Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Complément $\#3$
– 22 mars 2020 –

Exercice de cours $\#7$**.** Soient $f_1, f_2\ :]0,1[\to\ \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Soit $f\ :]0,1[^2\to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, x_2) := f_1(x_1) + f_2(x_2),\ \forall\, x_1, x_2 \in]0,1[.$$

Montrer que f est différentiable et calculer $d_a f$, $\forall\, a \in]0,1[^2$.

Solution. Rappelons que si $g\ :]b,c[\to\ \mathbb{R}$ est dérivable (en $a\ \in]b,c[$), alors g est différentiable (en $a \in]b,c[$) et

$$d_a g(1) = g'(a). \tag{1}$$

De (1), nous avons, par linéarité de la différentielle,

$$d_a g(h) = d_a g(h\cdot 1) = h\, d_a g(1) = g'(a)\, h,\ \forall\, h \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Soient f_1 et f_2 comme dans l'énoncé. Pour $a_1, a_2\ \in]0,1[$, nous avons (en utilisant la formule (2) appliquée à f_j au point a_j et la définition de la différentielle)

$$\begin{aligned} f_j(a_j + h_j) = f_j(a_j) + f'(a_j)\, h_j + \varepsilon_j(h_j),& \\ \forall\, h_j \in \mathbb{R} \text{ tel que } a_j + h_j \in]0,1[,& \end{aligned} \tag{3}$$

avec

$$\varepsilon_j(h_j) = o(h_j) \text{ quand } h_j \to 0,\ j = 1,2. \tag{4}$$

En sommant les formules (3) avec $j = 1, 2$, nous obtenons, avec $a = (a_1, a_2) \in]0,1[^2$ et $h = (h_1, h_2)$,

$$\begin{aligned} \underline{f(a+h)} &= f((a_1+h_1, a_2+h_2)) = f_1(a_1+h_1) + f_2(a_2+h_2) \\ &= f_1(a_1) + f_1'(a_1)\, h_1 + \varepsilon_1(h_1) + f_2(a_2) + f_2'(a_2)\, h_2 + \varepsilon_2(h_2) \\ &= \underbrace{f_1(a_1) + f_2(a_2)}_{=f(a)} + \underbrace{f_1'(a_1)\, h_1 + f_2'(a_2)\, h_2}_{:=\ell(h_1,h_2)=\ell(h)} + \underbrace{\varepsilon_1(h_1) + \varepsilon_2(h_2)}_{:=\varepsilon(h_1,h_2)=\varepsilon(h)} \\ &= \underline{f(a) + \ell(h) + \varepsilon(h)},\ \forall\, h \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } a + h \in]0,1[^2. \end{aligned} \tag{5}$$

Notons ensuite que ℓ est une application linéaire. L'égalité (5) va nous amener aux conclusions suivantes : f est différentiable en tout point $a = (a_1, a_2) \in]0,1[^2$, et

$$d_a f(h) = \ell(h) = f_1'(a_1)\, h_1 + f_2'(a_2)\, h_2,\ \forall\, h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2,$$

à condition de montrer que

$$\varepsilon(h) = o(h) \text{ quand } h \to 0. \tag{6}$$

Grâce à la propriété $o(h) + o(h) = o(h)$ et à la définition $\varepsilon(h) := \varepsilon_1(h_1) + \varepsilon_2(h_2)$, pour obtenir (6) il suffit de montrer que

$$\varepsilon_j(h_j) = o(h) \text{ quand } h \to 0,\ j = 1, 2. \tag{7}$$

Fixons j. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\varepsilon_j(h_j) = o(h_j)$, il existe $\delta > 0$ tel que

$$|h_j| \le \delta \implies |\varepsilon_j(h_j)| \le \varepsilon\, |h_j|. \tag{8}$$

De (8), nous avons

$$\underline{\|h\|_\infty \le \delta \implies} |h_j| \le \delta \implies |\varepsilon_j(h_j)| \le \varepsilon\, |h_j| \implies \underline{|\varepsilon_j(h_j)| \le \varepsilon\, \|h\|_\infty},$$

ce qui implique (7) et complète la démonstration. $\square$

Petit exercice # 9. Si f est trois fois différentiable, montrer que les dérivées partielles du second ordre de f sont différentiables.

Solution. Par définition des fonctions trois fois différentiables : f est une fois différentiable (et donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, existent), et les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots, n$, sont deux fois différentiables. Ce qui revient, par définition des fonctions deux fois différentiables, à : $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ est différentiable, $j = 1, \ldots, n$ (et donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$, $j, k = 1, \ldots, n$, existent), et les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$, $j, k = 1, \ldots, n$, sont différentiables. $\square$