Sup

Analyse 1

5 octobre 2013

En bref

* Borne supérieure
* Axiome de la borne supérieure
* Applications à l'étude des limites de suites

Droite réelle achevée

Définition

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{\infty\}$=« la droite réelle achevée »

Ordre, opérations dans $\overline{\mathbb{R}}$

(liste non exhaustive)

* $-\infty \leq x \leq \infty, \forall x \in \mathbb{R}$
* $\pm\infty \mp \infty$, $\pm\infty / \pm\infty$ et $0 \cdot \pm\infty$ n'ont pas de sens (opérations « illicites »)
* $x \cdot \infty = \begin{cases} \infty, & \text{si } x > 0 \\ -\infty, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Définition

Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$

$*$ $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est un *majorant* de A si

$$M \geq x, \quad \forall x \in A$$

$*$ $m \in \overline{\mathbb{R}}$ est un *minorant* de A si

$$m \leq x, \quad \forall x \in A$$

- Une partie $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ a toujours un majorant (∞) et en a, en général, plusieurs
- *A* est *majorée* s'il existe un majorant *réel* de A : $\exists\, M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geq x$, $\forall\, x \in A$. (Notion analogue : *minorée*)
- Par exemple, si $A =]0, 1[$, alors $1, 2, 3, \ldots$, sont des majorants de A. $]0, 1[$ est majoré
- Intuitivement, 1 est un majorant spécial de cet A, au sens où il semble être le plus petit de tous les majorants possibles

Définition

Soit $A \subset \overline{\mathbb{R}}$

- $M \in \overline{\mathbb{R}}$ est le *supremum* ou la *borne supérieure* de A (et on écrit $M = \sup A$) si M est le plus petit majorant de A, càd

$$M \text{ majorant de } A \text{ et : } \forall\, M' \text{ majorant de } A,\, M \leq M'$$

- $m \in \overline{\mathbb{R}}$ est l'*infimum* ou la *borne inférieure* de A (et on écrit $m = \inf A$) si m est le plus grand minorant de A, càd

$$m \text{ minorant de } A \text{ et : } \forall\, m' \text{ minorant de } A,\, m \geq m'$$

- $*$ Par contraposée de la définition du $\sup A$: si $M = \sup A$ et si $M' < M$, alors M' n'est pas majorant de A
- $*$ Càd : il existe $x \in A$ tel que $x > M'$

Axiome de la borne supérieure

Toute partie non vide $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ possède (exactement) une borne supérieure $M = \sup A \in \overline{\mathbb{R}}$
Si, de plus $A \subset \mathbb{R}$ et A est majorée, alors $\sup A$ est un réel

Preuve de l'unicité.

Si M_1 et M_2 sont des sup de A, alors : M_1 majorant de A, d'où $M_2 \leq M_1$. De même, $M_1 \leq M_2$. D'où $M_1 = M_2$ $\square$

Exercice

Si $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ non vide, alors A admet exactement un inf. Plus précisément, $\inf A = -\sup(-A)$

Solution.

Soient $B := -A$ et $M = \sup B$ [But : $-M = \inf A$]

* On a $M \geq b, \forall\, b \in B$, cad $M \geq -a, \forall\, a \in A$, d'où $-M \leq a, \forall\, a \in A$
* Si $m' \leq a, \forall\, a \in A$, alors $-m' \geq -a, \forall\, a \in A$, càd $-m' \geq b, \forall\, b \in B$, d'où $-m' \geq M$, ou encore $m' \leq -M$
* Donc $-M$ est (l'unique) inf A $\square$

Exercice

Si $A \subset B$, alors $\sup A \leq \sup B$

Solution.

Soit $M := \sup B$. Alors M majorant de $B \implies M$ majorant de $A \implies M \geq \sup A$, càd $\sup B \geq \sup A$ $\square$

Exercice

On a $\sup [0, 1] = 1$

Solution.

- Soit $M := \sup [0, 1]$. Alors $M \geq 1$ (car $1 \in [0, 1]$)
- Par ailleurs, 1 majorant de $[0, 1]$, d'où $M \leq 1$
- D'où $\sup [0, 1] = 1$ $\square$

Exercice

On a $\sup \mathbb{N} = \infty$ (évident ?)

Solution.

* On a $M := \sup \mathbb{N} \geq 0$, d'où $\sup \mathbb{N} \in [0, \infty]$
* Si (par l'absurde) $M < \infty$, alors $M - 1 < M$
* D'où $M - 1$ n'est pas majorant de $\mathbb{N}$
* D'où $\exists\, n \in \mathbb{N}$ tel que $n > M - 1$
* D'où $n + 1 \in \mathbb{N}$ et $n + 1 > M$ ✂
* Donc $M = \infty$ $\square$

* Au passage : si $M' < \infty$, alors $M' < \sup \mathbb{N}$, et donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > M'$
* Nous verrons plus tard que ceci implique $\lim_{n\to\infty} n = \infty$ (évident ?)
* On se donne $\varepsilon > 0$. En prenant $M' := \frac{1}{\varepsilon}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$, d'où il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$
* Nous verrons plus tard que ceci implique $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ (évident ?)

Limites de suites

Soient $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $l \in \overline{\mathbb{R}}$. Nous allons donner un sens à $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ (ou $x_n \to l$ ~~quand $n \to \infty$~~)

Définition

* Si $l \in \mathbb{R}$, alors $x_n \to l \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - l| < \varepsilon, \forall\, n \geq n_0$
* $x_n \to \infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n > M$, $\forall\, n \geq n_0$
* $x_n \to -\infty \iff \forall\, M \in \mathbb{R}, \exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < M$, $\forall\, n \geq n_0$

Remarque

L'inégalité $|x_n - l| < \varepsilon$ est équivalente à

$$l - \varepsilon < x_n < l + \varepsilon$$

Exercice

On a $\lim_{n \to \infty} n = \infty$

Solution.

* On pose $x_n := n$
* Soit $M \in \mathbb{R}$. Déjà vu : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 > m$
* Alors $x_n = n \geq n_0 > M, \forall\, n \geq n_0$
* D'où $x_n > M, \forall\, n \geq n_0$ $\square$

Exercice

On a $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Solution.

* On pose $x_n := \frac{1}{n}$
* Soit $\varepsilon > 0$. Déjà vu : $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$
* Alors $0 < x_n = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$
* D'où $|x_n - 0| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$ $\square$

Exercice (Enlever des termes ne change pas la limite)

Si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ a la limite l, il en est de même pour la suite $(x_n)_{n\geq k}$

Solution.

* Cas à étudier : $l = -\infty$, $l = \infty$, $l \in \mathbb{R}$
* On étudie le cas où $l \in \mathbb{R}$
* Soit $\varepsilon > 0$. Soit n_0 tel que $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$
* Soit $n_1 := \max(n_0, k)$
* Alors $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq k$ tel que $n \geq n_1$ $\square$

Théorème

Une suite croissante $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ a comme limite $\sup\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$

Enoncé analogue pour une suite décroissante

Démonstration.

- Soient $A := \{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$ et $l := \sup A$. On doit mq $x_n \to l$
- 3 cas à distinguer : $l = -\infty$, $l = \infty$, $l \in \mathbb{R}$
- On examine le cas où $l \in \mathbb{R}$
- Soit $\varepsilon > 0$. Alors $l - \varepsilon < l$, d'où $l - \varepsilon$ n'est pas majorant de A : $\exists\, n_0$ tq $x_{n_0} > l - \varepsilon$
- D'où $l - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l$, $\forall\, n \geq n_0$
- D'où $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$ $\square$

Corollaire

Si $x_n \nearrow l$, alors $x_n \leq l, \forall\, n$

Enoncé analogue si $x_n \searrow l$

Corollaire (Recherche du sup à l'aide des suites)

Soient $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Si

$*$ M majorant de A

$*$ $\exists\,(x_n) \subset A$ tq $x_n \nearrow M$

alors $M = \sup A$

Enoncé analogue pour l'inf

Démonstration.

* Soient $B := \{x_n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$ et $N := \sup A$
* On a $M \geq N$
* On a $B \subset A$, d'où $\sup B \leq \sup A$
* Or, $\sup B = \lim_{n\to\infty} x_n = M$, d'où $M \leq N$
* D'où $M = N$ $\square$

Exemple

On a $\inf\,]0,1[= 0$

Solution.

* Soient $A :=]0,1[$ et $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n \geq 2$
* 0 est minorant de A
* On a $(x_n)_{n\geq 2} \subset A$, $(x_n)_{n\geq 2}$ décroissante, et $x_n \to 0$ $\square$

Le résultat suivant est plus général que le corollaire, et sera admis

Proposition

Soient $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ et $M \in \overline{\mathbb{R}}$. Alors $M = \sup A \iff [M$ majorant de A et $\exists\,(x_n) \subset A$ tq $x_n \to M]$

Remarque

En particulier, la suite (x_n) n'est pas supposée monotone

Limites et inégalités

Proposition (Les inégalités larges passent à la limite)

Si $x_n \to l$ et $x_n \geq a$, $\forall\, n$, alors $l \geq a$
Ou encore : $[x_n \geq a, \forall\, n] \implies \lim\limits_{n\to\infty} x_n \geq a$
Enoncé analogue pour « $\leq$ »
Mais pas pour « $>$ » ou « $<$ »
Plus généralement : si $x_n \to l$, $y_n \to L$ et $x_n \geq y_n$, alors $l \geq L$

Démonstration.

Montrons par exemple le dernier résultat

- 9 cas à considérer, en combinant les 3 possibilités ($-\infty$, ∞ et réel) pour l et L
- Considérons le cas où l, $L \in \mathbb{R}$
- Par l'absurde : $l < L$
- Soit $\varepsilon := \dfrac{L-l}{2}$, de sorte que $l + \varepsilon = L - \varepsilon$
- Soient n_0, n_1 tq $|x_n - l| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$, et $|y_n - L| < \varepsilon$, $\forall\, n \geq n_1$
- Soit $n := \max(n_0, n_1)$
- Alors $x_n < l + \varepsilon = L - \varepsilon < y_n$ ✂ $\square$

Limites et opérations

Résultat provisoirement admis

Proposition (Enoncé vague)

Les limites des suites commutent avec les opérations licites

Exemple

Si $x_n \to l$ et $y_n \to L$, alors $(x_n + y_n) \to l + L$ si $l + L$ est licite

Càd, sauf dans les cas exceptionnels $l + L = \pm\infty \mp \infty$

Exercice

Etudier le comportement de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ donnée par $x_0 \in \mathbb{R}$ et la récurrence $x_{n+1} = (x_n)^2 + 1$, $\forall\, n \geq 0$

Solution.

- $*$ Monotonie ?

  $x_{n+1} \,?\, x_n \iff (x_n)^2 + 1 \,?\, x_n \iff (x_n)^2 - x_n + 1 \,?\, 0$
- $*$ On a $x^2 - x + 1 > 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, d'où « ? »=« $>$ ». Donc suite (strictement) croissante
- $*$ Soit $l := \lim_{n\to\infty} x_n$
- $*$ On a $l \geq x_0$, d'où $l \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
- $*$ On a $x_{n+1} = (x_n)^2 + 1 \implies l = l^2 + 1$ (tout est licite !)
- $*$ D'où $l = \infty$
- $*$ Conclusion : $x_n \nearrow \infty$ $\square$

Suites adjacentes

Définition

Deux suites $(x_n), (y_n) \subset \mathbb{R}$ sont adjacentes si :

$*$ $x_n \nearrow$

$*$ $y_n \searrow$

$*$ $y_n - x_n \to 0$

Suites adjacentes

Théorème (des suites adjacentes)

Si $(x_n), (y_n)$ sont adjacentes, alors (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite (finie)

Solution.

* Comme $y_n - x_n \searrow 0$, on a $y_n - x_n \geq 0$
* Soient $l := \lim_{n\to\infty} x_n$ et $L := \lim_{n\to\infty} y_n$
* Comme $x_n \geq x_0$, nous avons $l \geq x_0 > -\infty$. De même, $L < \infty$
* On obtient que $l - L$ a un sens
* Comme $y_n - x_n \to 0$, on obtient $L = l \in \mathbb{R}$ $\square$

Exercice

Soit $z_n := 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n}, \forall\, n \geq 1$
On pose $x_n := z_{2n}$ et $y_n := z_{2n-1}, \forall\, n \geq 1$
Montrer que les suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ convergent vers la même limite

Remarque

La suite $(z_n)_{n\geq 1}$ se « casse » donc en deux parties convergeant vers la même limite $l \in \mathbb{R}$

Nous verrons plus tard que ceci implique $z_n \to l$ (principe du « recollement » des morceaux)

Solution.

* On a $y_n - x_n = \dfrac{1}{2n} \to 0$
* On a $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2} > 0$
* De même, $y_{n+1} - y_n = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n} < 0$ $\square$

Travail individuel

Exercice (Décaler une suite ne change pas la limite, et variations)

Si la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ a la limite l, il en est de même pour la suite $(x_{n+j})_{n\geq 0}$, $\forall j \in \mathbb{N}$

Même conclusion pour $(x_{kn+j})_{n\geq 0}$, avec $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}$

Travail individuel

* Refaire les preuves portant sur $M = \sup A$ et $m = \inf A$ quand $M = \infty$ ou $m = -\infty$
* Refaire les preuves portant sur $l = \lim_{n \to \infty} x_n$ quand $l = -\infty$ ou $l = \infty$
* Approfondissement : caractérisation du sup à l'aide des suites (sans supposer la monotonie). Notes de cours, Prop. 3.3, p. 25, et Prop. 6.18, p. 49

Travail individuel

* Opérations avec les limites des suites. Notes de cours, Prop. 5.1–5.6, pp. 35–37
* Approfondissement : preuve de la Prop. 5.3, p. 36
* Les inégalités passent à la limite : Prop. 5.8–5.10, p. 38
* Unicité de la limite : la limite d'une suite, si elle existe, est unique : Exo 3.14, p. 27