Complément $\#1$
– 28 janvier 2020 –

Première partie. Espaces normés

Chapitre $\#2$. Topologie

Le cadre est le suivant

1. $(E, \|\ \|)$ est un espace normé sur $\mathbb{K}$. d est la distance associée à $\|\ \|$.
2. $(G, \|\|\ \|\|)$ est un espace normé sur $\mathbb{K}$. δ est la distance associée à $\|\|\ \|\|$.
   Cas particulier : $(G, \|\|\ \|\|) = (\mathbb{K}, |\ |)$. Dans ce cas, $\delta(x, y) = |x - y|$, $\forall\, x, y \in \mathbb{K}$.

Proposition 1. Soient $(x^j), (y^j) \subset G$, $x, y \in G$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si $x^j \to x$ et $y^j \to y$, alors

1. $x^j + y^j \to x + y$.
2. $\lambda x^j \to \lambda x$.

Démonstration. 1. Nous avons

$$\begin{aligned}\delta(x^j + y^j, x + y) &= \left|\left|\left|(x^j + y^j) - (x + y)\right|\right|\right| = \left|\left|\left|(x^j - x) + (y^j - y)\right|\right|\right| \\ &\overset{(a)}{\leq} \left|\left|\left|x^j - x\right|\right|\right| + \left|\left|\left|y^j - y\right|\right|\right| = \delta(x^j, x) + \delta(y^j, y) \overset{(b)}{\to} 0,\end{aligned}$$

d'où $x^j + y^j \to x + y$. Ici, (a) suit de l'inégalité triangulaire, (b) des hypothèses $x^j \to x$ et $y^j \to y$.
2. Nous avons

$$\delta(\lambda x^j, \lambda x) = \left|\left|\left|\lambda x^j - \lambda x\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\lambda(x^j - x)\right|\right|\right| \overset{(a)}{=} |\lambda|\, \left|\left|\left|x^j - x\right|\right|\right| \overset{(b)}{\to} 0,$$

d'où $\lambda x^j \to \lambda x$. Ici, (a) suit de l'axiome (i) de la norme, (b) de $x^j \to x$. $\square$

Proposition 2. Soient $(\lambda^j) \subset \mathbb{K}$, $(x^j) \subset G$, $\lambda \in K$, $x \in G$. Si $\lambda^j \to \lambda$ et $x^j \to x$, alors $\lambda^j x^j \to \lambda x$.

Démonstration. Nous devons montrer que $\delta(\lambda^j x^j, \lambda x) \to 0$.

La suite (λ^j) étant convergente, elle est bornée. Soit $M \in [0, \infty[$ tel que $|\lambda^j| \leq M$, $\forall\, j$.

Nous avons

$$\begin{aligned}
\delta(\lambda^j x^j, \lambda x) &= \left|\left|\left|\lambda^j x^j - \lambda x\right|\right|\right| = \left|\left|\left|\lambda^j x^j - \lambda^j x + \lambda^j x - \lambda x\right|\right|\right| \\
&\overset{(a)}{\leq} \left|\left|\left|\lambda^j x^j - \lambda^j x\right|\right|\right| + \left|\left|\left|\lambda^j x - \lambda x\right|\right|\right| \\
&= \left|\left|\left|\lambda^j (x^j - x)\right|\right|\right| + \left|\left|\left|(\lambda^j - \lambda) x\right|\right|\right| \\
&\overset{(b)}{=} |\lambda^j| \left|\left|\left|x^j - x\right|\right|\right| + |\lambda^j - \lambda|\, |||x||| \\
&\leq M \underbrace{\left|\left|\left|x^j - x\right|\right|\right|}_{\overset{(c)}{\to} 0} + |||x|||\, \underbrace{|\lambda^j - \lambda|}_{\overset{(d)}{\to} 0} \to 0.
\end{aligned}$$

Nous avons respectivement utilisé : l'inégalité triangulaire pour (a), l'axiome (i) pour (b), l'hypothèse $x^j \to x$ pour (c) et l'hypothèse $\lambda^j \to \lambda$ pour (d). $\square$

Proposition 3. Soient $(x^j), (y^j) \subset \mathbb{K}$, $x, y \in K$. Si $x^j \to x$ et $y^j \to y$, alors $x^j y^j \to xy$.

Démonstration. C'est un cas particulier de la Proposition 2 : $(G, ||| \; |||) := (\mathbb{K}, | \; |)$, $y^j := \lambda^j$, $y := \lambda$. $\square$

Proposition 4. Soit $A \subset E$. Soient $f, g : A \to G$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f, g sont continues, alors $f + g$ et λf sont continues.

Démonstration. Soient $(x^j) \subset A$, $x \in A$ tels que $x^j \to x$. Pour la continuité de $f + g$, nous devons montrer que $(f+g)(x^j) \to (f+g)(x)$. Pour la continuité de λf, nous devons montrer que $(\lambda f)(x^j) \to (\lambda f)(x)$.

D'une part, nous avons

$$(f+g)(x^j) = \underbrace{f(x^j)}_{\overset{(a)}{\to} f(x)} + \underbrace{g(x^j)}_{\overset{(b)}{\to} g(x)} \overset{(c)}{\to} f(x) + g(x) = (f+g)(x)\,;$$

ici, (a) (respectivement (b)) découle de la continuité de f (respectivement g), et (c) de la Proposition 1, item 1.

D'autre part, nous avons

$$(\lambda f)(x^j) = \lambda \underbrace{f(x^j)}_{\stackrel{(a)}{\to} f(x)} \stackrel{(c)}{\to} \lambda f(x) = (\lambda f)(x),$$

où nous avons utilisé la continuité de f pour (a) et la Proposition 1, item 2, pour (b). $\square$

Proposition 5. Soit $A \subset E$. Soient $f, g : A \to \mathbb{K}$ continues. Alors fg est continue.

Démonstration. Soient $(x^j) \subset A$, $x \in A$ tels que $x^j \to x$. Nous devons montrer que $(fg)(x^j) \to (fg)(x)$, ce qui suit de :

$$(fg)(x^j) = \underbrace{f(x^j)}_{\stackrel{(a)}{\to} f(x)} \underbrace{g(x^j)}_{\stackrel{(b)}{\to} g(x)} \stackrel{(c)}{\to} f(x)\, g(x) = (fg)(x);$$

ici, (a) (respectivement (b)) découle de la continuité de f (respectivement g), et (c) de la Proposition 3. $\square$

Proposition 6. Soit $(H, \rangle\ \langle)$ un espace normé sur $\mathbb{K}$. Soient $A \subset E$, $B \subset G$. Soient $f : A \to G$ telle que $f(A) \subset B$. Soit $g : B \to H$. Si f et g sont continues, alors $g \circ f : A \to H$ est continue.

Démonstration. Soient $(x^j) \subset A$ et $x \in A$ tels que $x^j \to x$. Nous devons montrer que $(g \circ f)(x^j) \to (g \circ f)(x)$.

Soient $y^j := f(x^j) \in B$, $y := f(x) \in B$. f étant continue, nous avons $y^j \to y$. La continuité de g implique alors $g(y^j) \to g(y)$, d'où

$$(g \circ f)(x^j) = g(f(x^j)) = g(y^j) \to g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x). \qquad \square$$

Proposition 7. Soit $f : E \to G$ continue. Soit $F \subset G$ un fermé. Alors $f^{-1}(F)$ est un fermé.

Démonstration. Soient $(x^j) \subset f^{-1}(F)$, $x \in E$ tels que $x^j \to x$. Nous devons montrer que $x \in f^{-1}(F)$, c'est-à-dire que $f(x) \in F$. Nous avons $f(x^j) \in F, \forall\, j$ (car $x^j \in f^{-1}(F), \forall\, j$), $f(x^j) \to f(x)$ (car f est continue), d'où

$$f(x) = \lim_j \underbrace{f(x_j)}_{\in F} \overset{(a)}{\in} F,$$

(a) suivant du fait que F est fermé. □

Proposition 8. Soit $f : E \to G$ continue. Soit $U \subset G$ un ouvert. Alors $f^{-1}(U)$ est un ouvert.

Démonstration. Soit $F := U^c$, qui est fermé. Nous avons

$$f^{-1}(U) = f^{-1}(F^c) = \underbrace{[f^{-1}(F)]}_{\text{fermé}}{}^c,$$

d'où $f^{-1}(U)$ est un ouvert. Ici, $f^{-1}(F)$ fermé suit de la Proposition 7. □

Proposition 9. Soient $f_1, \ldots, f_k : E \to \mathbb{R}$ continues et $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$. Soient

$$F := \{x \in E\,;\ f_1(x) \geq a_1, \ldots, f_k(x) \geq a_k\},$$
$$U := \{x \in E\,;\ f_1(x) > a_1, \ldots, f_k(x) > a_k\}.$$

Alors F est fermé et U est ouvert.

Démonstration. Posons

$$F_j := \{x \in E\,;\ f_j(x) \geq a_j\},\ j = 1, \ldots, k,$$
$$U_j := \{x \in E\,;\ f_j(x) > a_j, \ldots\},\ j = 1, \ldots, k.$$

Nous avons $F = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_k$ et $U = U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_k$. Il suffit donc de montrer que chaque F_j est fermé (respectivement que chaque U_j est ouvert), car une intersection finie de fermés (respectivement d'ouverts) est fermée (respectivement ouverte).

Nous avons $F_j = (f_j)^{-1}([a_j, \infty[)$ et $[a_j, \infty[$ est un fermé de $\mathbb{R}$. De la Proposition 7, F_j est fermé.

Le raisonnement est similaire pour U_j. Nous avons $U_j = (f_j)^{-1}(]a_j, \infty[)$ et $]a_j, \infty[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Nous concluons grâce à la Proposition 8. □

Définition. Soient $A \subset E$ et $f : A \to G$. f est *lipschitzienne* s'il existe une constante $k \in [0, \infty[$ telle que

$$|||f(x) - f(y)||| \leq k \, \|x - y\|, \; \forall \, x, y \in A. \tag{1}$$

De manière équivalente,

$$\delta(f(x), f(y)) \leq k \, d(x, y), \; \forall \, x, y \in A. \tag{2}$$

Si k vérifie (1) (ou (2)), alors f est *k-lipschitzienne*.

Proposition 10. Soient $A \subset E$ et $f : A \to G$ lipschitzienne. Alors f est continue.

Démonstration. Soient $(x^j) \subset A$, $x \in A$ tels que $x^j \to x$. Avec k satisfaisant (2), nous avons

$$\delta(f(x^j), f(x)) \leq k \underbrace{d(x^j, x)}_{\overset{(a)}{\to} 0} \to 0 \, ;$$

pour (a), nous avons utilisé l'hypothèse $x^j \to x$. $\square$