Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Contrôle terminal
– le 23 mai 2022 –
– durée 90 minutes –

Le barème indiqué entre parenthèses est indicatif.

Exercice # 1 (6 p.). Soit

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ T(x, y) := 3x + 4y,\ \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous munissons $\mathbb{R}$ de la norme usuelle, $x \mapsto |x|$. Calculer la norme triple de T lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme :

(a) $\| \ \|_\infty$.
(b) $\| \ \|_1$.
(c) $\| \ \|_2$.

Exercice # 2 (3 p.). Si $P = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} a_j X^j \in \mathbb{R}[X]$, soit

$$\|P\| := \max\{|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|\}.$$

Nous admettons que

$$\mathbb{R}[X] \ni P \mapsto \|P\| \in \mathbb{R}$$

est une norme sur $\mathbb{R}[X]$, et nous munissons $\mathbb{R}[X]$ de cette norme.
Soit

$$T : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X],\ T(P) := P',\ \forall\,P \in \mathbb{R}[X].$$

Montrer que l'application T n'est pas continue.

Exercice # 3 (4 p.). Soient $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables.
Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2),\ \forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que f est différentiable et, si $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$, calculer $d_a f$.

Exercice # 4 (6 p.). Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ f(x, y) := e^{3x} + e^{3y} - 3e^{x+y},\ \forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Trouver les points critiques de f et déterminer leur nature.

(b) Montrer, par l'étude de la fonction

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R},$$

que

$$f(x, y) \geq f(y/2, y), \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

(c) Montrer que

$$f(y/2, y) \geq -1, \ \forall\, y \in \mathbb{R}.$$

(d) Que peut-on donc dire de plus au sujet des points critiques trouvés au point (a) ?

Exercice # 5 (6 p.). Soit V le volume du parallélépipède rectangle dont les arrêtes issues d'un sommet sont de longueurs a, b et c.

Nous supposons que $a + b + c = 9$, et nous voulons trouver a, b et c de sorte que V soit le plus grand possible.

(a) Formuler cette question comme un problème de maximisation sous contrainte. Préciser les contraintes et la fonction à maximiser.

(b) On suppose que la solution du problème existe.

  (i) Montrer que le problème peut s'écrire comme un problème dont les contraintes d'inégalité sont larges.

  (ii) Montrer que les parallélépipèdes de volume V maximal sont les cubes dont les arrêtes sont de longueur 3.

(c) (Question plus difficile.) Montrer que la solution du problème de maximisation existe. Pour ce faire, une possibilité est de transformer le problème en un problème dont les contraintes d'inégalité sont larges.