Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2019–2020

Devoir surveillé #3
–le 25 novembre 2019–
–durée 45 minutes–

Consignes. Pour chaque intégrale de la forme $\int_a^b f(x)dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser si les résultats utilisés concernent les intégrales de Riemann, généralisées ou par rapport à la mesure de Lebesgue.

Question de cours (4 p.). Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $1 < p < \infty$. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables.

Montrer que $\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$.

Exercice #1 **(10 p.)** Soient $0 \le a < b$. Soit

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

a) Montrer que D est un borélien.
b) À l'aide du changement de variables $u = y^2 - x^2$, $v = xy$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I = \int_D (y^2 - x^2)^{xy}(x^2+y^2)\,dxdy$ en fonction de a et b.

Exercice #2 **(5 p.)** Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$. Soit $f :]1,\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$. Pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty]$ a-t-on $f \in \mathscr{L}^p(]1,\infty[)$?

Exercice #3 **(3 p.)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $f * f(0)$.