Université Claude Bernard - Lyon 1 **Semestre printemps 2021–2022**

L3 UE : Approfondissement en analyse

CC2 du 2 mai 2022

Durée : 1 heure

Les documents et les téléphones/calculatrices/ordinateurs sont interdits

---

<u>**Exercice 1**</u> (Vu en TD, 5 pts)

1. Soient U un ouvert de $\mathbf{R}^n$, $f : U \to \mathbf{R}$ et $a, b \in U$ tels que $[a, b] \subset U$. On définit

$$g(t) := f((1-t)a + tb), \ \forall\, t \in [0, 1].$$

Si f est différentiable, calculer $g'(t)$.

2. Montrer que

$$2|xy| \leqslant x^2 + y^2, \ \forall\, x, y \in \mathbf{R}.$$

3. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Montrer que f est continue.

<u>**Exercice 2**</u> (4 pts) Déterminer les extrema locaux de la fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, définie par

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 3xy, \ \forall\, (x,y) \in \mathbf{R}^2.$$

<u>**Exercice 3**</u> (Vu en CM, 5 pts) Donner un sens à l'égalité suivante, et la montrer

$$O(\|h\|^2) = o(h).$$

<u>**Exercice 4**</u> (6 pts) Soit $I = [a, b]$ un intervalle compact de $\mathbf{R}$. On considère $\mathcal{C}^0(I)$, l'espace des fonctions réelles continues définies sur I, muni de la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$.

On considère une application linéaire $\Phi : \mathcal{C}^0(I) \to \mathbf{R}$ vérifiant

$$\Phi(f) \geq 0, \ \forall\, f \in \mathcal{C}^0(I) \text{ telle que } f \geq 0.$$

(On rappelle que, si $f, g : I \to \mathbf{R}$, alors $f \geq g$ signifie $f(x) \geq g(x)$, $\forall\, x \in I$.)

1. Montrer que, pour tout $f, g \in \mathcal{C}^0(I)$,

$$f \geq g \Longrightarrow \Phi(f) \geq \Phi(g).$$

2. Soit $f \in \mathcal{C}^0(I)$. En utilisant la question précédente, montrer que $|\Phi(f)| \leqslant \Phi(|f|)$.
3. Montrer que $\Phi(|f|) \leqslant \|f\|_\infty \Phi(\tilde{1})$, où $\tilde{1}$ est la fonction constante égale à 1.
4. En déduire que l'application Φ est continue et montrer que sa norme est $\Phi(\tilde{1})$.