Université Claude Bernard Lyon 1 Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
Approfondissement en analyse Année 2018-2019

Complément #1

Exercice #1 **(inégalité de Young (II)).**

a) Montrer que la fonction $\ln :]0,\infty \to \mathbb{R}$ est concave.

b) Quelle information donne la concavité du ln sur le signe de la quantité

$$\lambda \ln x + (1-\lambda)\ln y - \ln(\lambda x + (1-\lambda)y)),\ \forall \lambda \in]0,1[,\ \forall x, y > 0?$$

c) En déduire d'abord l'inégalité

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \le \lambda x + (1-\lambda)y,\ \forall \lambda \in]0,1[,\ \forall x, y > 0, \tag{1}$$

puis l'inégalité de Young

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall a, b \ge 0,\ \forall p, q \in]1,\infty[\text{ tels que } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{2}$$

Exercice #2 **(inégalité de Young (III)).**

Soit $f : [0,\infty[\to [0,\infty[$ une fonction continue, strictement croissante telle que $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

a) Donner deux exemples de telles fonctions « de natures différentes ».

b) Quelles sont les propriétés de la fonction réciproque g de f ?

c) Comment obtient-on le graphe de g à partir de celui de f ?

d) À partir de cette représentation graphique, « montrer graphiquement » l'inégalité (toujours de Young)

$$\int_0^a f(x)\,dx + \int_0^b g(y)\,dy \ge ab,\ \forall a, b \ge 0. \tag{3}$$

e) Prouver (3) par une étude de fonctions.

1. Soient $p, q \in]1,\infty[$ tels que $1/p + 1/q = 1$. Soit $f(x) = x^{p-1}$, $\forall x \ge 0$. Calculer g et écrire ce que devient (3) dans ce cas.

Exercice #3 **(espaces ℓ^p).** Soit $\mathscr{S}$ l'espace des suites à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,

$$\mathscr{S} = \{a = (a_n)_{n\ge0}\,;\, a_n \in \mathbb{K},\ \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Pour $a \in \mathscr{S}$ et $1 \le p < \infty$, soit

$$\|a\|_p = \left(\sum_{n\ge0} |a_n|^p\right)^{1/p},$$

avec la convention $\infty^{1/p} = \infty$.

Si $a \in \mathscr{S}$, alors

$$\|a\|_\infty = \sup\{|a_n|\,;\, n \in \mathbb{N}\},$$

avec la convention que si un ensemble n'est pas majoré, alors son sup est ∞.

Pour $1 \le p \le \infty$, soit

$$\ell^p = \{a \in \mathscr{S}\,;\, \|a\|_p < \infty\}.$$

a) Soit $a = (1, 1/2, 1/3, \ldots)$. Pour quelles valeurs de p a-t-on $a \in \ell^p$?

b) Si $1 \leq p < \infty$, montrer que $\|a+b\|_p \leq \|a\|_p + \|b\|_p$, $\forall\, a, b \in \mathscr{S}$. (On pourra se rappeler la définition de la somme d'une série.)

c) Déduire de la question précédente que $(\ell^p, \|\ \|_p)$ est un espace normé.

d) (Question plus difficile) Montrer que

$$\sup\{|a_n|\,;\, n \in \mathbb{N}\} = \lim_{n\to\infty} \sup\{|a_k|\,;\, k = 0, \ldots, n\}.$$

e) Déduire de la question précédente que $(\ell^\infty, \|\ \|_\infty)$ est un espace normé.

Exercice #4 **(inégalité de Cauchy-Schwarz (III)).** Reprendre, pour un produit scalaire réel, la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire complexe.