Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Contrôle terminal – seconde chance –
– le 25 juin 2020 –
– durée 60 minutes + 20 minutes pour numériser la copie –

Instructions

a) Entête de la copie : prénom, nom, numéro d'étudiant
b) Début de l'épreuve : 9 h 30
c) Copies à déposer dans la colonne Tomuss 2_CHANCE en un seul document .pdf
d) La colonne 2_CHANCE est accessible jusqu'à 10 h 50

Des questions concernant l'énoncé pendant le contrôle ?
Écrire à **mironescu@math.univ-lyon1.fr**

Exercice # 1. Soit

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 \leq y + 2,\ y^2 \leq x + 2\}.$$

1. Représenter graphiquement F dans le plan xOy.
2. Montrer que F est fermé.
3. Montrer que

$$(x, y) \in F \implies \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{9}{2}.$$

On pourra développer $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2$.

4. Justifier rigoureusement l'existence d'une solution du problème

$$M := \max_{(x,y)\in F} x. \tag{P}$$

5. Trouver la valeur M à partir de la représentation graphique de F.
6. Écrire le système des multiplicateurs de Fritz John satisfait en un point $(x, y) \in F$ ou le maximum M est atteint.

Exercice # 2. Soient $E := C([0, 1]; \mathbb{R})$ et son sous-espace

$$F := \{f \in C^1([0, 1]; \mathbb{R})\,;\ f(1) = 0\}.$$

Nous munissons E de la norme

$$E \ni f \mapsto N_E(f) := \int_0^1 |f(x)|\,dx,$$

respectivement F de

$$F \ni f \mapsto N_F(f) := \int_0^1 |f'(x)|\,dx.$$

1. Montrer que

$$\forall\, f \in F, [N_F(f) = 0 \implies f = 0].$$

Nous admettons dans la suite que N_E (respectivement N_F) est une norme sur E (respectivement F).

Soit

$$T(f) := \int_0^1 x\, f(x)\,dx,\ \forall\, f \in E.$$

Nous admettons que T est linéaire.

2. Montrer que $T : E \to \mathbb{R}$ est continu, de norme triple $|||T||| = 1$.
3. Si $f \in F$, exprimer $T(f)$ en fonction de f' uniquement.
   Une intégration par parties pourrait aider.
4. Montrer que $T : F \to \mathbb{R}$ est continu, de norme triple $|||T||| = \dfrac{1}{2}$.