Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques $3^e$ année

Mathématiques pour l'enseignement
**UE Approfondissement en analyse**

**Cours** $\#8$
– le 11 avril 2022 –

## Deuxième partie. Calcul différentiel

### Chapitre $\#2$. Optimisation sous contrainte

Le cadre est le suivant :

1. $E = \mathbb{R}^n$.
2. $U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3. $f, g_i, h_j : U \to \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $C^1$.

1. Théorème des multiplicateurs de Fritz John. Nous considérons le problème de minimisation

$$\begin{aligned} &\min f(x) \ \text{ sous les contraintes} \\ &\qquad x \in U,\ g_i(x) \le 0,\ i \in [\![1, p]\!],\ h_j(x) = 0,\ j \in [\![1, q]\!]. \end{aligned} \tag{1}$$

Si $x^0 \in U$ est un point de minimum pour le problème (1), alors il existe des scalaires $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_p \ge 0$, $\lambda_1, \ldots \lambda_q \in \mathbb{R}$, tels que :

(a) Nous avons

$$\mu_0 \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^{p} \mu_i \nabla g_i(x^0) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \nabla h_j(x^0) = 0. \tag{2}$$

(b) Au moins l'un des scalaires est non nul.

(c) Si $i \in [\![1, p]\!]$ est tel que $g_i(x^0) < 0$,[1] alors $\mu_i = 0$.

1. Pour un tel $i$, on dit que la contrainte $g_i(x) \le 0$ est *inactive* en $x^0$.

2. Corollaire : multiplicateurs de Lagrange. Nous considérons le problème de minimisation

$$\begin{aligned}\min f(x) \;\; &\text{sous les contraintes} \\ & x \in U,\; h_j(x) = 0,\; j \in [\![1, q]\!].\end{aligned} \tag{3}$$

Si

$$\begin{aligned}\forall\, x \in U, &[h_j(x) = 0, j \in [\![1, q]\!]] \\ & \implies [\nabla h_1(x), \dots, \nabla h_q(x) \text{ sont libres}],\end{aligned} \tag{4}$$

alors : si $x^0 \in U$ est un point de minimum pour le problème (3), alors il existe $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in [\![1, q]\!]$, tels que

$$\nabla f(x^0) + \sum_{j=1}^{q} \lambda_j \, \nabla h_j(x^0) = 0. \tag{5}$$

3. Exercice.

   (a) Calculer

   $$\max x_1\, x_2 \cdots x_n \text{ sous } x_j \geq 0,\; j \in [\![1, n]\!],\; \sum_{j=1}^{n} x_j = 1. \tag{6}$$

   (b) Montrer l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique :

   $$\sqrt[n]{\prod_{j=1}^{n} x_j} \leq \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j,\; \forall\, x_j \geq 0,\; j \in [\![1, n]\!]. \tag{7}$$

*Solution.* (a) Mettons le problème sous la forme du théorème de Fritz John :

$$-\min(\underbrace{-x_1 \cdots x_n}_{:=f(x)}) \text{ sous } \underbrace{-x_j}_{:=g_j(x)} \leq 0, j \in [\![1, n]\!],\; \underbrace{\sum_{j=1}^{n} x_j - 1}_{:=h_1(x)} = 0.$$

Les conditions du théorème de Fritz John sont satisfaites, avec $U := \mathbb{R}^n$ (vérifier). Montrons d'abord que le minimum est atteint. L'ensemble des points vérifiant les contraintes est fermé (vérifier) et contenu dans la boule unité fermée pour la norme $\| \|_1$ (vérifier), donc est compact. Il s'ensuit que le minimum sous contrainte est atteint (justifier).

Soit $x^0 = (x_1, \dots, x_n)$ un point de minimum $f$ sous contraintes. Notons que $f(x^0) \leq f(1/n, \dots, 1/n) < 0$, et donc toutes les coordonnées de $x^0$ sont $\neq 0$. Il s'ensuit que les contraintes d'inégalité sont inactives en $x^0$, et donc il existe $\mu_0 \geq 0$, $\lambda_1 \in \mathbb{R}$, au moins l'un non nul, tels que $\mu_0 \nabla f(x^0) + \lambda_1 \nabla h_1(x^0) = 0$, ou encore

$$-\mu_0 \prod_{k \neq j} x_k + \lambda_1 = 0, \ \forall\, j \in [\![1, n]\!]. \tag{8}$$

Si $\mu_0 = 0$, alors $\lambda_1 = 0$, ce qui ne convient pas. Nous avons donc $\mu_0 \neq 0$; quitte à diviser (8) par $\mu_0$, nous pouvons supposer que $\mu_0 = 1$, et (8) devient

$$\prod_{k \neq j} x_k = \lambda_1, \ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \tag{9}$$

avec $\lambda_1 \neq 0$ (car tous les $x_j$ sont non nuls).

En multipliant (9) par $x_j$, nous obtenons $\lambda_1 x_j = \prod_{k=1}^{n} x_k$, $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$, et donc tous les $x_j$ sont égaux. La contrainte $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ implique $x^0 = (1/n, \dots, 1/n)$ et donc le maximum recherché est $-f(1/n, \dots, 1/n) = (1/n)^n$.

(b) L'inégalité équivaut à (justifier)

$$\prod_{j=1}^{n} x_j \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^n. \tag{10}$$

Si tous les $x_j$ sont nuls, (10) est claire. Dans le cas contraire, nous avons

$$S := \sum_{j=1}^{n} x_j > 0. \tag{11}$$

Posons

$$y_j := \frac{x_j}{S}, \ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \tag{12}$$

de sorte que $y_j \geq 0, \forall\, j \in [\![1, n]\!]$, et $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$ (vérifier). Le point (a) donne :

$$\prod_{j=1}^{n} y_j \leq \left(\frac{1}{n}\right)^n. \tag{13}$$

En utilisant les définitions (12) de $y_j$ et (11) de $S$, (13) donne (10). □

**Chapitre #3. Lemme de Poincaré**

Le cadre est le suivant :

1. $E = \mathbb{R}^n$.
2. $U$ est un ouvert *convexe* de $\mathbb{R}^n$.
3. $F = (F_1, \ldots, F_n) : U \to \mathbb{R}^n$ est de classe $C^1$. [2]

1. Supposons qu'il existe $f : U \to \mathbb{R}$ telle que

$$\nabla f = F \text{ dans } U, \text{ c'est-à-dire } \nabla f(x) = F(x),\ \forall\, x \in U. \tag{14}$$

   Alors :

   (a) $f$ est unique à une constante additive près.

   (b) Nous avons

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} = \frac{\partial F_k}{\partial x_j},\ \forall\, j, k \in [\![1, n]\!]. \tag{15}$$

2. Lemme de Poincaré. Supposons (15). Alors il existe $f$ vérifiant (14). Plus spécifiquement, si $x^0 \in U$, alors toutes les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ vérifiant (14) sont données par :

$$f(x) = C + \int_0^1 [F((1-t)\,x^0 + t\,x)] \cdot (x - x^0)\,dt,\ \forall\, x \in U. \tag{16}$$

2. Une fonction $F : A \to \mathbb{R}^n$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$, est un *champ de vecteurs*. Donc $F$ est un champ de vecteurs de classe $C^1$.

*Preuve du lemme de Poincaré.* Pour simplifier les formules, nous supposons que $x^0 = 0$. Compte tenu de la question 1 (a), il suffit de montrer que l'intégrale

$$U \ni x \mapsto f(x) := \int_0^1 [F((1-t)\,x)] \cdot x\,dt = \int_0^1 \sum_{j=1}^n F_j((1-t)\,x)\,x_j\,dt \tag{17}$$

(i) est bien définie ;

(ii) qu'elle a des dérivées partielles $\partial_k f$, $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$ ;

(iii) que les dérivées partielles vérifient $\partial_k f = F_k$, $\forall\, k \in [\![1, n]\!]$.

(i) Rappelons que $[0,1] \ni t \mapsto (1-t)\,x = (1-t)\,x + t \cdot 0$ est l'équation du segment $[0, x]$. Comme $0, x \in U$ et, par hypothèse, $U$ est convexe, il s'en suit que $[0, x] \subset U$, et donc l'intégrande

$$g(x,t) := [F((1-t)\,x)] \cdot x = \sum_{j=1}^n F_j((1-t)\,x)\,x_j$$

est bien définie. Par ailleurs,

$$\text{à } x \in U \text{ fixé, } g \text{ est continue en } t. \tag{18}$$

En effet, par hypothèse, $F_j$ est de classe $C^1$, donc différentiable, donc continue. Les fonctions polynômiales sont continues, donc $t \mapsto (1-t)\,x$ est continue car elle vaut $t \mapsto ((1-t)\,x_1, \ldots, (1-t)\,x_n))$ (justifier). Il s'ensuit que $t \mapsto g(x,t)$ est continue, comme composée, somme, produit de fonctions continues. Par conséquent, l'intégrande de (17) est continue en $t$, donc $f$ est bien définie, en tant qu'intégrale de Riemann d'une fonction continue.

(b) Les fonctions $F_j$, $x \mapsto x_j$ et $t \mapsto (1-t)\,x$ étant de classe $C^1$ (la première, par hypothèse, les autres, comme fonctions polynômiales), elles sont différentiables, et donc nous pouvons appliquer la règle de la chaîne pour la fonction composée, et la règle pour la dérivée (partielle) d'un produit et obtenir :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} g(x,t) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{j=1}^n F_j((1-t)\,x_1, \ldots, (1-t)\,x_n)\,x_j \right) \\
&= \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial}{\partial x_k} x_j \right) F_j((1-t)\,x) \\
&\quad + \sum_{j=1}^n x_j \sum_{\ell=1}^n \left[ \frac{\partial F_j}{\partial x_\ell}((1-t)\,x) \right] \frac{\partial}{\partial x_k}((1-t)\,x_\ell).
\end{aligned} \tag{19}$$

En utilisant le fait que

$$\frac{\partial}{\partial x_k} x_\ell = \begin{cases} 0, & \text{si } \ell \neq k \\ 1, & \text{si } \ell = k \end{cases},$$

nous obtenons, de (20) :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_k} g(x,t) \\ &\qquad = \underbrace{F_k((1-t)\,x) + (1-t)\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial F_j}{\partial x_k}((1-t)\,x)\right)}_{:=h_k(x,t)}. \end{aligned} \tag{20}$$

Notons que $h_k$ est continue en $(x,t)$(justifier). Résumé : à $x$ fixé, $[0,1] \ni t \mapsto g(x,t)$ est continue ; à $t$ fixé, les dérivées partielles

$$U \times [0,1] \ni (x,t) \mapsto \frac{\partial}{\partial x_k} g(x,t)$$

sont continues, $\forall\, k \in [\![1,n]\!]$. Par un théorème sur les intégrales à paramètres, les dérivées partielles de $x \mapsto f(x) = \displaystyle\int_0^1 g(x,t)\,dt$ existent, sont continues et sont données par

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \int_0^1 h_k(x,t)\,dt \tag{21}$$

(« la dérivée de l'intégrale est l'intégrale de la dérivée »).

Nous n'avons pas encore utilisé l'hypothèse (15) ! Grâce à celle-ci, nous obtenons :

$$h_k(x,t) = F_k((1-t)\,x) + (1-t)\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\frac{\partial F_k}{\partial x_j}((1-t)\,x)\right). \tag{22}$$

Maintenant, la clé de la preuve : le membre de droite de (22) est une dérivée par rapport à $t$. En effet, la règle de la chaîne et la règle pour dériver un produit donnent (vérifier) :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[(1-t)\,F_k((1-t)\,x)] \\ &= -F_k((1-t)\,x) + (1-t)\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_k}{\partial x_j}((1-t)\,x)\,(-x_j). \end{aligned} \tag{23}$$

De (22) et (23), nous obtenons

$$h_k(x,t) = -\frac{d}{dt}[(1-t)\,F_k((1-t)\,x)]. \tag{24}$$

La deuxième ligne de (23) étant continue par rapport à $t$ (justifier), (21), (24) et le théorème de Leibniz-Newton impliquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) &= -\int_0^1 \frac{d}{dt}[(1-t)\,F_k((1-t)\,x)]\,dt \\ &= -\Big[(1-t)\,F_k((1-t)\,x)\Big]_{t=0}^{t=1} = F_k(x),\ \forall\, k \in [\![1,n]\!].\end{aligned} \qquad \square$$