Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3^e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Contrôle terminal (à distance) $\#2$
– le 28 mai 2020 –
– durée 90 minutes + 30 minutes pour numériser la copie –
Entête de la copie : prénom, nom, numéro d'étudiant

Des questions concernant l'énoncé pendant le contrôle ?
Les poser sur le **forum** ou écrire à **mironescu@math.univ-lyon1.fr**

Exercice $\#$ 1. Soit

$$F := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \, ; \, x^2 \leq y, \, y^2 \leq z, \, z^2 \leq x\}.$$

1. Montrer que F est fermé.
2. Question plus difficile : Montrer que F n'est pas ouvert. Indication : étudier le point $(0, 0, 0)$.
3. Question plus difficile : Montrer que
$$(x, y, z) \in F \implies [x \leq 1, \, y \leq 1, \, z \leq 1].$$
4. Montrer que F est compact.
Dans les questions suivantes, nous considérons le problème
$$\max_{(x,y,z)\in F} (x + y^2 + z^3). \tag{P}$$
5. Montrer que (P) a au moins une solution.
6. Écrire le système des multiplicateurs de Fritz John satisfait en un point de maximum $(x, y, z) \in F$ de (P).

Exercice $\#$ 2. Soit $f = f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois différentiable. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; g(t) := f(t^2, t^3), \; \forall \, t \in \mathbb{R}.$$

TSVP

1. Montrer que g est deux fois dérivable.
2. Calculer g' et g''. Détailler les calculs.

   Soit
$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(t) := 2t\,\frac{\partial f}{\partial x}(t^2, t^3) + 3t^2\,\frac{\partial f}{\partial y}(t^2, t^3),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$
3. Montrer que h est continue.
4. Question plus difficile : Calculer $\displaystyle\int_0^1 h(t)\, dt$.

Exercice # 3. Soit $E := C^1([0,1];\mathbb{R})$ et son sous-espace

$$E_0 := \{f\,;\ f \in E \text{ et } f(0) = 0\}.$$

Pour $f \in E$, on définit

$$N_1(f) := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \text{ et } N_2(f) := \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - f(x)|.$$

On considère également $F := C^0([0,1];\mathbb{R})$, muni de la norme usuelle $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[0,1]$. Montrer qu'il existe un unique $f \in E_0$ tel que $f' - f = g$ et que cet f est donné par
$$f(x) = \int_0^x g(t)e^{x-t}\, dt. \qquad (*)$$
   (On pourra dériver la fonction $x \mapsto f(x)e^{-x}$.)
2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E_0.
3. Est-ce que N_1 et N_2 sont des normes sur E ? Justifiez soigneusement votre réponse.
4. On pose $T_1 : F \to (E_0, N_2)$, $T_1(g) := f$, où f est défini par la relation $(*)$. Montrer que T est continue et calculer sa norme triple.
5. On pose $T_2 : F \to F$, $T_2(g) := f$ où f est défini par la relation $(*)$. Montrer que T_2 est continue et que sa norme triple est égale à $e - 1$.
6. On pose $T_3 : F \to (E_0, N_1)$, $T_3(g) := f$ où f est défini par la relation $(*)$. Montrer que T_3 est continue. Question plus difficile : Calculer sa norme triple.
7. Question plus difficile : Montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E_0.
8. Montrer que l'application identité $\mathrm{Id} : (E, N_2) \to (E, N_1)$ est continue. Question plus difficile : Calculer sa norme triple.