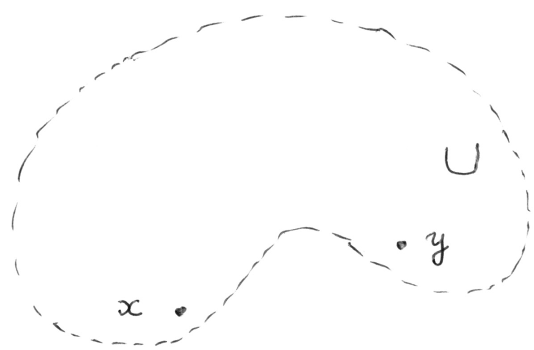
Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3e année

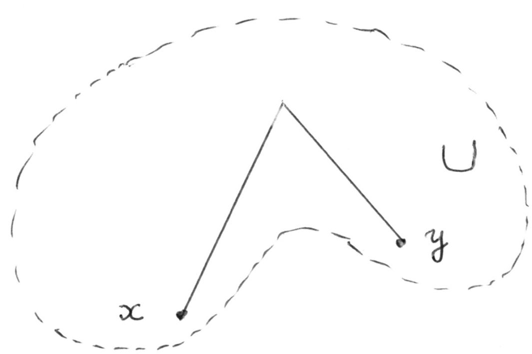
Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Auto-contrôle
– le 7 avril 2020 –
– tous documents –

Question # 1. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, de la forme indiquée ci-dessus.



Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que $\nabla f(z) = 0, \forall\, z \in U$. Soient x, y comme ci-desssus. Montrer que $f(x) = f(y)$.



Indication

Question # 2. Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Montrer que :

$$[f \in C^2] \implies [f \text{ deux fois différentiable}].$$

Exercice # 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) := 3\,x^2y^2 + x^4 + y^4 - 2\,x^2 - 2\,y^2,\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Montrer que $f(x,y) \geq r^4 - 2\,r^2$, où $r^2 := x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \geq -1$.
2. Montrer que f a exactement quatre points de minimum global.
3. Écrire la formule de Taylor à l'ordre deux avec reste en o dans l'un de ces points de minimum global (de votre choix).

Exercice # 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$f(x,y) := \max\{x^2, y^2\},\ \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Représenter sur un dessin les régions où $f(x,y) = x^2$, respectivement $f(x,y) = y^2$.
2. Montrer que f est différentiable en $(0,0)$.
3. Est-elle continue en $(0,0)$?
4. Question bonus (qui demande plus de temps). Trouver tous les points $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ où f est différentiable.