Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2019–2020

Devoir surveillé #4
–le 13 décembre 2019–
–durée 45 minutes–

Consignes. Pour chaque intégrale de la forme $\int_a^b f(x)dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser si les résultats utilisés concernent les intégrales de Riemann, généralisées ou par rapport à la mesure de Lebesgue.

Question de cours (6 p.) Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ des fonctions Lebesgue intégrables (par rapport à la mesure de Lebesgue λ_n). Montrer l'égalité $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Exercice #1 **(6 p.)** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) = |x|$.

1. Parmi les théorèmes de Fatou, Dirichlet et Fejér (sur les séries de Fourier), lesquels peut-on appliquer à f ?
2. Par utilisation justifiée de certains de ces résultats, obtenir les valeurs des sommes $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice #2 **(6 p.)** Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(-2|x|)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \dfrac{1}{4+x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ (par rapport à la mesure de Lebesgue ν_1).
2. Calculer $\widehat{f}$ et $\widehat{g}$.

Exercice #3 **(4 p.)** Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, 2π-périodique et telle que $f \in \mathscr{L}^2(]0, 2\pi[)$ (par rapport à la mesure de Lebesgue λ_1), avec la propriété $c_n(f) = \dfrac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$?