

Contrôle terminal (à distance) #1

– le 18 mai 2020 –

– durée 60 minutes + 15 minutes pour numériser la copie –

Entête de la copie : prénom, nom, numéro d'étudiant

Des questions concernant l'énoncé pendant le contrôle?

Les poser sur le [forum](#) ou écrire à mironescu@math.univ-lyon1.fr

Exercice # 1. Soit a le premier chiffre ≥ 2 de votre numéro d'étudiant. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right) \cos(\pi(y - x)), \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Écrire la formule de Taylor à l'ordre deux avec reste en o au point (a, a) . La réponse doit être « numérique » (ne pas écrire $\sin 0$ ou $\cos 0$, mais 0 ou 1 , etc.).

Exercice # 2. Soit a le premier chiffre ≥ 2 de votre numéro d'étudiant. Soit

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) := x^{4a} + y^{4a} - 2a x^2 y^2, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- Quels sont les points critiques de f ?
- Quelle est la matrice hessienne de f dans chacun de ces points?
- Quelle est leur nature (pas de point d'extrémum local, extrémum global, extrémum local mais pas global)?

Exercice # 3. Soit b le dernier chiffre ≥ 1 de votre numéro d'étudiant. On considère la matrice suivante

$$A(x, y) := \begin{pmatrix} x^2 - by & b^2 - bx \\ \alpha - \beta x & y \end{pmatrix}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

où α, β sont des constantes réelles.

TSVP

- a) Trouver toutes les constantes α, β telles que la matrice $A(x, y)$ soit la matrice hessienne d'une certaine fonction $f = f(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$.
- b) Pour ces valeurs de α, β , trouver toutes les fonctions $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ de hessienne A .

Exercice # 4. Soit c le dernier chiffre ≥ 2 de votre numéro d'étudiant. Calculer

$$\max_{x^2+y^2=1} (x^{2c} + y^{2c}),$$

et préciser dans quels points ce maximum est atteint.