=1}^{n-1} 10^{n-l} a_l < a_n + 1,$$

d'où (9.8) au rang $n$.

(9.8) entraîne

$$y-\frac{1}{10^n}<\sum_{l=1}^{n}\frac{a_k l}{10^l}\le y,$$

d'où

$$m+\sum_{n\ge 1}\frac{a_n}{10^n}=m+y=x.$$

Enfin, pour conclure il faut vérifier que les $a_n$ ne sont pas tous 9 à partir d'un certain rang. Preuve par l'absurde. Supposons que $a_n=9$, $\forall\, n\ge n_0$, et que $n_0$ est le plus petit avec cette propriété. Donc soit $n_0=1$, soit $n_0>1$ et alors $a_{n_0}<9$. Examinons par exemple le deuxième cas ; le premier est laissé au lecteur. Nous avons

$$y=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{a_n}{10^n}+\sum_{n>n_0}\frac{9}{10^n}=\sum_{n=1}^{n_0}\frac{a_n}{10^n}+\frac{1}{10^{n_0}}=\sum_{n<n_0}\frac{a_n}{10^n}+\frac{a_{n_0}+1}{10^{n_0}}.$$

En reprenant le construction de la suite $(a_n)$, on s'aperçoit alors que le chiffre de rang $n_0$ n'est pas $a_{n_0}$, mais $a_{n_0}+1$ ✄. □

## $\mathbb{R}$ n'est pas une suite

**9.12 Définition.** Un ensemble $A$ est dénombrable s'il peut être écrit comme une suite : $A=\{x_1,x_2,\ldots,\}$, avec $x_i\ne x_j$ si $i\ne j$.

Un ensemble est au plus dénombrable s'il est soit fini, soit dénombrable.

Donc un ensemble est au plus dénombrable s'il peut être écrit sous la forme d'une liste. Exemple évident d'ensemble au plus dénombrable : $\mathbb{N}$. Exemples moins évidents : $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ou toute partie de ces ensembles.
http://fr.wikipedia.org/wiki/Ensemble_dénombrable

**9.13 Théorème** (Cantor)**.** Un intervalle non dégénéré $I$ n'est pas au plus dénombrable.

Nous allons simplifier un peu la preuve en supposant $I=[0,1[$, mais ceci n'est pas important pour la conclusion.

*Démonstration.* Supposons que $[0,1[=\{x_1,x_2,\ldots,\}$. Pour chaque $n\ge 1$, soit $a_n\in[\![0,8]\!]$ tel que $a_n$ soit différent du $n^{\text{e}}$ chiffre décimal de $x_n$. Soit $x:=\overline{0,a_1a_2\ldots}\in[0,1[$, d sorte que $\overline{0,a_1a_2\ldots}$ est l'écriture décimale de $x$.

Par hypothèse, nous avons $x=x_n$ pour un $n$. Or, $x\ne x_n$, car leurs écritures décimales respectives ne sont pas égales ✄. □

✍ Exercice 9.27.

## Théorème de Stolz-Cesaró

Ce théorème est l'analogue pour les suites de la règle de l'Hôpital. Rappelons que la règle de l'Hôpital affirme (sous des hypothèses)

$$\lim_{x\to y}\frac{f'(x)}{g'(x)}=l\implies\lim_{x\to y}\frac{f(x)}{g(x)}=l.$$

Pour une suite $(x_n)$, l'analogue de la dérivée est le taux d'accroissement $x_{n+1}-x_n$. Avec cette correspondance, si nous considérons à la place de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ le quotient $\dfrac{x_n}{y_n}$, alors l'analogue la quantité $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ est $\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$, et la règle de l'Hôpital est donnée par le résultat suivant.

**9.14 Théorème** (de Stolz-Cesaró).
*Hypothèses.* $(y_n)$ strictement croissante. $y_n > 0$. $y_n \to \infty$. $\dfrac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} \to l \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Conclusion.* $\dfrac{x_n}{y_n} \to l$.

*Démonstration.* Supposons par exemple $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $n_0$ tel que

$$l-\varepsilon < \frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} < l+\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

En multipliant la double inégalité ci-dessus par $y_{n+1}-y_n$ et en sommant sur $n \rightsquigarrow n_0, n_0+1, \ldots, m-1$, nous obtenons

$$(l-\varepsilon)(y_m - y_{n_0}) < x_m - x_{n_0} < (l+\varepsilon)(y_m - y_{n_0}), \quad \forall m \geq n_0,$$

d'où

$$l-\varepsilon-(l-\varepsilon)\frac{y_{n_0}}{y_m}+\frac{x_{n_0}}{y_m} < \frac{x_m}{y_m} < l+\varepsilon-(l+\varepsilon)\frac{y_{n_0}}{y_m}+\frac{x_{n_0}}{y_m}, \quad \forall m \geq n_0. \tag{9.9}$$

Le membre de gauche de (9.9) a comme limite (quand $m \to \infty$) $l-\varepsilon$, et celui de droite a la limite $l+\varepsilon$. Il s'ensuit qu'il existe $n_1 \geq n_0$ tel que

$$l-2\varepsilon < \frac{x_m}{y_m} < l+2\varepsilon, \quad \forall m \geq n_1.$$

Nous concluons grâce au principe $2\varepsilon$. □

Etudier le cas où $l = \pm\infty$.

**9.15 Corollaire** (moyennes de Cesaró).
*Hypothèse.* $a_n \to l \in \overline{\mathbb{R}}$.

*Conclusion.* $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \to l$.

*Démonstration.* Appliquer le théorème précédent avec $x_n := a_1+a_2+\cdots+a_n$ et $y_n := n$. □

## Théorème du point fixe de Knaster-Tarski

**9.16 Théorème** (du point fixe de Knaster-Tarski).
*Hypothèses.* $f : [0,1] \to [0,1]$. $f$ croissante.

*Conclusion.* $\exists x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

La difficulté provient du fait que $f$ n'est pas supposée continue. Si $f$ est continue, alors on obtient facilement la conclusion en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x) - x$.

*Démonstration.* Soit

$$A := \{x \in [0,1]\,;\, f(x) > x\}.$$

Si $A = \emptyset$, alors en particulier $0 \notin A$, d'où $f(0) \leq 0$, d'où $f(0) = 0$ ; dans ce cas, $x = 0$ convient.

Supposons $A \neq \emptyset$. Soit $x := \sup A$. Notons que $0 \leq x \leq 1$. Montrons que $f(x) = x$.

*Etape 1.* Nous avons $f(x) \geq x$.

En effet, soit $(x_n) \subset A$ telle que $x_n \to x$. Alors $x_n < f(x_n) \leq f(x)$. En particulier, nous avons $x_n < f(x)$, d'où, par passage à la limite, $x \leq f(x)$.

Ceci règle le cas où $x = 1$. En effet, si $x = 1$, alors $f(1) \geq 1$, d'où $f(1) = 1$ ; il s'ensuit que $x = 1$ convient. Nous pouvons donc supposer, dans la suite, que $x < 1$.

*Etape 2.* Nous avons $f(x) \leq x$.

En effet, soit $y_n := x + \dfrac{1-x}{n}$, $\forall\, n \geq 1$, de sorte $y_n \in [0,1]$, $y_n > x$ et $y_n \to x$. En particulier, nous avons $y_n \notin A$, d'où $f(y_n) \leq y_n$. Il s'ensuit que $f(x) < y_n$. Par passage à la limite dans cette inégalité, nous obtenons $f(x) \leq x$.

Les deux étapes donnent $f(x) = x$. □

# Théorème de Borel-Lebesgue

**9.17 Définition.** Un ensemble $U \subset \mathbb{R}$ est un *ouvert* si

$$x \in U \implies \exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U.$$

Un exemple typique d'ouvert est un intervalle ouvert.

**9.18 Définition.** Soit $A \subset \mathbb{R}$. Un *recouvrement ouvert* de $A$ est une famille (=collection) $(U_i)_{i\in I}$ d'ouverts $U_i \subset \mathbb{R}$ tels que $A \subset \bigcup_{i\in I} U_i$.

Un *sous recouvrement* du recouvrement $(U_i)_{i\in I}$ est une famille $(U_j)_{i\in J}$ avec les deux propriétés suivantes : $J \subset I$, et $A \subset \bigcup_{j\in J} U_j$.

Un tel sous recouvrement est fini si $J$ est fini.

**9.19 Théorème** (de Borel-Lebesgue)**.** Tout recouvrement ouvert de $[0,1]$ contient un sous recouvrement fini.

*Démonstration.* Soit

$$A := \{x \in [0,1]\,;\, \exists \text{ un sous recouvrement fini de } [0,x]\}.$$

Alors $A$ est non vide, car $0 \in A$. Soit $x = \sup A$. Notons que $0 \leq x \leq 1$.

*Etape 1.* $x \in A$.

En effet, soit $i_0 \in I$ tel que $x \in U_{i_0}$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset U_{i_0}$. Soit $y \in A$ tel que $x - \varepsilon < y \leq x$. Alors il existe $J \subset I$ finie telle que $[0,y] \subset \bigcup_{j\in J} U_j$. Nous obtenons

$$[0,x] = [0,y] \cup [y,x] \subset [0,y] \cup ]x-\varepsilon, x] \subset \bigcup_{j\in J} U_j \cup U_{i_0}\,;$$

d'où $(U_j)_{j\in J\cup\{i_0\}}$ est un sous recouvrement fini de $[0,x]$, et donc $x\in A$.
*Etape 2.* $x=1$ (d'où la conclusion du théorème).
Supposons par l'absurde que $x<1$. Soit $\varepsilon>0$ comme dans l'étape *1*. Quitte à diminuer $\varepsilon$, nous pouvons supposer que $x+\varepsilon<1$. De la preuve de l'étape 1, nous avons

$$[0,x+\varepsilon/2]\subset[0,y]\cup]x-\varepsilon,x+\varepsilon[\subset\bigcup_{j\in J}U_j\cup U_{i_0},$$

d'où $x+\varepsilon/2\in A$. Or, $x=\sup A$. □

Un cas particulier important de ce théorème est celui où le recouvrement de fait avec des intervalles ouverts. Dans ce cas, nous avons le raffinement suivant.

**9.20 Proposition.** Soit $(U_i)_{i\in I}$ un recouvrement de $[0,1]$ avec des intervalles ouverts. Alors il existe :

1. Un entier $n\geq 1$,
2. $n+1$ points $0=x_0<x_1<\ldots<x_n=1$,
3. $n$ indices deux à deux disjoints $i_1,\ldots,i_n\in I$,

tels que :

$$[x_0,x_1]\subset U_{i_1},\ [x_1,x_2]\subset U_{i_2},\ldots[x_{n-1},x_n]\subset U_{i_n}.$$

*Démonstration.* Notons que le théorème de Borel-Lebesgue est vrai si on remplace $[0,1]$ par $[a,b]\subset\mathbb{R}$. Nous allons montrer la proposition lorsque $[0,1]$ est remplacé par $[a,b]$ ; cette généralisation simplifiera la preuve !

Soit $J\subset I$ une partie finie telle que $(U_j)_{j\in J}$ soit un sous recouvrement de $[a,b]$. Montrons la proposition par récurrence sur $m:=\#J$, le cas $m=1$ étant évident.

Soit $i_1\in J$ tel que $a\in U_{i_1}=]\alpha,\beta[$. Si $\beta>b$, alors $[a,b]\subset U_{i_1}$, et la conclusion de la proposition est claire. Sinon, nous avons $\beta\in[a,b]$ et

$$[\beta,b]\subset\bigcup_{j\in J\setminus\{i_1\}}U_j.$$

Par hypothèse de récurrence, il existe $n$, $\beta=x_1<\ldots<x_n=b$ et des indices $i_2,\ldots,i_n$ deux à deux disjoints tels que

$$[x_1,x_2]\subset U_{i_2},\ldots,[x_{n-1},x_n]\subset U_{i_n}.$$

En posant $x_0=a$, nous obtenons la conclusion de la proposition. □

## Inégalité des accroissements finis de Denjoy

Nous concluons ce chapitre par un théorème difficile, dont la preuve illustre la puissance de l'axiome de la borne supérieure. Commençons par un fait simple. Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction de Rolle. Si $|f'(x)|\leq M$, $\forall x\in]a,b[$, alors $|f(b)-f(a)|\leq M|b-a|$ ; ceci découle du théorème des accroissements finis. Le théorème de Denjoy affirme que la même conclusion peut s'obtenir en affaiblissant les hypothèses sur $f$.

**9.21 Théorème** (inégalité des accroissements finis de Denjoy)**.**
*Hypothèses.* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue (avec $[a,b] \subset \mathbb{R}$). $\exists A \subset [a,b]$ au plus dénombrable tel que $f$ dérivable en $x$, $\forall x \in [a,b] \setminus A$. $|f'(x)| \le M$, $\forall x \in [a,b] \setminus A$.

*Conclusion.* $|f(b) - f(a)| \le M|b-a|$.

*Démonstration.* Supposons par exemple $b > a$. Commençons par le cas simple où $A$ est fini :

$$A = \{x_1, \dots, x_n\}, \text{ avec } a \le x_1 < x_2 < \dots < x_n \le b.$$

En appliquant successivement le théorème des accroissements finis sur $[a,x_1]$, $[x_1,x_2], \dots, [x_n,b]$, nous obtenons

$$\begin{aligned} |f(b)-f(a)| &= |(f(b)-f(x_n)) + (f(x_n)-f(x_{n-1})) + \dots + (f(x_1)-f(a))| \\ &\le |f(b)-f(x_n)| + |f(x_n)-f(x_{n-1})| + \dots + |f(x_1)-f(a)| \\ &\le M((b-x_n)+(x_n-x_{n-1})+\dots+(x_1-a)) = M(b-a). \end{aligned}$$

Considérons maintenant le cas où $A$ est dénombrable :

$$A = \{x_1, x_2, \dots, \}, \text{ avec } x_j \ne x_k \text{ si } j \ne k.$$

Le plan de la preuve est de montrer que

$$|f(x)-f(a)| \le (M+\varepsilon)(x-a) + \varepsilon g(x), \quad \forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in [a,b], \tag{9.10}$$

avec $g : [a,b] \to [0,2]$ une fonction que l'on va définir ultérieurement, puis de prendre $x = b$ et faire $\varepsilon \to 0$ dans (9.10).
*Etape 1.* Définition de $g$.
Pour $x \in [a,b]$, posons $a_n = a_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n}, & \text{si } x_n < x \\ 0, & \text{si } x_n \ge x \end{cases}$. Nous avons donc $0 \le a_n \le 1/2^n$, $\forall n$, d'où la série $\sum_{n\ge1} a_n$ converge. Nous définissons alors $g(x) := 1 + \sum_{n\ge1} a_n$.
*Etape 2.* Propriétés de $g$.
*2.1.* Nous avons $1 \le g(x) \le 2$, $\forall x \in [a,b]$.
En effet, nous avons $0 \le a_n \le 1/2^n$, d'où

$$1 \le 1 + \sum_{n=1}^{N} a_n \le 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} < 2.$$

En faisant $N \to \infty$, nous obtenons $1 \le g(x) \le 2$.
*2.2.* $g$ est croissante.
En effet, si $x \le y$ alors $a_n(x) \le a_n(y)$, d'où

$$1 + \sum_{n=1}^{N} a_n(x) \le 1 + \sum_{n=1}^{N} a_n(y).$$

Nous obtenons la conclusion désirée en faisant $N \to \infty$.
*2.3.* Si $x = x_m \in A$ et $y > x$, alors $g(y) \ge g(x) + 1/2^m$.
En effet, nous avons $a_n(x) \le a_n(y)$, $\forall n \ne m$, et $a_m(x) = 0$, alors que $a_m(y) = 1$. Nous obtenons, pour $N \ge m$,

$$1 + \sum_{n=1}^{N} a_n(y) \ge 1 + \sum_{n=1}^{N} a_n(x) + \frac{1}{2^m}.$$

Il suffit alors de laisser $N \to \infty$.

*2.4.* Si $x \in ]a,b]$, alors $\lim_{z \nearrow x} g(z) = g(x)$.

Notons que $\lim_{z \nearrow x} g(z) = \sup_{z<x} g(z) \leq g(x)$, car $g$ est croissante. Ainsi, il suffit de montrer que $\sup_{z<x} g(z) > g(x) - \delta$, $\forall\, \delta > 0$. Soit $\delta > 0$. Soit $n_0$ tel que $\sum_{n \leq n_0} a_n(x) > g(x) - \delta$. Soit

$$M := \{n \leq n_0\,;\, a_n(x) \neq 0\} = \{n \leq n_0\,;\, x_n < x\}.$$

Soit $y$ le plus grand élément de l'ensemble $\{x_n\,;\, n \in M\}$, de sorte que $y < x$. Si $z \in ]y,x[$, alors $a_n(z) = 1$, $\forall\, n \in M$, d'où

$$g(z) \geq \sum_{n \in M} a_n(z) = \sum_{n \in M} \frac{1}{2^n} = \sum_{n \leq n_0} a_n(x) > g(x) - \delta.$$

*Etape 3.* Preuve de (9.10).

Posons $B := \{x \in [a,b]\,;\, x \text{ ne satisfait pas (9.10)}\}$. Nous devons montrer que $B = \emptyset$. Preuve par l'absurde : supposons $B \neq \emptyset$. Soit $c := \inf B$, de sorte que $a \leq c \leq b$.

*3.1.* $c \notin B$.

En effet, si $c = a$, alors la conclusion est claire, car $a \notin B$. Supposons donc $c > a$. Soit $x_n := c - \dfrac{c-a}{n}$, $n \geq 1$, de sorte que $x_n \in [a,c[$ et $x_n \to c$. Alors $x_n \notin B$, d'où

$$|f(x_n) - f(a)| \leq (M+\varepsilon)(x_n - a) + \varepsilon g(x_n).$$

En faisant $n \to \infty$ et en utilisant l'étape *2.4*, nous obtenons $|f(c) - f(a)| \leq (M+\varepsilon)(c-a) + \varepsilon g(c)$, d'où la conclusion.

*3.2.* Nous avons $c = b$.

En effet, supposons $c < b$. Deux cas se présentent : $c \in A$ ou $c \notin A$.

*3.2.1.* Etude du cas où $c \in A$.

Soit $m$ tel que $c = x_m$. Soit $\delta > 0$ tel que

$$|y - c| < \delta \implies |f(y) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2^m}.$$

Quitte à diminuer $\delta$, nous pouvons supposer $c + \delta < b$. Si $y \in ]c, c+\delta[$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} |f(y) - f(a)| &= |(f(y) - f(c)) + (f(c) - f(a))| \leq |f(y) - f(c)| + |f(c) - f(a)| \\ &\leq (M+\varepsilon)(c-a) + \varepsilon g(c) + \frac{\varepsilon}{2^m} < (M+\varepsilon)(y-a) + \varepsilon g(y). \end{aligned}$$

Ainsi $[c, c+\delta[ \cap B = \emptyset$, ce qui implique que $c + \delta$ est un minorant de $B$.

*3.2.2.* Etude du cas où $c \notin A$.

Dans ce cas, nous avons

$$\lim_{y \to c} \frac{|f(y) - f(c)|}{|y - c|} = |f'(c)| \leq M,$$

d'où il existe $\delta > 0$ tel que

$$\frac{|f(y) - f(c)|}{|y - c|} < M + \varepsilon, \quad \forall\, y \in [c, c+\delta[.$$

Cette fois-ci, nous avons, pour $y \in ]c, c+\delta[$ :

$$\begin{aligned} |f(y) - f(a)| &= |(f(y) - f(c)) + (f(c) - f(a))| \leq |f(y) - f(c)| + |f(c) - f(a)| \\ &\leq (M+\varepsilon)(c-a) + \varepsilon g(c) + (M+\varepsilon)(y-c) \leq (M+\varepsilon)(y-a) + \varepsilon g(y). \end{aligned}$$

A nouveau, nous obtenons $[c,c+\delta[\cap B=\emptyset$ ✂.

*3.3.* Conclusion.

De ce qui précède, nous avons $c=b$, d'où $B=\{b\}$. Soit $x_n:=b-\dfrac{b-a}{n}$, $\forall\, n\ge 1$. Nous avons $x_n\not\in B$, d'où

$$|f(x_n)-f(a)|\le (M+\varepsilon)(x_n-a)+\varepsilon g(x_n).$$

En utilisant le fait que $x_n\nearrow b$, nous obtenons $|f(b)-f(a)|\le (M+\varepsilon)(b-a)+\varepsilon g(b)$ ✂. □

# Exercices

**9.22 Exercice.** Soit $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable. Soit $M:=\sup\limits_{x\in I}|f'(x)|$. Alors $f$ est $M$-lipschitzienne.

**9.23 Exercice.**

1. Les intervalles $I\subset\mathbb{R}$ de la forme $[a,b]$, $[a,\infty[$, $]-\infty,b]$, $]-\infty,\infty[$ (avec $a$, $b\in\mathbb{R}$) sont fermés.
2. Les autres intervalles $I\subset\mathbb{R}$ ne sont pas fermés.

**9.24 Exercice.** Nous nous proposons de montrer le théorème de Leibniz-Newton sans l'hypothèse $I=[a,b]$. Fixons $a\in I$. Soit $x\in I$. Soit $J=[c,d]\subset I$ tel que $a\in J$ et $x\in J$. Soit $F_J$ la primitive de $f$ sur $J$ telle que $F_J(a)=0$. Montrer que le nombre $F_J(x)$ ne dépend pas du choix de $J$, et que si on pose $F(x)=F_J(x)$ pour un intervalle $J$ comme ci-dessus, alors $F:I\to\mathbb{C}$ est une primitive de $f$.

**9.25 Exercice.** Résoudre les équations :

1. $y'=xy^2$.
2. $y'=y-y^2$. On pourra utiliser l'identité $\dfrac{1}{y-y^2}=\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{y}$.

**9.26 Exercice.** Nous nous proposons de montrer que la conclusion du Lemme 9.10 ne reste plus forcément vraie si nous ne supposons pas $b\in C^1$. Soient $a(x)\equiv 1$ et $b(z)=\begin{cases}2\sqrt{z}, & \text{si } z>0\\ 0, & \text{si } z\le 0\end{cases}$. Montrer que la fonction $y(x):=\begin{cases}x^2, & \text{si } x>0\\ 0, & \text{si } x\le 0\end{cases}$ vérifie le problème $\begin{cases}y'=a(x)b(y)\\ y(0)=0\end{cases}$.

**9.27 Exercice.** Prouver le théorème de Cantor pour $I$ quelconque en utilisant la stratégie suivante :

1. Montrer que, si deux ensembles sont en correspondance bijective, alors ou bien ils sont tous les deux au plus dénombrable, ou bien aucun ne l'est.
2. Montrer que tout intervalle non dégénéré est en bijection avec un intervalle de la forme $[0,1]$ ou $]0,1]$ ou $[0,1[$ ou $]0,1[$.
3. Adapter la preuve du cas $I=[0,1[$ pour montrer qu'aucun de ces intervalles n'est au plus dénombrable.
4. Conclure.

Question bonus (plus difficile) : montrer que deux intervalles non dégénérés sont en correspondance bijective.

# Chapitre 10

# Exercices de synthèse

**10.1 Exercice** (Calcul de $\cos 1$ et $\sin 1$)**.** Nous nous proposons de calculer des valeurs très approchées de $\sin 1$ et $\cos 1$.

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\cos x = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)$$

   et

$$\sin x = \lim_{n\to\infty}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right).$$

2. Montrer que

$$0 < \frac{1}{8!} - \frac{1}{10!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!} < \frac{1}{8!}, \quad \forall n \geq 5$$

   et

$$0 < \frac{1}{7!} - \frac{1}{9!} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n+1)!} < \frac{1}{7!}, \quad \forall n \geq 4.$$

3. Trouver une majoration de

$$\left|\cos 1 - \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!}\right)\right| \text{ et de } \left|\sin 1 - \left(1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}\right)\right|.$$

4. Conclusion ?

**10.2 Exercice** (Encadrement de $e$)**.** Nous nous proposons de montrer l'encadrement

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Soit $f : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$, $f(x) := \dfrac{x(1+x/2)}{x+1} - \ln(1+x)$. Etudier la monotonie de $f$ et en déduire que $f(x) > 0$, $\forall x > 0$.
2. En utilisant la question précédente, montrer que la fonction

$$g : ]0, \infty[ \to \mathbb{R}, \ g(x) := \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\ln(1+x),$$

   est strictement croissante.

3. De la question précédente, déduire la monotonie de la fonction

$$h: ]0,\infty[\to\mathbb{R},\ h(x) := (1+x)^{1/x+1/2}.$$

4. Calculer $\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1/2}$. En utilisant la question précédente, obtenir l'inégalité

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1/2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

5. Reprendre les questions précédentes, mais cette fois-ci avec les fonctions

$$f(x) := \frac{x}{x+1} - \ln(1+x),\ x>0,\ g(x) := \frac{1}{x}\ln(1+x),\ x>0,\ h(x) := (1+x)^{1/x},\ x>0,$$

pour obtenir l'inégalité

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < e, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

**10.3 Exercice** (Calcul de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$)**.** La conclusion de cet exercice est que $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n} = \ln 2$ ; il est possible d'aboutir à cette conclusion par une autre preuve (développement en série de $x\mapsto \ln(1+x)$).

1. Montrer les identités

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\cdots\frac{1}{2n-1} \text{ et } 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots\frac{1}{2n},\ \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

2. En utilisant la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées, montrer qu'il existe $l\in\mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) = l.$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{n+k+1} < \ln\left(1+\frac{k+1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n+k}, \quad \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \forall k\geq 0.$$

4. En sommant sur $k \in [\![0, n-1]\!]$ les inégalités de la question précédente, et en utilisant la question *1*, montrer que

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{2n} < \ln 2 < 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{1}{2n-1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

5. Conclure.

**10.4 Exercice** (Calcul d'une primitive de $f$ à partir de $f$)**.** Rappelons que toute fonction continue $f: I\to\mathbb{R}$ admet une primitive (théorème de Leibniz-Newton). Fixons $a\in I$, et soit $F$ la primitive de $f$ telle que $F(a) = 0$. Nous nous proposons d'établir la formule

$$\begin{aligned} F(b) &= (b-a)\lim_{n\to\infty}\frac{f(a)+f\left(a+\dfrac{b-a}{n}\right)+f\left(a+\dfrac{2(b-a)}{n}\right)+\cdots+f\left(a+\dfrac{(n-1)(b-a)}{n}\right)}{n} \\ &= \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right), \quad \forall b\in I. \end{aligned}$$

1. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$x, y \in [a,b],\ |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

2. Montrer qu'il existe $n_0$ tel que $\left|\dfrac{b-a}{n_0}\right| < \delta$.
3. Soient $n \geq n_0$ et $k \in [\![0, n-1]\!]$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer l'inégalité

$$\left|F\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) - F\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right) - \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| < \frac{|b-a|}{n}\varepsilon.$$

4. De la question précédente et de l'identité

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=0}^{n-1}\left(F\left(a + \frac{(k+1)(b-a)}{n}\right) - F\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right),$$

déduire l'inégalité

$$\left|F(b) - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + \frac{k(b-a)}{n}\right)\right| < |b-a|\varepsilon, \quad \forall n \geq n_0.$$

5. Conclure.

**10.5 Exercice** (Fonctions convexes)**.** Nous nous proposons de retrouver la caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables par la propriété $f''(x) \geq 0$, et d'établir quelques inégalités célèbres.

Par définition, une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *convexe* si :

$$x_1, x_2 \in I,\ \lambda_1, \lambda_2 \in [0,1],\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \implies f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2).$$

1. Montrer que $x \mapsto |x|$ est convexe.
2. (Inégalité de Jensen). Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Soient $x_1, \ldots, x_n$ in $I$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0,1]$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$. Montrer que

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Cas particulier :

$$f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x_1, \ldots, x_n \in I.$$

3. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ convexe. Soient $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \in I$ tels que $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$. Montrer que

$$f(x_2) + f(x_3) \leq f(x_1) + f(x_4).$$

Conclusion équivalente : si $0 < \varepsilon < x_4 - x_1$, alors

$$f(x_1 + \varepsilon) - f(x_1) \leq f(x_4) - f(x_4 - \varepsilon).$$

4. En déduire de la question précédente que, si $f$ est convexe et dérivable, alors $f'$ est croissante.
5. Réciproquement, supposons $f$ dérivable et $f'$ croissante. Obtenir l'inégalité

$$f(y) - f(x) \geq (y-x) f'(x), \quad \forall x, y \in I.$$

En déduire que $f$ est convexe.

6. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable. Montrer que $f$ est convexe si et seulement si $f'' \geq 0$.
7. Obtenir les inégalités suivantes :

$$\exp\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right) \leq \frac{1}{n}\left(e^{x_1} + \cdots e^{x_n}\right), \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$
$$\sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n > 0,$$
$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n > 0.$$

La deuxième inégalité est l'inégalité entre la *moyenne géométrique*

$$G(a_1, \ldots, a_n) := \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

et la *moyenne arithmétique*

$$A(a_1, \ldots, a_n) := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

La troisième inégalité est l'inégalité entre la moyenne géométrique et la *moyenne harmonique*

$$H(a_1, \ldots, a_n) := \frac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}.$$

8. Généraliser les inégalités ci-dessus en utilisant, pour la fonction exp, le cas général de l'inégalité de Jensen.

**10.6 Exercice** (Inégalité de Hölder)**.** Soient $p, q \in ]1, \infty[$. Les nombres $p$ et $q$ sont *conjugués* si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ (ou encore $pq = p + q$). Dans la suite, nous supposons $p$ et $q$ conjugués. Nous nous proposons d'établir l'*inégalité de Hölder*

$$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leq \left(|a_1|^p + \cdots + |a_n|^p\right)^{1/p} \left(|b_1|^q + \cdots + |b_n|^q\right)^{1/q}, \quad \forall\, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}.$$

1. Supposons l'inégalité à montrer vraie sous l'hypothèse supplémentaire $a_1, \ldots, a_n, b_1 \ldots, b_n \geq 0$. Montrer que l'inégalité est vraie sans cette hypothèse supplémentaire.
   Nous pouvons donc supposer, par la suite, $a_j \geq 0$ et $b_j \geq 0$, $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$. Posons
   $$\alpha := \left(a_1^p + \cdots + a_n^p\right)^{1/p}, \ \beta := \left(b_1^q + \cdots + b_n^q\right)^{1/q}.$$
2. Montrer l'*inégalité de Young*
   $$ab \leq \frac{A^p a^p}{p} + \frac{b^q}{qA^q}, \quad \forall\, a, b \geq 0, \ \forall\, A > 0.$$
3. En déduire l'inégalité
   $$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \leq \frac{A^p}{p} \alpha^p + \frac{1}{qA^q} \beta^q, \quad \forall\, A > 0.$$
4. Soit $f(A) := \dfrac{A^p}{p} \alpha^p + \dfrac{1}{qA^q} \beta^q$, $A > 0$. Calculer $\inf_{A>0} f(A)$.
5. Conclure.

6. Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continues. Montrer l'inégalité

$$\left| \int_a^b f(x)g(x)\,dx \right| \leq \left( \int_a^b |f(x)|^p\,dx \right)^{1/p} \left( \int_a^b |g(x)|^q\,dx \right)^{1/q}.$$

**10.7 Exercice** (Formule de Taylor-Lagrange)**.** Nous nous proposons d'établir la propriété suivante : si $f$ est $n$ fois dérivable dans $I$ et si $a, b \in I$, alors il existe $c \in ]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c);$$

c'est la *formule de Taylor-Lagrange à l'ordre $n$*.

Dans ce but, nous introduisons la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = f(b) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(b-x)^k}{k!} f^{(k)}(x) - M(b-x)^n,$$

où $M$ est une constante choisie telle que $g(a) = 0$.

1. Calculer $M$ et $g(b)$.
2. Montrer que $g$ est une fonction de Rolle sur $[a,b]$.
3. Montrer qu'il existe $c \in ]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.
4. Calculer $g'$.
5. Conclure.

**10.8 Exercice** (Forme faible de la formule de Stirling)**.** La célèbre *formule de Stirling* affirme que

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n},$$

au sens où

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Nous nous proposons de montrer la propriété plus faible

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} = l \in ]0,\infty[. \tag{10.1}$$

Soient

$$u_n := \ln \frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!} \text{ et } v_n := u_{n+1} - u_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

1. Montrer que la conclusion (10.1) équivaut à la convergence de la suite $(u_n)$, et que la convergence de la suite $(u_n)$ équivaut à la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} v_n$.

   Nous allons donc établir, dans la suite, que

   $$\text{la série } \sum_{n\geq 1} v_n \text{ converge.} \tag{10.2}$$

2. Montrer l'inégalité $\dfrac{1}{n^2} < \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$, $\forall\, n \geq 2$.

3. En déduire que

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<2, \quad \forall\, n\geq 2,$$

puis que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge.

4. Montrer que

$$v_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1, \quad \forall\, n\geq 1.$$

5. Nous allons montrer l'inégalité

$$|v_n|<\frac{1}{4n^2}, \quad \forall\, n\geq 1. \tag{10.3}$$

Expliquer pourquoi (10.3) implique (10.2).

6. Montrer, en utilisant la formule de Taylor-Lagrange, que

$$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)<x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}, \quad \forall\, x>0.$$

7. En déduire que

$$-\frac{1}{4n^2}<v_n<\frac{1}{12n^2}+\frac{1}{6n^3}, \quad \forall\, n\geq 1,$$

puis que (10.3) est vraie.

8. Conclure.