Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Complément $\#4$
– 22 mars 2020 –
Convexité et différentielle

Cadre

1. $E = \mathbb{R}^n$.
2. $f : U \to \mathbb{R}$, avec $U \subset E$ ouvert *convexe*, c'est-à-dire : $x, y \in U \implies [x, y] \subset U$. Rappelons que $[x, y] = \{(1-t)\,x + t\,y\,;\, t \in [0, 1]\}$.
3. Pour $x, y \in U$ et $f : U \to E$, soit
$$g_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R},\ g_{x,y}(t) := f((1-t)\,x + t\,y),\ \forall\, t \in [0,1].$$
4. $\cdot$ est le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.
5. Par définition, une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est *convexe* si
$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)\,f(x) + t\,f(y),\ \forall\, x, y \in U,\ \forall\, t \in [0,1]. \quad (1)$$

Rappels. Convexité et dérivée
Soit $g : I \to \mathbb{R}$, avec $I \subset R$ intervalle non dégénéré.

1. Si g est dérivable, alors g est convexe si et seulement si g' est croissante sur I.
2. Si g est deux fois dérivable, alors g est convexe si et seulement si $g'' \ge 0$ sur I.

Proposition 1. f est convexe $\iff$ $g_{x,y}$ est convexe, $\forall\, x, y \in U$.

Démonstration. « $\Longleftarrow$ » Soient $x, y \in U$ et $t \in [0,1]$. Alors

$$\begin{aligned} f((1-t)\,x + t\,y) &= g_{x,y}(t) = g_{x,y}((1-t)\cdot 0 + t\cdot 1) \\ &\leq (1-t)\,g_{x,y}(0) + t\,g_{x,y}(1) = (1-t)\,f(x) + t\,f(y), \end{aligned}$$

et donc f est convexe.
« $\Longrightarrow$ » Soient $x, y \in U$ et $t_1, t_2, t \in [0,1]$. Nous devons montrer que

$$g_{x,y}((1-t)\cdot t_1 + t\cdot t_2) \leq (1-t)\,g_{x,y}(t_1) + t\,g_{x,y}(t_2). \tag{2}$$

Si $X := (1-t_1)\,x + t_1\,y$, $Y := (1-t_2)\,x + t_2\,y$, alors $X, Y \in [x,y] \subset U$ (et donc $(1-t)\,X + t\,Y \in [X,Y] \subset U$), et (2) équivaut à

$$f((1-t)\,X + t\,Y) \leq (1-t)\,f(X) + t\,f(Y),$$

qui suit de la convexité de f. $\square$

Proposition 2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable. Alors

$$f \text{ est convexe } \iff [\nabla f(y) - \nabla f(x)]\cdot(y-x) \geq 0,\ \forall\, x, y \in U.$$

Démonstration. « $\Longrightarrow$ » Soient $x, y \in U$. Nous avons f différentiable $\Longrightarrow$ $g_{x,y}$ dérivable et $g'_{x,y}(t) = [\nabla f((1-t)\,x + t\,y)]\cdot(y-x)$, $\forall\, t \in [0,1]$. En utilisant la Proposition 1, nous obtenons f convexe $\Longrightarrow$ $g_{x,y}$ convexe $\Longrightarrow$ $g'_{x,y}(1) - g'_{x,y}(0) \geq 0$ $\Longrightarrow$ $[\nabla f(y) - \nabla f(x)]\cdot(y-x) \geq 0$.
« $\Longleftarrow$ » Soient $x, y \in U$ et $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$. Posons $X := (1-t_1)\,x + t_1\,y$, $Y := (1-t_2)\,x + t_2\,y$, de sorte que $X, Y \in [x,y] \subset U$. Nous avons

$$\begin{aligned} 0 &\leq [\nabla f(Y) - \nabla f(X)]\cdot \underbrace{(Y-X)}_{=(t_2-t_1)\,(y-x)} \\ &= \underbrace{(t_2-t_1)}_{>0}[\nabla f(Y) - \nabla f(X)]\cdot(y-x) \\ &= (t_2-t_1)\,(g'_{x,y}(t_2) - g'_{x,y}(t_1)), \end{aligned}$$

d'où $g'_{x,y}(t_2) \geq g'_{x,y}(t_1)$. Il s'ensuit que $g'_{x,y}$ est croissante, et donc $g_{x,y}$ est convexe, $\forall\, x, y \in U$. Nous concluons grâce à la Proposition 1. $\square$

Proposition 3. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ deux fois différentiable. Alors

$$f \text{ est convexe } \iff H_a f \geq 0, \; \forall\, a \in U.$$

Démonstration. « $\Longleftarrow$ » Soient $x, y \in U$ et $t \in [0, 1]$. Soit $z := (1-t)\,x + t\,y \in [x, y] \subset U$. Comme $[z, x] \subset [x, y] \subset U$ et, de même, $[z, y] \subset U$, la formule de Taylor à l'ordre deux avec point intermédiaire donne l'existence de $c \in [z, x]$ et $d \in [z, y]$ tels que

$$\begin{aligned} f(x) &= f(z) + [\nabla f(z)] \cdot (x-z) + \frac{1}{2} \underbrace{[H_c f\,(x-z)] \cdot (x-z)}_{\geq 0} \\ &\geq f(z) + [\nabla f(z)] \cdot (x-z), \end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned} f(y) &= f(z) + [\nabla f(z)] \cdot (y-z) + \frac{1}{2} \underbrace{[H_d f\,(y-z)] \cdot (y-z)}_{\geq 0} \\ &\geq f(z) + [\nabla f(z)] \cdot (y-z). \end{aligned} \tag{4}$$

En multipliant (3) par $(1-t)$, respectivement (4) par t, et en ajoutant les deux formules obtenues, nous obtenons

$$\begin{aligned} \underline{(1-t)\,f(x) + t\,f(y) \geq} f(z) + [\nabla f(z)] \cdot \underbrace{((1-t)\,(x-z) + t\,(y-z))}_{=0} \\ = \underline{f(z)}, \end{aligned}$$

et donc f est convexe.

« $\Longrightarrow$ » Soit $a \in U$. Soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Soit $v \in \mathbb{R}^n$. Alors il existe $\tau > 0$ tel que $a + \tau v \in U$. (Tout $\tau > 0$ convient si $v = 0$. $\tau := \dfrac{r}{2\,\|v\|}$ convient si $v \neq 0_{\mathbb{R}^n}$.) Posons $b := a + \tau v$. La fonction $g_{a,b}$ est convexe (Proposition 1).

Par ailleurs, $g_{x,y}$ est deux fois dérivable, $\forall\, x, y \in U$. En effet, f étant différentiable, $g_{x,y}$ est dérivable et

$$\begin{aligned} g'_{x,y}(t) &= [\nabla f((1-t)\,x + t\,y)] \cdot (y-x) \\ &= \sum_{j=1}^{n} (\partial_j f)((1-t)\,x + t\,y)\,(y_j - x_j). \end{aligned} \tag{5}$$

Comme f est deux fois différentiable, les dérivées partielles $\partial_j f$ de f sont différentiables. En reprenant la preuve pour $g_{x,y}$, nous obtenons que le membre de droite de (5) est dérivable . Donc $g_{x,y}$ est deux fois dérivable et (en appliquant au membre de droite de (5) la formule qui permet de calculer $g'_{x,y}$) nous avons

$$\begin{aligned} g''_{x,y}(t) &= \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}(\partial_j f)((1-t)\,x+t\,y)\,(y_j-x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\partial_k\partial_j f)((1-t)\,x+t\,y)\,(y_j-x_j)(y_k-x_k) \\ &= [H_{(1-t)\,x+t\,y}f\,(y-x)]\cdot(y-x). \end{aligned} \tag{6}$$

En appliquant (6) à $g_{a,b}$ avec $t=0$, nous obtenons (en utilisant la convexité de $g_{a,b}$) :

$$0 \le g''_{a,b}(0) = [H_a f\,(\tau v)]\cdot(\tau v) = \underbrace{\tau^2}_{>0}[H_a f\,(v)]\cdot v,$$

d'où $[H_a f\,(v)]\cdot v \ge 0, \forall\, v \in \mathbb{R}^n$, et donc $H_a f \ge 0, \forall\, a \in U$. □

Proposition 4. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ différentiable et convexe. Soit $a \in U$. Alors

$$a \text{ est un point de minimum (global) de } f \iff \nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}^n}.$$

Démonstration. « $\implies$ » C'est le théorème de Fermat. (Pour cette implication, l'hypothèse f convexe ne sert pas.)

« $\impliedby$ » Soit $x \in U$. La formule de Taylor avec point intermédiaire donne l'existence d'un $b \in [a,x]$ tel que

$$f(x) = f(a) + [\nabla f(b)]\cdot(x-a) = f(a) + [\nabla f(b) - \underbrace{\nabla f(a)}_{=0_{\mathbb{R}^n}}]\cdot(x-a). \tag{7}$$

Si $b=a$, alors $f(x)=f(a)\ge f(a)$. Si $b\neq a$, alors il existe $t\in]0,1]$ tel que $b=(1-t)\,a+t\,x$, et dans ce cas $b-a=\underbrace{t}_{>0}(x-a)$. De (7), nous obtenons alors

$$f(x) = f(a) + \underbrace{\frac{1}{t}}_{>0}\underbrace{[\nabla f(b)-\nabla f(a)]\cdot(b-a)}_{\ge 0 \text{ (Proposition 2)}} \ge f(a).$$

Dans tous les cas possibles, nous obtenons $f(x)\ge f(a)$, et donc a est un point de minimum (global). □