Chapitre 3

Chaleur

Rappelons que l'opérateur de la chaleur est donné par $Lu = u_t - \Delta_x u$, où $u = u(x,t)$. Rappelons aussi la solution fondamentale

$$E(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)}, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t \le 0 \end{cases}.$$

Formule de Goursat

La formule qui suit est l'analogue, pour l'équation de la chaleur, de la deuxième formule de Green.

3.1 Proposition (Formule de Goursat)**.**
Hypothèses. *$U \sqsubset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ est lipschitzien. $u = u(x,t), v = v(x,t)$ sont de classe C^2 dans $\overline{U}$. Au moins l'un des U,* $\operatorname{supp} u$ *et* $\operatorname{supp} v$ *est relativement compact.*
Conclusion. *On a*

$$\int_U [u(\partial_t v + \Delta_x v) + v(\partial_t u - \Delta_x u)] = \int_{\partial U} \left[u v \nu_t + \left(u \frac{\partial v}{\partial \nu_x} - v \frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right) \right]. \tag{3.1}$$

Ici, on a écrit $\nu = (\nu_x, \nu_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Démonstration. On a $u(\partial_t v + \Delta_x v) + v(\partial_t u - \Delta_x u) = \operatorname{div}_{(x,t)} F$, où $F(x,t) = (u\nabla_x v - v\nabla_x u, uv)$. Pour conclure, on applique, à cette identité, le théorème flux-divergence. □

3.2 Corollaire.
Hypothèses. *$U \sqsubset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $\omega \Subset U$ est un ouvert lipschitzien. $u \in C^2(U)$ vérifie $Lu = 0$ dans U.*
Conclusion. *On a*

$$\int_{\partial\omega} u \nu_t = \int_{\partial\omega} \frac{\partial u}{\partial \nu_x}. \tag{3.2}$$

Démonstration. On prend $v = 1$ dans la formule de Goursat. □

Formule de la moyenne

Dans cette partie, nous allons établir le Théorème 3.5 qui est l'analogue, pour l'équation de la chaleur, de la formule de la moyenne pour l'équation de Laplace.

3.3 Définition. On définit la boule (fermée) parabolique de rayon r par

$$B(x,t;r) = \{(y,s)\,;\, s \le t \text{ et } E(x-y,t-s) \ge 1/r^n\} = \{(y,s)\,;\, E(x-y,t-s) \ge 1/r^n\}.$$

L'intérieur de la boule est noté $\mathring{B}(x,t;r)$. La sphère parabolique est le bord de la boule parabolique :

$$S(x,t;r) = \{(y,s)\,;\, s \le t \text{ et } E(x-y,t-s) = 1/r^n\}.$$

3.4 Remarque. Le changement d'échelle naturel pour l'équation de la chaleur est $(x,t) \mapsto U_r(x,t) := (rx, r^2t)$. En effet, on a $L[u(rx,r^2t)] = r^2[Lu](rx,r^2t)$, c'est-à-dire $L[u \circ U_r](x,t) = r^2[Lu] \circ U_r$. De ce point de vue, U_r joue, pour l'équation de la chaleur, le même rôle que l'homothétie $x \mapsto V(rx) = rx$ pour l'équation de Laplace ; cette homothétie satisfait $\Delta[u \circ V_r] = r^2[\Delta u] \circ V_r$. En outre, on a $B(0,0;r) = U_r(B(0,0;1))$, alors que les boules euclidiennes standard vérifient $B(0,r) = V_r(B(0,1))$. Les boules paraboliques ont donc "la bonne homogénéité".

3.5 Théorème (Formules de la moyenne pour l'équation de la chaleur)**.**
Hypothèses. $U \sqsubset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. $B(x,t;R) \subset U$. $u \in C^2(U)$ *vérifie* $Lu = 0$ *dans* U.
Conclusions. On a

$$\begin{aligned} u(x,t) &= -\int_{S(x,t;r)} \frac{\partial_y E(x-y,t-s)}{\partial \nu_y} u(y,s)\, d\mathcal{H}^n(y,s) \\ &= \int_{S(x,t;r)} \frac{r^{-2n}|y-x|^2}{4(t-s)^2 |\nabla E(y,-s)|} u(y,s)\, d\mathcal{H}^n(y,s), \quad \forall\, 0 < r \le R \\ &= \frac{\displaystyle\int_{S(x,t;r)} \frac{r^{-2n}|y-x|^2}{4(t-s)^2 |\nabla E(y,-s)|} u(y,s)\, d\mathcal{H}^n(y,s)}{\displaystyle\int_{S(x,t;r)} \frac{r^{-2n}|y-x|^2}{4(t-s)^2 |\nabla E(y,-s)|}\, d\mathcal{H}^n(y,s)} \end{aligned} \tag{3.3}$$

et

$$u(x,t) = \frac{1}{4R^n} \int_{B(x,t;R)} \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} u(y,s)\, dy ds = \frac{\displaystyle\int_{B(x,t;R)} \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} u(y,s)\, dy ds}{\displaystyle\int_{B(x,t;R)} \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2}\, dy ds}. \tag{3.4}$$

Variante : les formules (3.5) *et* (3.3) *restent valables sous les hypothèses plus faibles suivantes :* $u \in C(B(x,t;R))$*,* $u \in C^2$ *et* $Lu = 0$ *à l'intérieur de* $B(x,t;R)$*.*

Démonstration. La preuve du théorème est similaire à celle du Théorème 2.4 ; on utilise la formule de Goursat à la place de la deuxième formule de Green.

On peut supposer $x = 0$, $t = 0$.

Étape 1. On établit (3.3) *en utilisant la formule de Goursat.* Soit $F(y,s) = E(-y,-s) = E(y,-s)$. A partir de $LE = 0$ si $t > 0$ on obtient $\partial_s F + \Delta_y F = 0$ si $s < 0$.

Soit, pour $c > 0$, $U_c = S(0,0;c^{-1/n})$. On a $U_c = F^{-1}(\{c\})$. Soit ν la normale extérieure à $B(0,0;c^{-1/n})$, que l'on écrit comme $\nu = (\nu_y, \nu_s)$. Si on pose $\xi := \left((2ns + |y|^2)^2 + 4s^2|y|^2\right)^{1/2}$, on vérifie aisément les identités

$$\nu_y = \frac{2sy}{\xi},\ |\nabla F| = \frac{\xi}{4s^2}F,\ -\frac{\partial_y F(y,s)}{\partial \nu_y} = \frac{c|y|^2}{\xi} = \frac{c^2|y|^2}{4s^2|\nabla F|}, \forall\,(y,s) \in U_c. \tag{3.5}$$

La première égalité de (3.3) revient à

$$u(0,0) = -\int_{U_c} \frac{\partial_y F(y,s)}{\partial \nu_y} u(y,s). \tag{3.6}$$

Pour obtenir (3.6), l'idée est d'utiliser (3.1) avec $\Omega = B(0,0;c^{-1/n})$ et $v = F$. Ceci est impossible directement, car F n'est pas continue en $(0,0)$. On procède par approximation : si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, alors l'ensemble

$$\Omega_\varepsilon = \{(y,s) \in \mathring{B}(0,0;c^{-1/n});\, s < -\varepsilon\}$$

est Lipschitz, de bord $U_c^\varepsilon \sqcup I_c^\varepsilon$, où

$$U_c^\varepsilon = U_c \cap [s \le -\varepsilon],\ I_c^\varepsilon = B(0,r_c^\varepsilon) \times \{-\varepsilon\};$$

ici, $r_c^\varepsilon = c^{-1/n}[-2nc^{2/n}\varepsilon \ln(4\pi c^{2/n}\varepsilon)]^{1/2}$ (d'après l'Exercice 3.24). La formule de Goursat (3.1) appliquée dans Ω_ε donne

$$\int_{\partial\Omega_\varepsilon} \left[uF\nu_s + \left(u\frac{\partial F}{\partial \nu_y} - F\frac{\partial u}{\partial \nu_y} \right) \right] = 0. \tag{3.7}$$

Clairement, on a $\nu_s = 1$ et $\nu_y = 0$ sur I_c^ε.

Soit P la gaussienne standard, $P(x) = \dfrac{1}{(4\pi)^{n/2}} e^{-|x|^2/4}$, qui vérifie $\displaystyle\int P = 1$. En notant que $F(y,-\varepsilon) = P_{\sqrt{\varepsilon}}(y)$, et en utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{r_c^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon}} = \infty$, la Proposition 8.8 et l'Exercice 8.39, on trouve

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{I_c^\varepsilon} uF\nu_s = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{I_c^\varepsilon} uF = u(0,0). \tag{3.8}$$

Comme $F = c$ sur U_c, on a

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{U_c^\varepsilon} \left[uF\nu_s - F\frac{\partial u}{\partial \nu_y} \right] = c\int_{U_c} \left[u\nu_s - \frac{\partial u}{\partial \nu_y} \right] = 0, \tag{3.9}$$

en utilisant (3.2).

Enfin, $\dfrac{\partial F}{\partial \nu_y}$ étant intégrable sur U_c (Exercice 3.25), on trouve

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{U_c^\varepsilon} u\frac{\partial F}{\partial \nu_y} = \int_{U_c} u\frac{\partial F}{\partial \nu_y}. \tag{3.10}$$

On obtient (3.6) en combinant (3.7), (3.8), (3.9) et (3.10).

La deuxième égalité de (3.3) suit de la première et de (3.5). En prenant $u \equiv 1$ dans (3.3), on obtient que le dénominateur de la dernière ligne de (3.3) vaut 1.

Étape 2. On obtient (3.4) en utilisant la formule de la co-aire Théorème 8.23. On a

$$\begin{aligned} u(0,0) &= \frac{1}{4R^n}\int_{1/R^n}^{\infty}\frac{4u(0,0)}{c^2}\,dc = \frac{1}{4R^n}\int_{1/R^n}^{\infty}\int_{U(0,0;c)}\frac{|y|^2}{s^2|\nabla F|}u(y,s)\,d\mathcal{H}^n(y,s)\,dc \\ &= \frac{1}{4R^n}\int_{[F\geq 1/R^n]}\frac{|y|^2}{s^2}u(y,s)\,dy\,ds = \frac{1}{4R^n}\int_{B(x,t;R)}\frac{|y|^2}{s^2}u(y,s)\,dy\,ds. \end{aligned} \tag{3.11}$$

La deuxième égalité ci-dessus repose sur la dernière identité de (3.5); la troisième suit de la formule de la co-aire.

La deuxième égalité dans (3.4) s'obtient en prenant $u \equiv 1$ dans la première égalité de (3.4).

Étape 3. Preuve de la variante. L'identité (3.4) suit toujours de (3.3) en utilisant la formule de la co-aire. Pour obtenir (3.3) on applique, avec $0<\delta<R$ fixé, la formule (3.3) pour exprimer $u(x-\varepsilon,t)$ en fonction des valeurs de u sur $S(x-\varepsilon t;R-\delta)$. On fait ensuite $\varepsilon\searrow 0$, puis $\delta\searrow 0$. □

3.6 Corollaire.
Hypothèses. $B(x,t;r)\subset U\sqsubset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$. $u\in C^2(U)$ *vérifie* $Lu=0$ *dans* U.
Conclusion. On a

$$\min_{B(x,t;r)} u \leq u(x,t) \leq \max_{B(x,t;r)} u, \tag{3.12}$$

avec égalité si et seulement si u est constante dans $B(x,t;r)$.

Principes du maximum

3.7 Définition. Soient $\Omega\sqsubset\mathbb{R}^n$ et $-\infty<a<b<\infty$. La frontière parabolique de l'ouvert $\Omega\times(a,b)$ est

$$\Gamma = (\Omega\times\{a\})\cup(\partial\Omega\times[a,b]).$$

Si $a=0$, $b=T$, la frontière parabolique est notée Γ_T.
On pose aussi $\Omega_T=\Omega\times(0,T)$; c'est le cylindre parabolique de hauteur T. On définit de même le cylindre fermé $\overline{\Omega}_T=\overline{\Omega}\times[0,T]$.

3.8 Théorème (Principe du maximum)**.**
Hypothèses. $\Omega\sqsubset\mathbb{R}^n$ *est borné.* $u\in C^2(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega}_T)$. *u vérifie* $Lu=0$ *dans* Ω_T.
Conclusion.

$$\min_{\overline{\Omega}_T} u = \min_{\Gamma_T} u \quad \textit{et} \quad \max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u. \tag{3.13}$$

Variantes :

1. *Si* $u\in C^2(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega}_T)$ *et* $Lu\leq 0$ *dans* Ω_T, *alors* $\max_{\overline{\Omega}_T} u=\max_{\Gamma_T} u$.
2. *Si* $u\in C^2(\Omega_T)\cap C(\overline{\Omega}_T)$ *et* $Lu\geq 0$ *dans* Ω_T, *alors* $\min_{\overline{\Omega}_T} u=\min_{\Gamma_T} u$.

Démonstration. On traite le cas du maximum. On suppose d'abord

$$u \in C^2(\overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T). \tag{3.14}$$

Soit $v_\varepsilon(x,t) = u(x,t) - \varepsilon t$, où $\varepsilon > 0$.

Etape 1. On montre que

$$v_\varepsilon \text{ n'a pas de point de maximum en dehors de } \Gamma_T. \tag{3.15}$$

Preuve par l'absurde. Soit (x_0, t_0) point de maximum de v_ε dans $\overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$. En particulier, à x_0 fixé, $t_0 > 0$ est point de maximum de v_ε par rapport à $t \in [0, t_0]$, d'où $\partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0$.

De même, à t_0 fixé, x_0 est point de maximum de v_ε par rapport à x, d'où $\nabla_x v_\varepsilon(x_0, t_0) = 0$ et l'hessienne partielle de v_ε par rapport à x est négative. En particulier, la trace de l'hessienne est négative, c'est-à-dire $\Delta_x v_\varepsilon(x_0, t_0) \leq 0$.

On trouve la contradiction

$$-\varepsilon = L v_\varepsilon(x_0, t_0) = \partial_t v_\varepsilon(x_0, t_0) - \Delta_x v_\varepsilon(x_0, t_0) \geq 0.$$

Étape 2. Conclusion. Sous l'hypothèse (3.14), on a, d'après l'étape précédente,

$$\max_{\overline{\Omega}_T} v_\varepsilon \leq \max_{\Gamma_T} v_\varepsilon \leq \max_{\Gamma_T} u. \tag{3.16}$$

La conclusion du théorème (en supposant (3.14)) s'obtient en faisant $\varepsilon \nearrow 0$ dans (3.16).

Le cas général : on applique le cas précédent sur Ω_S, avec $0 < S < T$, puis on fait $S \nearrow T$.

La preuve des variantes est similaire. □

3.9 Corollaire.

Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.* $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ *solution de* $\begin{cases} Lu = f & \textit{dans } \Omega_T \\ u = g & \textit{sur } \Gamma_T \end{cases}$.

Conclusion. $|u| \leq T \sup |f| + \max |g|$.

En particulier, le problème $\begin{cases} Lu = f & \textit{dans } \Omega_T \\ u = g & \textit{sur } \Gamma_T \end{cases}$ *a au plus une solution* $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$.

Démonstration. Soit $v(x,t) = u(x,t) - \max |g| - t \sup |f|$. On a $Lv \leq 0$ dans Ω_T et $v \leq 0$ sur Γ_T, d'où $v \leq 0$. On obtient $v \leq 0$ dans $\overline{\Omega}_T$. De même, $u(x,t) + \max |g| + t \sup |f| \geq 0$ dans $\overline{\Omega}_T$. On trouve

$$|u(x,t)| \leq \max |g| + t \sup |f| \leq T \sup |f| + \max |g|.$$ □

3.10 Théorème (Principe du maximum rétrograde)**.**

Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *ouvert borné et connexe.* $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$ *vérifie* $Lu = 0$ *dans* Ω_T. $(x,t) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$ *est un point d'extrémum de* u.

Conclusion. u *est constante sur* $\overline{\Omega}_t$.

Démonstration. On traite le cas d'un point de maximum. Soit M le maximum de u. Un segment $I \subset \overline{\Omega}_T \setminus \Gamma_T$ d'extrémités (x_0, t_0) et (x_1, t_1) est appelé intervalle descendant si $t_0 > t_1$.

Étape 1. Si I *est descendant et si* $u(x_0, t_0) = M$, *alors* $u \equiv M$ *sur* I. En effet, soit

$$\tau := \inf\{\sigma \in [t_1, t_0]\,;\, u(y,s) = M,\ \forall (y,s) \in I \text{ avec } s \in [\sigma, t_0]\}.$$

Si $\tau = t_1$, on a fini. Sinon, on va aboutir à une contradiction. Soit $z \in \Omega$ tel que $(z,\tau) \in I$. Soit $r > 0$ tel que $B(z,\tau;r) \subset \Omega_T$. Le Théorème 3.5 donne $u \equiv M$ dans $B(z,\tau;r)$. Comme $I \cap B(z,\tau;r)$ est un intervalle non dégénéré [1], ceci contredit la minimalité de τ.

Étape 2. u est constante dans $\Omega \times (0,t)$. Au passage, ceci achève la preuve, car par continuité on a alors $u \equiv M$ dans $\overline{\Omega} \times [0,t]$.

Soit $(y,s) \in \Omega \times [0,t)$. Ω étant connexe, il est connexe par lignes polygonales : il existe $I_1,\ldots,I_j$ segments adjacents, d'extrémités $x, x_1, \ldots, x_j = y$, connectant x à y. Soient $t > t_1 > \ldots t_j = s$. Les segments de (x,t) à (x_1,t_1),..., de (x_{j-1},t_{j-1}) à (x_j,t_j) sont descendants, adjacents, et connectent (x,t) à (y,s). En utilisant la première étape, u est constante le long de chacun de ces segments, d'où $u(y,s) = u(x,t)$. □

3.11 Remarque. L'ingrédient clé de la preuve est le suivant : si (x,t) est un extrémum local de u vérifiant $Lu = 0$, alors u est constante sur $B(x,t;r)$, pour r suffisamment petit. Néanmoins, dans le principe du maximum rétrograde, il ne suffit pas de supposer (x,t) point de maximum local pour déduire que u est constante sur $\overline{\Omega} \times [0,t]$. Voici un contre-exemple : soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$ comme dans la Proposition 3.17. Soit $b > 0$ tel que $u(x,t) = 0$ si $t \geq b$. Soit Ω borné contenant l'origine (de sorte que $u(0,t) \not\equiv 0$ sur $[0,b]$). Si $b < t \leq T$, alors $(0,t)$ est un maximum (et minimum) local de u, mais $u \not\equiv 0$ dans $\overline{\Omega} \times [0,t]$.

3.12 Remarque. On ne peut pas améliorer la conclusion du théorème à $u \equiv u(x,t)$ dans $\overline{\Omega} \times [0, t+\varepsilon]$. On va donner un contre-exemple en admettant le résultat suivant de régularité parabolique : soit $\Omega = (0,1) \sqsubset \mathbb{R}$. Si $h \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$, alors il existe $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$ vérifiant $Lu = 0$ dans Ω_T et $u = h$ sur Γ_T. [2]

Soit $0 < t < T$. Soit $\varphi \in C^\infty([0,T], \mathbb{R}_-)$ telle que $\varphi \equiv 0$ sur $[0,t]$ et $\varphi \not\equiv 0$ sur $[0, t+\varepsilon]$, $\forall\, \varepsilon > 0$. [3] Soit $h(x,s) = \varphi(s)$. Soit $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$ solution de $\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \overline{\Omega}_T \\ u = h & \text{sur } \Gamma_T \end{cases}$. Le principe du maximum dans Ω_t donne $u \equiv 0$ dans $\Omega \times [0,t]$. Le principe du maximum dans Ω_T donne $u \leq 0$ dans Ω_T. Ainsi, (x,t) est un point de maximum, $\forall\, x \in \Omega$, mais la donnée au bord interdit d'avoir $u \equiv u(x,t)$ dans $\Omega \times [0, t+\varepsilon]$.

Nous allons maintenant mettre en œuvre la méthode d'énergie pour retrouver le Théorème 3.8 ; cette preuve est bien adaptée aux solutions faibles. D'abord un résultat préliminaire.

3.13 Lemme.
Hypothèse. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné.*
Conclusion. Il existe une suite (Ω_j) *d'ouverts de classe* C^∞ *tels que :*

1. $\Omega_j \Subset \Omega_{j+1} \Subset \Omega$.
2. $\lim_{j\to\infty} \sup_{x \in \partial\Omega_j} \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = 0$.

Démonstration. Soit $K_\varepsilon = \{x \in \Omega;\, \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \geq \varepsilon,\, |x| \leq 1/\varepsilon\}$. Notons que $\Omega = \bigcup_j K_{1/(2j)}$. Soit $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega;[0,1])$ telle que $\varphi_j \equiv 1$ dans $K_{1/(2j)}$ et $\operatorname{supp}\varphi_j \subset K_{1/(2j+1)}$. Le lemme de Sard (Théorème 8.14) implique l'existence d'un $t_j \in (0,1)$ valeur régulière de φ_j. Si on pose $\Omega_j = \{x;\, \varphi_j(x) > t_j\}$, alors Ω_j est C^∞ (en utilisant la Proposition 8.16). Par ailleurs, on a

$$K_{1/(2j)} \subset \Omega_j \subset K_{1/(2j+1)} \Subset K_{1/(2j+2)} \subset \Omega_{j+1},$$

d'où $\Omega_j \nearrow \Omega$. Enfin, $x \in \partial\Omega_j \Longrightarrow x \notin K_{1/(2j)} \Longrightarrow \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) < 1/(2j)$. □

1. C'est ici qu'intervient le fait que I est descendant.
2. Exercice : ceci découle du Théorème 3.15.
3. Prendre par exemple $\varphi(s) = \begin{cases} 0, & \text{si } s \leq t \\ -e^{-(t-s)^{-2}}, & \text{si } s > t \end{cases}$.

Preuve du Théorème 3.8 par la méthode d'énergie. Montrons par exemple que

$$\max_{\overline{\Omega}_T} u = \max_{\Gamma_T} u \tag{3.17}$$

sous l'hypothèse $Lu \le 0$.

Étape 1. On prouve (3.17) *sous les hypothèses supplémentaires* Ω *de classe* C^1 *et* $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$. Soit $M = \max_{\Gamma_T} u$. Soit $\Phi \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ telle que : $\Phi(t) = 0$ si $t \le M$, $\Phi(t) > 0, \Phi'(t) \ge 0, \Phi''(t) \ge 0$ si $t > M$.[4]

En multipliant l'inégalité $Lu \le 0$ par $\Phi'(u)$ et en intégrant sur Ω à t fixé, on trouve

$$0 \ge \int_\Omega (\Phi'(u)\partial_t u - \Phi'(u)\Delta_x u) = \partial_t \left(\int_\Omega \Phi(u) \right) + \int_\Omega \Phi''(u)|\nabla_x u|^2.$$

Il s'ensuit que $t \mapsto F(t) := \int_\Omega \Phi(u(\cdot,t))$ décroît. Comme $F(0) = 0$, on trouve $F(t) \le 0$, $\forall\, t$, d'où $u \le M$.

Étape 2. Le cas général. Soit Ω_j comme dans le Lemme 3.13. Si $\varepsilon > 0$, alors la première étape appliquée au cylindre $\Omega_j \times [\varepsilon, T - \varepsilon]$ donne

$$\max_{\overline{\Omega_j} \times [\varepsilon, T-\varepsilon]} u = \max_{(\Omega_j \times \{\varepsilon\}) \cup (\partial\Omega_j \times [\varepsilon, T-\varepsilon])} u.$$

On conclut en faisant, dans cette égalité, $\varepsilon \searrow 0$ et $j \to \infty$. Au passage, on utilise *2.* du Lemme 3.13 et la continuité uniforme de u sur $\overline{\Omega}_T$. □

Passons aux résultats d'existence. Les deux résultats qui suivent sont les pendants paraboliques des théorèmes de Poincaré et Kellogg pour le problème de Dirichlet homogène

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \Omega_T \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times [0,T] \end{cases}. \tag{3.18}$$

Nous supposerons satisfaite la condition de compatibilité

$$u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \tag{3.19}$$

qui revient à $u \in C_0(\Omega)$ si Ω est borné lipschitzien.

Une solution classique de (3.18) a la régularité $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega}_T)$.

3.14 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné lipschitzien.* $u_0 \in C_0(\Omega)$.
Conclusion. (3.18) *a une solution classique.*

Si on veut plus de régularité, il ne suffit pas de supposer u_0 et Ω plus réguliers. Il y a des conditions supplémentaires de compatibilité. Par exemple, si $u \in C^\infty(\overline{\Omega}_T)$, alors à partir de l'équation $Lu = 0$ satisfaite si $t = 0$ on conclut à

$$\Delta^k u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \forall\, k \in \mathbb{N}^*. \tag{3.20}$$

3.15 Théorème.
Hypothèses. $\Omega \sqsubset \mathbb{R}^n$ *borné de classe* C^∞. $u_0 \in C^\infty(\overline{\Omega})$. *Les conditions de compatibilité* (3.20) *sont satisfaites.*
Conclusion. La solution de (3.18) *est de classe* $C^\infty(\overline{\Omega}_T)$.

L'approche la plus naturelle pour montrer ces deux résultats passe par la théorie des semi-groupes (théorème de Hille-Yosida). Nous y reviendrons.

4. Par exemple, $\Phi(t) = [(t-M)_+]^4$ convient.

Non unicité

Dans cette section, nous allons voir que l'équation de la chaleur dans le demi-espace

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u_{|t=0} = 0 \end{cases} \tag{3.21}$$

a une infinité de solutions (Proposition 3.17), mais que la solution du problème non homogène

$$\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \\ u_{|t=0} = f \end{cases} \tag{3.22}$$

donnée par (1.3) est la seule raisonnable (Proposition 3.18 et Théorème 3.19).

Le résultat suivant est la généralisation des inégalités de Cauchy (pour les fonctions holomorphes) à des fonctions de plusieurs variables.

3.16 Lemme.
Hypothèses. P est un polynôme de n variables. $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $r > 0$.
Conclusion. On a

$$|\partial^\alpha P(x)| \le \frac{\alpha!}{r^{|\alpha|}} \sup_{\Gamma(x,r)} |P(z)|, \forall\, x \in \mathbb{R}^n,$$

où $\Gamma(x,r) = \{z \in \mathbb{C}^n\,;\, |z_j - x_j| = r, \forall\, j\}$. [5]

Démonstration. Le cas $n = 1$ correspond aux inégalités de Cauchy. La récurrence sur n est immédiate. □

3.17 Proposition. *Le problème (3.21) admet des solutions non triviales dans $C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$.*

Démonstration.
Étape 1. Construction de u. On s'appuie sur le résultat suivant, dont la preuve est simple [14, Theorem 1.3.5, p. 19] : soit (a_j) une suite décroissante de nombre positifs telle que $\sum a_j < \infty$. Soit $\beta_j := 2^j/(a_0 \cdot \ldots \cdot a_j)$. Alors il existe une fonction $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}_+)$, non identiquement nulle, telle que $|f^{(j)}(t)| \le \beta_j$, $\forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, j \in \mathbb{N}$. On considère une telle fonction f correspondant au choix $a_0 = 1$, $a_j = \dfrac{1}{j^a}$, $\forall\, j \ge 1$, où $a \in]1,2[$.

Soient $\alpha_j := 2j(2j+n-2)$, $c_0 := 1$ et $c_j := \dfrac{1}{\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_j}$, $\forall\, j \ge 1$. On choisit $u(x,t) := \sum_j \underbrace{c_j f^{(j)}(t)|x|^{2j}}_{u_j}$.

Étape 2. u est C^∞ et $\partial^\alpha u = \sum \partial^\alpha u_j$, $\forall\, \alpha \in \mathbb{N}^{n+1}$. Il suffit de montrer que $\sum \partial^\alpha u_j$ converge normalement sur tout $K \Subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Soit R tel que $|x| \le R, \forall\, (x,t) \in K$. On écrit $\alpha = (\gamma, \alpha_0)$, avec $\alpha_0 \in \mathbb{N}$, $\gamma \in \mathbb{N}^n$. En utilisant le lemme 3.16 on obtient (voir l'exercice 3.23)

$$\sum_j \sup_K |\partial^\alpha u_j| \le \sum_j c_j \beta_{j+\alpha_0} \gamma! (1 + \sqrt{n} R)^{2j} R^{2j-|\gamma|} \equiv \sum m_j.$$

On a $\lim\limits_{j\to\infty} \dfrac{m_{j+1}}{m_j} = 0$. La série des m_j est donc convergente.

Étape 3. u n'est pas identiquement nulle. On a $u(t,0) = f(t) \not\equiv 0$.

5. Plus généralement, on peut considérer $x \in \mathbb{C}^n$, à condition de prendre la dérivée complexe $(\partial_{z_1})^{\alpha_1} \ldots (\partial_{z_n})^{\alpha_n}$. La preuve reste inchangée.

Étape 4. u vérifie (3.21). En utilisant les égalités $\Delta_x|x|^{2j} = \alpha_j|x|^{2(j-1)}$, $\alpha_{j+1}c_{j+1} = c_j$, $\forall j \geq 0$ et l'étape *2.*, on obtient

$$\begin{aligned} Lu(x,t) &= \sum_{j\geq 0} c_j f^{(j+1)}(t)|x|^{2j} - \sum_{j\geq 1} c_j f^{(j)}(t)\alpha_j|x|^{2(j-1)} \\ &= \sum_{j\geq 0} c_j f^{(j+1)}(t)|x|^{2j} - \sum_{j\geq 0} c_{j+1} f^{(j+1)}(t)\alpha_{j+1}|x|^{2j} = 0. \end{aligned}$$

□

Le résultat suivant montre que les solutions non-nulles de (3.21) sont très grandes, donc non physiques.

3.18 Proposition.

Hypothèses. $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ *solution de* $\begin{cases} Lu = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u_{|t=0} = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \end{cases}$. *Il existe* $C > 0, a > 0$ *tels que* $|u(x,t)| \leq Ce^{a|x|^2}$ $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^n \times [0,T]$.
Conclusion. $u \equiv 0$.

Démonstration. Il suffit de montrer que $u \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,\varepsilon]$, avec ε suffisamment petit, puis de recommencer à partir de $t = \varepsilon$.

Soit $\varepsilon < \dfrac{1}{8a}$. Soit $v(x,t) := \dfrac{1}{(2\varepsilon - t)^{n/2}} e^{|x|^2/(4(2\varepsilon-t))}$. On vérifie que $Lv = 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,\varepsilon]$.

Soit $\delta > 0$ et $w := u - \delta v$. Comme $v(x,t) \geq \dfrac{1}{(2\varepsilon)^{n/2}} e^{|x|^2/(8\varepsilon)}$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall t \in [0,\varepsilon]$, on trouve que, pour R suffisamment grand (dépendant de δ), on a $w < 0$ sur la frontière parabolique de $B(0,R) \times (0,\varepsilon)$. Le principe du maximum implique $w \leq 0$ sur $\overline{B}(0,R) \times [0,\varepsilon]$. En faisant $R \to \infty$, on obtient $w \leq 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,\varepsilon]$. En faisant $\delta \to 0$, on trouve $u \leq 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,\varepsilon]$. Par symétrie, on a aussi $u \geq 0$ sur cet ensemble, d'où $u \equiv 0$ dans $\mathbb{R}^n \times [0,\varepsilon]$. □

Le dernier résultat de cette partie suggère que la solution de (1.1) donnée par (1.3) est la seule raisonnable. Si u est censée représenter une température, alors u (dans l'échelle de Kelvin) doit être positive pour tout temps.

3.19 Théorème (Widder)**.**
Hypothèses. $u \in C(\mathbb{R} \times [0,T])$ *solution positive de* $Lu = 0$ *dans* $\mathbb{R} \times (0,T)$. $f := u_{|t=0}$.
Conclusion. u est donnée par (1.3)*, c'est-à-dire* $u(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} E(x-y,t)f(y)\,dy$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall t \in (0,T)$.

Au vu de ce résultat et d'autres résultats similaires, la solution (1.3) est adoptée comme "la" solution du problème (1.1). C'est la solution "mild". [6]

Formule de Duhamel

Considérons maintenant le problème non homogène

$$\begin{cases} Lu = F(x,t) & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0,T) \\ u_{|t=0} = f \end{cases}. \tag{3.23}$$

En reprenant le calcul formel qui mène à la solution (1.3) du problème homogène (1.1), on devine que la solution est donnée par

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} E(x-y,t-s)F(y,s)\,dy\,ds. \tag{3.24}$$

6. En français dans le texte...

L'intégrande (par rapport à la variable s) de cette formule n'est rien d'autre que la solution, à l'instant t du problème homogène $Lu = 0$ avec comme donnée, à l'instant $s < t$, la fonction $y \mapsto f(y,s)$. En interprétant l'intégrale en s comme une somme infinie, on peut voir u comme une superposition (infinie) de solutions de l'équation homogène avec données initiales $y \mapsto f(y,s)$ à l'instant s ; c'est le principe de Duhamel.

Notons que (3.24) ne peut donner qu'une des solutions de (3.23). Comme pour l'équation homogène, cette solution est "la" solution raisonnable ; c'est la solution "mild".

Effets dispersifs

Nous allons examiner le comportement, lorsque $t \to \infty$, d'une solution mild de (1.1) avec donnée $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Soit $P(x) := E(x,1)$, de sorte que $E(\cdot,t) = P_{\sqrt{t}}$. Quel que soit p, on a

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p} = \|P_{\sqrt{t}} * f\|_{L^p} \le \|P_{\sqrt{t}}\|_{L^1}\|f\|_{L^p} = \|f\|_{L^p}. \tag{3.25}$$

Plus généralement, en notant que $u(\cdot,t) = P_{\sqrt{t-s}} * u(\cdot,s)$, $0 \le s < t$ (Exercice 3.27), on trouve

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \le \|u(\cdot,s)\|_{L^p},\ 0 \le s < t. \tag{3.26}$$

Si $p = \infty$, (3.26) ne peut pas être améliorée : si on prend $f \equiv 1$, alors on a $u \equiv 1$.

De même, (3.26) ne peut pas être améliorée si $p = 1$: si $f \in L^1$ est positive, alors (3.25) et (3.26) deviennent égalités.

Pour les autres valeurs de p on a bien de la dispersion, c'est-à-dire la solution s'étale lorsque le temps tend vers l'infini.

3.20 Proposition.
Hypothèses. $1 < p < \infty$. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
Conclusion. La solution de (1.1) *satisfait* $\lim\limits_{t\to\infty} \|u(\cdot,t)\|_{L^p} = 0$.

Démonstration.
Étape 1. Le cas $p = 2$. Dans ce cas, on a

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\|\mathscr{F}u(\cdot,t)\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\|e^{-t|\xi|^2}\hat{u}(\xi)\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } t \to \infty,$$

la limite s'obtenant par convergence dominée.

Étape 2. Le cas $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit, pour commencer, $p \in (1,2]$. Alors il existe $\theta \in (0,1]$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1-\theta}{1}$. En utilisant l'inégalité de Hölder (8.2), on trouve

$$\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \le \|u(\cdot,t)\|_{L^2}^{\theta}\|u(\cdot,t)\|_{L^1}^{1-\theta} \le \|u(\cdot,t)\|_{L^2}^{\theta}\|f\|_{L^1}^{1-\theta} \to 0 \text{ quand } t \to \infty.$$

Si $p \in [2,\infty)$, on écrit $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{2} + \dfrac{1-\theta}{\infty}$ et on aboutit à la même conclusion.

Étape 3. Le cas général. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon$. Soit v la solution de (1.1) avec donnée initiale g. Alors $\|u(\cdot,t) - v(\cdot,t)\|_{L^p} < \varepsilon$, par (3.25). L'étape 2. implique

$$\limsup_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)\|_{L^p} \le \limsup_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p} + \limsup_{t\to\infty}\|v(\cdot,t)\|_{L^p} = \limsup_{t\to\infty}\|u(\cdot,t)-v(\cdot,t)\|_{L^p} \le \varepsilon.$$

□

Un deuxième type de dispersion est décrit par la

3.21 Proposition.
Hypothèses. *u solution de* (1.1). $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.
Conclusion. $|u(x,t)| \le t^{-n/(2p)} \|f\|_{L^p}$.

Démonstration. L'inégalité de Hölder donne, avec q le conjugué de p,

$$|u(x,t)| = |P_{\sqrt{t}} * f(x)| \le \|P_{\sqrt{t}}\|_{L^q} \|f\|_{L^p} = t^{-n/(2p)} \|f\|_{L^p}. \qquad \square$$

Exercices

3.22 Exercice. (Critique de l'équation de la chaleur). * Si on allume le feu  à Lyon, montrer que son effet se fait instantanément ressentir partout dans le monde.

3.23 Exercice. On a $|\partial^\gamma |x|^{2j}| \le \gamma!(1+\sqrt{n})^{2j} |x|^{2j-|\gamma|}$, $\forall \gamma \in \mathbb{N}^n$.

3.24 Exercice. * On a

1. $B(x,t;r) = (x,t) + B(0,0;r)$;
2. $B(0,0;r) = \{(rx, r^2 t) ; (x,t) \in B(0,0;1)\}$;
3. $B(0,0;r) = \{(x,t) ; -r^2/(4\pi) \le t \le 0, |x| \le r(2nt/r^2 \ln(-4\pi t/r^2))^{1/2}\}$.

3.25 Exercice. * Avec les notations de la preuve du Théorème 3.5, montrer que $\displaystyle\int_{U_c} \frac{\partial_y F(y,s)}{\partial \nu_y}$ converge.

3.26 Exercice. Un cas particulier de (3.4) est l'identité

$$\int_{B(x,t;r)} \frac{|y-x|^2}{(t-s)^2} \, dy ds = 4r^n. \tag{3.27}$$

Prouver directement cette formule.

3.27 Exercice. * Soit $P = E(\cdot, 1)$.

1. Montrer que $P_{\sqrt{t}} * P_{\sqrt{s}} = P_{\sqrt{t+s}}$, $\forall s,t > 0$. [Indication : prendre la transformée de Fourier.]
2. En déduire que la solution mild de (3.21) vérifie $u(\cdot,t) = P_{\sqrt{t-s}} u(\cdot,s)$, $0 < s < t$. Quel est le résultat analogue pour les EDO ?

Indications

Exercice 3.23. On applique le Lemme 3.16 avec $r = |x|$. Si $z \in \Gamma(x,r)$, alors $|z_j - x_j| = r$, d'où $|z-x| \le \sqrt{n} r$ et $|z| \le (1+\sqrt{n})r$. On trouve

$$|\partial^\gamma |x|^{2j}| \le \frac{\gamma!}{|x|^{|\gamma|}} \max_{|z| \le (1+\sqrt{n})|x|} |z|^{2j} \le \gamma!(1+\sqrt{n})^{2j} |x|^{2j-|\gamma|}.$$

Exercice 3.26. Grâce à l'Exercice 3.24, le cas général se ramène au cas $x = 0$, $t = 0$ et $r = 1$ par translation et changement d'échelle. Soit I l'intégrale de l'énoncé, avec $x = 0$, $t = 0$ et $r = 1$. Soit, pour $-1/(4\pi) \le s \le 0$, $R(s) = (2ns \ln(-4\pi s))^{1/2}$. En utilisant le Corollaire 8.40 et en faisant le changement de variables $\ln(-4\pi s) = -\frac{2}{n}v$, on trouve

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-1/(4\pi)}^{0} \int_{|y|\le R(s)} \frac{|y|^2}{s^2}\, dy ds = \sigma_n \int_{-1/(4\pi)}^{0} \frac{R(s)^{n+2}}{(n+2)s^2}\, ds \\
&= \frac{(2n)^{(n+2)/2}\sigma_n}{n+2} \int_{-1/(4\pi)}^{0} s^{n/2-1}[\ln(-4\pi s)]^{n/2+1}\, ds = \frac{8\sigma_n}{n(n+2)\pi^{n/2}} \int_0^\infty v^{n/2+1} e^{-v}\, dv \\
&= \frac{8\sigma_n \Gamma(n/2+2)}{n(n+2)\pi^{n/2}} = \frac{8\sigma_n (n/2+1)(n/2)\Gamma(n/2)}{n(n+2)\pi^{n/2}} = \frac{2\sigma_n \Gamma(n/2)}{\pi^{n/2}} = 4,
\end{aligned}$$

la dernière égalité étant justifiée par l'identité (8.4).

Commentaires

1. Pour la preuve de (3.3), j'ai suivi Fulks [8]. La formule (3.4), qui est une conséquence immédiate de (3.3), a été mise en évidence par Watson [21].