Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Cours $\#2$
– le 7 février 2022 –

Première partie. Espaces normés

Chapitre $\#1$. Exemples de normes

5. $\| \|_2$ dans $\mathbb{K}^n$.
6. $\| \|_p$ dans $\mathbb{K}^n$, $1 < p < \infty$:
   (a) Définition.
   (b) Petit exercice. Montrer que $\|x\|_p \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{K}^n$, et que $\| \|_p$ vérifie les axiomes (i) et (iii) d'une norme.
   (c) Exposant conjugué q.
   (d) Petit exercice. Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer les identités suivantes :
   $$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\,;$$
   $$pq = p + q.$$
   (e) Exercice de cours. Montrer l'inégalité de Young : si $1 < p < \infty$ et q est le conjugué de p, alors
   $$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall\, a, b \geq 0.$$
   (f) L'inégalité de Young à partir de l'inégalité de Jensen.
   (g) Inégalité de Hölder si $1 < p < \infty$.
   (h) Petit exercice : montrer l'inégalité de Hölder si $p = 1$ ou $p = \infty$.
   (i) Inégalité de Minkowski.
7. $\| \|_\infty$ sur $C([0, 1], \mathbb{K})$.

8. Petit exercice. Montrer que $\| \|_\infty$ sur $C([0,1],\mathbb{K})$ est positive et finie, et que $\|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$.

Chapitre $\#2$. Topologie

Le cadre est celui d'un espace normé $(E, \| \|)$. Au besoin, nous notons la norme sur E $\| \|_E$. Rappels de notions vues au premier semestre :

1. Distance (induite par la norme) : $d(x,y) := \|x-y\|, \forall\, x,y \in E$.
2. Petit exercice. Montrer que d est une distance, c'est-à-dire :
   (a) $d(x,y) \geq 0, \forall\, x,y \in E$.
   (b) $d(x,y) = d(y,x), \forall\, x,y \in E$.
   (c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z), \forall\, x,y,z \in E$ (inégalité triangulaire).
   (d) $\forall\, x,y \in E, d(x,y) = 0 \implies x = y$.
3. Boule ouverte, boule fermée, sphère.
4. Suite convergente.
5. Fermé (F).
6. Ouvert (U).
7. Exemples : $B(a,r)$ est ouverte, $\overline{B}(a,r)$ et fermée.