Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^{e} année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Cours $\#1$
– le 31 janvier 2022 –

Première partie. Espaces normés

Chapitre $\#$1. Exemples de normes

1. Exemples importants d'espaces vectoriels :
   (a) $\mathbb{K}$.
   (b) $\mathbb{K}^n$.
   (c) $M_{m,n}(\mathbb{K})$.
   (d) L'espace $\mathscr{F}(A, \mathbb{K})$ des fonctions $f : A \to \mathbb{K}$.
   (e) L'espace $\mathcal{s}$ des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ de $\mathbb{K}$.
   (f) $C([0,1]; \mathbb{K})$.
   (g) $\mathcal{c} := \{(a_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{s}\ ;\ (a_n)_{n\geq 0}$ converge$\}$.
2. Norme.
3. Premiers exemples de normes sur $\mathbb{K}^n$:
   (a) $|\ |$ sur $\mathbb{K}$.
   (b) $\|\ \|_1$.
   (c) Petit exercice : vérifier que $\|x\|_1 \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{K}^n$, et que $\|\ \|_1$ vérifie les axiomes (i) et (iii) d'une norme.
   (d) $\|\ \|_\infty$.
   (e) Petit exercice : vérifier que $\|x\|_\infty \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{K}^n$, et que $\|\ \|_\infty$ vérifie les axiomes (i) et (iii) d'une norme.
   (f) Lemme. Si $t \geq 0$ et $A \subset \mathbb{R}$ est non vide et fini, alors $\max{(tA)} = t \max A$.
4. Inégalité de Cauchy-Schwarz :

(a) Identité de Lagrange.

(b) Principe du trinôme.

(c) Inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire.

(d) Exercice de cours. Soient $a_1, \ldots, a_n$, $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$(a_1)^2 \geq (a_2)^2 + \cdots + (a_n)^2.$$

Montrer l'inégalité d'Áczel

$$\begin{aligned}&(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \cdots - a_n b_n)^2 \\ &\geq \left[(a_1)^2 - (a_2)^2 - \cdots - (a_n)^2\right] \times \left[(b_1)^2 - (b_2)^2 - \cdots - (b_n)^2\right].\end{aligned}$$

Indication : considérer la fonction

$$t \mapsto f(t) := (a_1 t + b_1)^2 - (a_2 t + b_2)^2 - \cdots - (a_n t + b_n)^2.$$