Sous-suites

Analyse 1

5 octobre 2013

En bref

* Définition
* Théorème de Ramsey
* Théorème de Bolzano-Weierstrass

Les inserts historiques s'appuient sur wikipédia

Sous-suite= ?

* On se donne une suite (liste) $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$
* Une *suite extraite* ou *sous-suite* est une sous-liste. Exemple : $x_0, x_2, x_5, x_{11}, \ldots$
* Définition rigoureuse : une sous-suite est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k\geq 0}$, avec $n_0 < n_1 < n_2 < \ldots$ (indices entiers)
* Ou encore $(x_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$, avec $\varphi(n) \in \mathbb{N}$ et $\varphi(n) < \varphi(n+1)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$
* Exemple : $(x_{2n+1})_{n\geq 0}$ et $(x_{2n})_{n\geq 0}$ sont des sous-suites de $(x_n)_{n\geq 0}$

Exercice

* Avec φ comme dans la définition de la sous-suite, nous avons $\varphi(n) \geq n$
* Si $x_n \to l$, alors $x_{\varphi(n)} \to l$

Solution.

* Première propriété par récurrence. $n = 0$ clair. Puis $\varphi(n+1) > \varphi(n) \geq n$, d'où $\varphi(n+1) \geq n+1$
* Supposons par exemple $l \in \mathbb{R}$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que $|x_n - l| < \varepsilon$ si $n \geq n_0$. Alors $|x_{\varphi(n)} - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$ $\square$

Travail individuel : examiner les cas $l = -\infty$ et $l = \infty$

Théorème de Ramsey

Toute suite $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ contient une sous-suite monotone

Approfondissement : preuve du théorème de Ramsey.
Notes de cours, Thm 5.13, p. 39

Théorème de Bolzano-Weierstrass

Toute suite $(x_n)_{n\geq 0} \subset \overline{\mathbb{R}}$ contient une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ ayant une limite $l \in \overline{\mathbb{R}}$

Si, de plus, $x_n \in [a, b]$, $\forall\, n$, alors $l \in [a, b]$

Démonstration.

- Soit $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite monotone de $(x_n)_{n\geq 0}$. Alors $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ a une limite
- Supposons $(x_n)_{n\geq 0} \subset [a,b]$ et, par exemple $x_{n_k} \nearrow$
- Alors

$$x_{n_k} \to l = \sup_k \{x_{n_k}\,;\, k \in \mathbb{N}\} \leq \sup[a,b] = b$$

- Par ailleurs, $l \geq x_{n_0}$
- D'où

$$a \leq x_{n_0} \leq l \leq b, \text{ càd } l \in [a,b] \qquad \square$$

Bernard Bolzano (1781–1848). Mathématicien, théologien, et (surtout) philosophe et logicien. Auteur du TVI et du théorème de Bolzano-Weierstrass. On lui doit la définition rigoureuse d'une limite

Karl (Theodor Wilhelm) Weierstrass (1815–1897). Père de l’analyse moderne. Une construction célèbre : une fonction continue nulle part dérivable. Plus ici : `http://fr.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass`