Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Contrôle continu (à distance) $\#2$
– le 14 avril 2020 –
– durée 60 minutes + 30 minutes pour numériser la copie –

Des questions concernant l'énoncé pendant le contrôle ?
Les poser sur le **forum** ou écrire à **mironescu@math.univ-lyon1.fr**

Exercice $\#$ 1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable, $f = f(x, y)$.
Soit

$$g :]0, \infty[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ g(r, \theta) := f(r \cos \theta, r \sin \theta),\ \forall\, r > 0,\ \forall\, \theta \in \mathbb{R}.$$

1. Montrer que g est différentiable.
2. Exprimer les dérivées partielles du premier ordre de g en fonction de celles de f. On écrira explicitement en quels points sont calculées ces dérivées.

Exercice $\#$ 2. On considère la matrice suivante

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} 12x & 6 \\ 6 & a\,xy - 6 \end{pmatrix},\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

où a est une constante réelle.

1. Trouver toutes les constantes a telles que la matrice $A(x, y)$ soit la matrice hessienne d'une certaine fonction $f = f(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$.

TSVP

On suppose dorénavant que $a = 0$.

2. Montrer que A est la matrice hessienne de la fonction f si et seulement si

$$f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma, \tag{$*$}$$

   où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sont des constantes arbitraires.

3. Soit f comme dans $(*)$. Trouver une CNS sur les constantes α, β, γ pour que les points $(1, 1)$ et $(-2, -2)$ soient des points critiques de f.
4. Supposons que α, β, γ vérifient la CNS trouvée dans la question précédente. Trouver tous les points d'extremum de la fonction f et préciser si ce sont des points de minimum ou de maximum, global ou seulement local.

Exercice $\#$ 3. Soit $a > 0$ et $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y) := \frac{x \sin(|y|^a)}{x^2 + y^2}, \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

1. Si $0 < a \leq 1$, montrer que f ne se prolonge pas par continuité en $(0, 0)$.
2. Si $a > 1$, montrer que f se prolonge par continuité en $(0, 0)$, avec la valeur 0.

Posons $g(x, y) := \begin{cases} f(x, y), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$.

3. Si $0 < a \leq 2$, montrer que g n'est pas différentiable en $(0, 0)$.
4. Si $a > 2$, montrer que g est différentiable en $(0, 0)$.