Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Contrôle continu $\#1$
– le 9 mars 2020 –
– durée 60 minutes –

On rappelle que la norme triple d'une application linéaire et continue $T : E \to F$ entre deux espaces normés E et F est la plus petite constante C telle que l'inégalité $\|T(x)\|_F \leq C\|x\|_E$ soit vraie pour tout $x \in E$.

Question de cours # 1. Énoncer rigoureusement et montrer une propriété des o et/ou O (cf exercice de cours $\#6$).

Question de cours # 2. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé. Soit $x_0 \in E$. Montrer que $f : E \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = \|x - x_0\|$, $\forall\, x \in E$, est lipschitzienne.

Question de cours # 3. Montrer que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.

Exercice # 1. On note par E l'ensemble des polynômes à coefficients réels, $E = \mathbb{R}[X]$, et on y définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{\infty} |P^{(k)}(0)| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|,$$

où $P^{(k)}$ désigne la dérivée d'ordre k de P. On désigne par D l'opérateur de dérivation :

$$D : E \to E, \qquad D(P) = P'.$$

1. Montrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E. Justifiez soigneusement votre réponse.
2. Montrer que $D : (E, N_1) \to (E, N_1)$ est continu et calculer sa norme triple.
3. Montrer que $D : (E, N_2) \to (E, N_2)$ n'est pas continu.
4. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?

TSVP

Exercice # 2. On considère l'espace E des fonctions continues de $[-1, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme

$$\forall f \in E, \qquad \|f\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |f(t)|.$$

On définit l'opérateur $T : E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall f \in E, \qquad T(f) = \int_{-1}^{1} t f(t)\, dt.$$

Montrer que T est linéaire et continu et calculer sa norme triple.