

Contrôle terminal

Le 11 mai 2026 – durée 120 minutes

Le barème, sur 22 points, est donné à titre indicatif

Les documents, calculatrices, téléphones et autres objets connectés sont interdits. Toute réponse doit être justifiée.

Question de cours. (4 p.) Compléter et montrer le résultat suivant : si f est deux fois différentiable et $g(t) := f((1-t)x + ty)$, alors g est deux fois dérivable, $g'(t) = \dots$ et $g''(t) = \dots$ (Donner et montrer les formules.)

Exercice # 1. (3 p.) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \begin{cases} \frac{x^3 - 3xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue.

Exercice # 2. (2 p.) Calculer explicitement :

(a) $d_1 f$, où $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := e^x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. (On justifiera l'existence de $d_1 f$.)

(b) $\nabla f(1, 2, 3)$, où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := xyz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

(c) $H_{(1,1,2)} f$, où $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := xyz$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice # 3. (2 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(t) := f(2t - t^2, t + t^3)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(t)$, avec $t \in \mathbb{R}$.

Exercice # 4. (2,5 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) := 2x^2 + 3 \cos(xy)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. Écrire, pour f , la formule de Taylor-Young en $(0, 0)$, à l'ordre deux et avec point intermédiaire.

Exercice # 5. (3 p.) Déterminer si la fonction $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) := 1 + 2y - 3y^2 + 2xz - 3z^2$, $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, admet un extremum local.

Exercice # 6. (4,5 p.) Calculer $\max\{2x + y; x^2 - xy + y^2 \leq 21\}$.

Exercice # 7. (1 p.) Modéliser le problème suivant : parmi tous les triangles rectangles de périmètre 1 m, en trouver un d'aire maximale.