Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^{e} année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Cours $\#5$
– le 21 mars 2022 –

Première partie. Espaces normés

Chapitre $\#3$. Topologie dans $\mathbb{K}^n$ (et les e. v. n. de dimension finie)

11. Comment montrer qu'une fonction concrète est continue.
12. Lemme de Riesz (énoncé) : dans un espace normé de dimension infinie, $\overline{B}(0,1)$ est un fermé, borné qui n'est pas compact . Idem pour $S(0,1)$.

Deuxième partie. Calcul différentiel (dans les e. v. n. réels de dimension finie)

Le cadre est celui de $\mathbb{R}^n$ ou de tout autre espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$, de dimension finie, muni d'une norme. Les fonctions sont définies sur U, ouvert de E : $f : U \to \mathbb{R}$ (ou $f : U \to G$, avec $(G, \| \|_G)$ espace normé sur $\mathbb{R}$).

Chapitre 1. Différentielle

1. o et O.
2. Exercice de cours. *À rendre pour le 28 mars : la rédaction de deux questions parmi (c)–(j).*

   Nous considérons des fonctions définies pour $\|h\| < R$ (même R), éventuellement sauf pour $h = 0$. En leur donnant un sens précis, montrer les règles suivantes, les o et O s'entendant quand $h \to 0$.

   (a) $o(f)+o(f) = o(f)$, que l'on écrira le plus souvent $o(f(h))+o(f(h)) = o(f(h))$.

   (b) $o(f(h)) = O(f(h))$.

   (c) $o(O(f(h))) = o(f(h))$.

   (d) $o(o(f(h))) = o(f(h))$.

   (e) $O(o(f(h))) = o(f(h))$.

(f) $O(f(h))O(g(h)) = O(f(h)g(h))$.

(g) $o(f(h))O(g(h)) = o(f(h)g(h))$.

(h) $O(\|h\|^2) = o(\|h\|)$.

(i) $O(\|h\|) = o(1)$.

(j) $[g(h) = o(f(h)),\, F(h) = o(1)] \implies g(F(h)) = o(f(F(h)))$.

3. Dérivée directionnelle.

   (a) Définition.

   (b) La définition a un sens.

4. Dérivées partielles.

5. Gradient.

6. Différentielle.

   (a) Unicité de la différentielle.

   (b) Lien entre différentielle et dérivées directionnelles.