
Contrôle continu #1 du 14 mars 2022

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits

---

Barème indicatif : 5 p. par exercice

Exercice 1 Soient $a_1, \ldots, a_n > 0$. Soit

$$\|x\| := a_1|x_1| + \cdots + a_n|x_n|, \ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Trouver la plus grande constante C_1 et la plus petite constante C_2 telles que

$$C_1\|x\|_1 \leq \|x\| \leq C_2\|x\|_1, \ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Rappel pour l'exercice 2. Si $k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\, dt = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq 0 \\ 2\pi, & \text{si } k = 0 \end{cases}.$$

Exercice 2 Soit

$$\|P\| := \left(\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2\, dt\right)^{1/2}, \ \forall\, P \in \mathbb{C}_n[X].$$

1. Si $P = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$, montrer que $\|P\|^2 = 2\pi\left(|a_0|^2 + |a_1|^2 + \cdots + |a_n|^2\right)$.
2. Montrer que $\|P'\| \leq n\|P\|$, $\forall\, P \in \mathbb{C}_n[X]$.

Exercice 3 (Exercice de cours) Soient $(E, \|\ \|)$, $(G, \|\ \|_G)$ deux espaces normés. Soit $T : E \to G$ une application linéaire et continue.
Soient

$$A := \{C \in [0, \infty[\,;\ \|T(x)\|_G \leq C\|x\|, \forall\, x \in E\}$$

et $m := \inf A$.
Montrer que $m \in A$.

Exercice 4 Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non vide.
Si I est à la fois ouvert et fermé, montrer que $I = \mathbb{R}$.

Indication : montrer que les bornes de I ne peuvent pas être finies.