Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration — Année 2018-2019

**Devoir surveillé** #2
–le 6 novembre 2018–
–durée 90 minutes–

**Question de cours** #1 **(3 p.).** Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Soient $A,B \in \mathscr{T}$ tels que $X = A \sqcup B$.
a) Montrer que $\int_A f\,d\mu$ et $\int_B f\,d\mu$ existent et sont finies.
b) Montrer que $\int_X f\,d\mu = \int_A f\,d\mu + \int_B f\,d\mu$.

**Question de cours** #2 **(3 p.).** Soient $(X,\mathscr{T})$ et $(Y,\mathscr{S})$ deux espaces mesurables. Soit $\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ la tribu produit de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}$.
Pour $x \in X$ et $E \subset X \times Y$, soit $E_x = \{y \in Y\,;\,(x,y) \in E\} \subset Y$.
Montrer que pour tout $x \in X$ et pour tout $E \in \mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ nous avons $E_x \in \mathscr{S}$.

**Exercice** #1 **(2 p.)** Soit $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré. Soient $A,B \in \mathscr{T}$ tels que $\mu(A) < \infty$ et $\mu(B) < \infty$. Calculer $\mu(A\cup B)$ en fonction de $\mu(A)$, $\mu(B)$ et $\mu(A\cap B)$.

**Exercice** #2 **(4 p.)** Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{si } x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ x^3, & \text{si } x \in [0,1]\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$.
a) Montrer que $f$ est Lebesgue intégrable sur $[0,1]$.
b) Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.
c) Soit $K \subset [0,1]$ un compact. $f$ est-elle Lebesgue intégrable sur $K$ ? Justifier la réponse.

**Exercice** #3 **(5 p.)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que pour tout $x \in [0,n]$ nous avons $e^x\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \le 1$.
b) Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n [\cos(x/n)] \times \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx.$$

**Exercice** #4 **(11 p.)** Pour $t \in \mathbb{R}$, nous considérons l'intégrale généralisée

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{[\sin x]^2}{x} e^{-tx}\,dx \in [0,\infty].$$

a) Peut-on réécrire $f(t)$ comme une intégrale par rapport à une mesure ?
b) Montrer que la fonction $]0,\infty[\ni t \xmapsto{f} f(t) \in \mathbb{R}$ est continue.
c) Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]0,\infty[$ et que

$$f'(t) = \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+4} - \frac{1}{2}\frac{1}{t},\ \forall\, t > 0.$$

d) Calculer $\lim_{t\to\infty} f(t)$.
e) Déterminer une formule explicite de $f(t)$ pour $t > 0$.
f) Calculer, à partir de cette formule explicite, $\lim_{t\searrow 0} f(t)$.
g) En déduire que $f(0) = \infty$, puis que $f(t) = \infty$, $\forall\, t \le 0$.