Université Claude Bernard Lyon 1
Licence de mathématiques 3e année

Mathématiques pour l'enseignement
UE Approfondissement en analyse

Préparation du contrôle continu $\#1$
– questions de cours à préparer –

1. Exercice de cours $\#1$. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble fini non vide. Soit $t \geq 0$. Montrer que $\max(tA) = t\, \max A$.
2. Petit exercice # 1. Soit $1 < p < \infty$. Montrer que $\|x\|_p \geq 0, \forall\, x \in \mathbb{K}^n$, et que $\| \, \|_p$ vérifie les axiomes (i) et (iii) d'une norme.
3. Petit exercice # 3. Montrer que $\| \, \|_\infty$ sur $C([0,1], \mathbb{K})$ est positive, et que $\|f\|_\infty = 0 \implies f = 0$.
4. Petit exercice # 4. Soit $d(x,y) := \|x - y\|, \forall\, x, y \in E$. Montrer que
   (a) $d(x,y) \geq 0, \forall\, x, y \in E$.
   (b) $d(x,y) = d(y,x), \forall\, x, y \in E$.
5. Exercice de cours # 3. En reprenant la preuve dans $\mathbb{R}$, montrer que :
$$[F \text{ est fermé}] \iff [\forall\, (x^j) \subset F,\ \text{si } x^j \to x,\ \text{alors } x \in F].$$
6. Exercice de cours # 4. En reprenant la preuve dans $\mathbb{R}$, montrer que :
$$[f \text{ est continue}] \iff [\forall\, x \in A,\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } [y \in A,\ \|y - x\| < \delta] \implies [\|\|f(y) - f(x)\|\| < \varepsilon]].$$
7. Petit exercice # 5. $x \mapsto \|x - x_0\|$ est lipschitzienne, $\forall\, x_0 \in E$.
8. Exercice de cours # 5. Montrer que l'équivalence des normes est une relation d'équivalence.
9. Petit exercice $\#6$. Si $f : E \to G$ est continue et $A \subset E$, alors la restriction de f à A est continue.
10. Exercice de cours $\#6$. Nous considérons des fonctions définies pour $\|h\| < R$ (même R). En leur donnant un sens précis, montrer les règles suivantes, les o et O s'entendant quand $h \to 0$.
    (a) $o(f(h)) + o(f(h)) = o(f(h))$.

(b) $o(f(h)) = O(f(h))$.

(c) $o(O(f(h))) = o(f(h))$.

(d) $o(o(f(h))) = o(f(h))$.

(e) $O(o(f(h))) = o(f(h))$.

(f) $O(f(h))O(g(h)) = O(f(h)g(h))$.

(g) $o(f(h))O(g(h)) = o(f(h)g(h))$.

(h) $O(\|h\|^2) = o(\|h\|)$.

(i) $O(\|h\|) = o(1)$.

(j) $[g(h) = o(f(h)),\ F(h) = o(1)] \implies g(F(h)) = o(f(F(h)))$.

11. Petit exercice $\#8$. Montrer que les propriétés $f(h) = o(h)$ et $g(h) = O(h)$ (quand $h \to 0$) ne dépendent pas du choix de la norme sur E.