Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 2e année
UE Analyse IV — Année 2025–2026

Contrôle terminal
Éléments de correction

Question de cours. (4 p.) Compléter et montrer le résultat suivant : si f est deux fois différentiable et $g(t) := f((1-t)x + ty)$, alors g est deux fois dérivable, $g'(t) = \cdots$ et $g''(t) = \cdots$ (Donner et montrer les formules.)

Solution. Soit $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert. La fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto h(t) := (1-t)x + ty$ est C^∞, car toutes ses coordonnées le sont. Le domaine de définition de g est $J := \{t \in \mathbb{R}\,;\ (1-t)x + ty \in U\}$, qui est ouvert, car $J = h^{-1}(U)$. Sur J, nous avons $g = f \circ h$.
Si f est différentiable, la règle de la chaîne nous donne que g l'est aussi, ce qui revient à g dérivable. Avec $h_j(t) = (1-t)x_j + ty_j$, $j = 1, \ldots, n$, les coordonnées de h, la règle de la chaîne donne, pour $t \in J$,

$$\begin{aligned} g'(t) &= \sum_{j=1}^n (\partial_j f)(h(t))h_j'(t) = \sum_{j=1}^n (\partial_j f)((1-t)x + ty)(y_j - x_j) \\ &= [(\nabla f)((1-t)x + ty)] \cdot (y - x). \end{aligned} \tag{1}$$

Si f est deux fois différentiable, $\partial_j f$ est différentiable, $j = 1, \ldots, n$. Le raisonnement précédent, avec $\partial_j f$ à la place de f, montre que $J \ni t \mapsto (\partial_j f)((1-t)x + ty)$ est dérivable, et que sa dérivée est

$$\frac{d}{dt}[(\partial_j f)((1-t)x + ty)] = \sum_{p=1}^n (\partial_p \partial_j f)((1-t)x + ty)(y_p - x_p). \tag{2}$$

En combinant (1) et (2), nous obtenons que g est deux fois dérivable et, pour $t \in J$,

$$g''(t) = \sum_{j=1}^n \sum_{p=1}^n (\partial_p \partial_j f)((1-t)x + ty)(y_p - x_p)(y_j - x_j) = [(H_{(1-t)x+ty} f)(y - x)] \cdot (y - x).$$

(Les arguments sont les mêmes si $f : U \to F$, avec F normé.) $\square$

Exercice # 1. (3 p.) Montrer que la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 - 3xy^2}{\sqrt{x^4 + y^4}}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

est continue.

Solution. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, comme quotient de la fonction polynomiale (donc continue) $(x, y) \mapsto x^3 - 3xy^2$ et de la fonction $(x, y) \mapsto \sqrt{x^4 + y^4}$, qui est continue (comme composée de fonctions continues) et non-nulle.
Pour conclure, il faut donc montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. Pour le calcul de la limite, toute norme convient. Le dénominateur suggère de prendre la norme $\|\ \|_4$ (mais d'autres choix sont possibles). Nous avons, si $(x, y) \neq (0, 0)$:

$$0 \le |f(x, y)| = \frac{|x^3 - 3xy^2|}{\|(x, y)\|_4^2} \le \frac{|x|^3 + 3|x||y|^2}{\|(x, y)\|_4^2} \le \frac{\|(x, y)\|_4^3 + 3\|(x, y)\|_4 \|(x, y)\|_4^2}{\|(x, y)\|_4^2} = 4\|(x, y)\|_4,$$

d'où, par encadrement (théorème des gendarmes), $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$. $\square$

Exercice # 2. (2 p.) Calculer explicitement :

(a) $d_1 f$, où $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=e^x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. (On justifiera l'existence de $d_1 f$.)

(b) $\nabla f(1,2,3)$, où $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z):=xyz$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$.

(c) $H_{(1,1,2)}f$, où $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z):=xyz$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$.

Solution. (a) f est dérivable, donc différentiable, et $d_1 f(h)=f'(1)h=e\,h$, $\forall\, h\in\mathbb{R}$. (b) Nous avons $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix} yz\\ xz\\ xy\end{pmatrix}$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$, d'où $\nabla f(1,2,3)=\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$. (c) Nous avons $H_{(x,y,z)}f=\begin{pmatrix}0 & z & y\\ z & 0 & x\\ y & x & 0\end{pmatrix}$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$, d'où $H_{(1,1,2)}f=\begin{pmatrix}0&2&1\\2&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$. □

Exercice # 3. (2 p.) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable. Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(t):=f(2t-t^2,t+t^3)$, $\forall\, t\in\mathbb{R}$. Montrer que g est dérivable et calculer $g'(t)$, avec $t\in\mathbb{R}$.

Solution. Notons (x,y) l'argument de f (donc $f=f(x,y)$). La fonction $\mathbb{R}\ni t\mapsto(2t-t^2,t+t^3)$ étant dérivable (car ses coordonnées le sont), donc différentiable , la règle de la chaîne montre que g est différentiable, donc dérivable, et

$$g'(t)=(\partial_x f)(2t-t^2,t+t^3)(2-2t)+(\partial_y f)(2t-t^2,t+t^3)(1+3t^2).$$ □

Exercice # 4. (2,5 p.) Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y):=2x^2+3\cos(xy)$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$. Écrire, pour f, la formule de Taylor-Young en $(0,0)$, à l'ordre deux et avec point intermédiaire.

Solution. f est clairement C^∞, et $f(0,0)=3$. Par ailleurs, nous avons $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}4x-3y\sin(xy)\\ -3x\sin(xy)\end{pmatrix}$, respectivement $H_{(x,y)}f=\begin{pmatrix}4-3y^2\cos(xy) & -3\sin(xy)-3xy\cos(xy)\\ -3\sin(xy)-3xy\cos(xy) & -3x^2\cos(xy)\end{pmatrix}$, $\forall\, x,y\in\mathbb{R}$, d'où en particulier $\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. La formule demandée devient : pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, il existe $(z,t)\in\,](0,0),(x,y)[$ tel que

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 3+\frac{1}{2}[(H_{(z,t)}f)(x,y)]\cdot(x,y)\\ &= 3+\frac{1}{2}\big[(4-3t^2\cos(zt))x^2-6(\sin(zt)+zt\cos(zt))xy-3z^2(\cos(zt))y^2\big].\end{aligned}$$ □

Exercice # 5. (3 p.) Déterminer si la fonction $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, $f(x,y,z):=1+2y-3y^2+2xz-3z^2$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$, admet un extremum local.

Solution. Clairement, $f\in C^\infty$ et nous avons $\nabla f(x,y,z)=\begin{pmatrix}2z\\ 2-6y\\ 2x-6z\end{pmatrix}$ et $H_{(x,y,z)}f=\begin{pmatrix}0&0&2\\0&-6&0\\2&0&-6\end{pmatrix}$, $\forall\, x,y,z\in\mathbb{R}$. L'équation caractéristique de la matrice hessienne est (à un signe près) $X(X+6)^2-4(X+6)=0$, de racines -6, $-3-\sqrt{13}$ et $-3+\sqrt{13}$. Comme la matrice hessienne a à la fois une racine >0 et une racine <0, f n'a pas d'extremum local. (Ses éventuels points critiques sont des points-selles.) □

Exercice # 6. (4,5 p.) Calculer $\max\{2x+3y\,;\,x^2-xy+y^2\le 21\}$.

Solution. Notons $f(x,y) := 2x+3y$, $g(x,y) := x^2-xy+y^2-21$, $V := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\, g(x,y)\le 0\}$. Le problème s'écrit (P) $\max\{f(x,y)\,;\,(x,y)\in V\}$.

Dans un premier temps, montrons que le $\max$ est atteint. f étant clairement continue, il suffit de montrer que V est compact. D'une part, $V = g^{-1}(]-\infty,0])$ est fermé (g est continue, $]-\infty,0]$ est fermé). D'autre part, nous avons

$$(x,y)\in V \Leftrightarrow x^2+xy+y^2\le 21 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2\le 21 \Rightarrow \frac{3}{4}y^2\le 21 \Rightarrow y^2\le 28 \Rightarrow |y|\le\sqrt{28},$$

et de même $|x|\le\sqrt{28}$. Il s'ensuit que V est borné, donc finalement compact.

Soit (x,y) solution de (P). Si la contrainte g n'est pas active en (x,y), alors $\nabla f(x,y)=0$, ce qui est impossible. La contrainte g est donc active en (x,y), d'où les vecteurs $\nabla f(x,y)$ et $\nabla g(x,y)$ sont liés : il existe λ_0, λ_1 pas les deux nuls tels que, au point (x,y), on ait :

$$\begin{cases} \lambda_0\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix}2x+y\\2y+x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\\ x^2+xy+y^2=21\end{cases}$$

Si $\lambda_1=0$, alors la première équation donne $\lambda_0=0$, ce qui est impossible. Donc $\lambda_1\neq 0$, ce qui donne le système

$$\begin{cases} 2x+y=-2\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\\ 2y+x=-3\dfrac{\lambda_0}{\lambda_1}\\ x^2+xy+y^2=21\end{cases}$$

Des deux premières équations, nous avons $3(2x+y)=2(2y+x)$, d'où $y=4x$. En remplaçant dans la dernière équation, nous trouvons $21x^2=21$, d'où soit $(x,y)=(1,4)$ soit $(x,y)=(-1,-4)$. En comparant les valeurs de f dans ces points, le maximum vaut 14 et est atteint en $(1,4)$. $\square$

Exercice # 7. (1 p.) Modéliser le problème suivant : parmi tous les triangles rectangles de périmètre 1 m, en trouver un d'aire maximale.

Solution. Les inconnues du problème sont les longueurs $a>0$ et $b>0$ des cathètes du triangle. L'hypothénuse étant de longueur $\sqrt{a^2+b^2}$ et l'aire du triangle $\frac{1}{2}ab$, le problème devient : trouver $\max\frac{1}{2}ab$ sous les contraintes $a>0$, $b>0$, $a+b+\sqrt{a^2+b^2}=1$. $\square$