Université Claude Bernard Lyon 1 Licence de mathématiques 3e année
UE Éléments d'analyse fonctionnelle Année 2025–2026

Compléments aux chapitres Espaces L^p et Convolution

Changements affines de variables dans $\mathbb{R}^n$ (Voir le chapitre 9 du cours.) Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, ou plus généralement Lebesgue mesurable. Si $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = |\det A| \int_{\mathbb{R}^n} f(a + Ay)\, dy$$

au sens du théorème de changement de variables.

En particulier, le changement de variables $y = x - z$ donne

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)\, dz$$

et, si $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont Lebesgue mesurables,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x - y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - z)\, g(z)\, dz = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)\, g(y)\, dy,$$

égalités au sens du théorème de changement de variables.

Intégrale des fonctions radiales (Voir l'exercice 18 de la feuille 6 de TD.) Nous notons $|\ |$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbb{R}^n$. Il existe une constante $C_n \in]0, \infty[$, dépendant uniquement de n, avec la propriété suivante. Si $g : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable et si $f(x) := g(|x|)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = C_n \int_{[0,\infty[} r^{n-1} g(r)\, dr$$

au sens du théorème de changement de variables.

Considérons la situation la plus générale où l'intégration se fait uniquement sur l'ensemble

$$B := \{x \in \mathbb{R}^n\, ;\ |x| \in A\},$$

où $A \subset \mathbb{R}$ est borélien. Alors B est borélien (justifier) et nous avons

$$\int_B f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(|x|) \chi_A(|x|)\, dx = C_n \int_{[0,\infty[} r^{n-1} g(r) \chi_A(r)\, dr = C_n \int_A r^{n-1} g(r)\, dr$$

au sens du théorème de changement de variables.

Quelques cas particuliers.

1. Si $B = B(0,R)$, alors $A = [0,R[$. Nous obtenons
$$\int_{B(0,R)} g(|x|)\,dx = C_n \int_{[0,R[} r^{n-1} g(r)\,dr.$$
2. Si $B = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, R_1 < |x| < R_2\}$, alors $A =]R_1, R_2[$. Nous obtenons
$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,R_1<|x|<R_2\}} g(|x|)\,dx = C_n \int_{]R_1,R_2[} r^{n-1} g(r)\,dr.$$
3. Si $B = \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| \geq R\}$, alors $A = [R, \infty[$. Nous obtenons
$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\,;\,|x|\geq R\}} g(|x|)\,dx = C_n \int_{[R,\infty[} r^{n-1} g(r)\,dr.$$

Les égalités ci-dessus sont au sens du théorème de changement de variables.

Sur le relation entre les exposants p, q, r dans l'inégalité de Young (Voir le théorème 11.2 du cours.) Nous allons expliquer pourquoi la relation
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r} \tag{1}$$
est *nécessaire* pour la validité de l'inégalité de Young, ou même d'une inégalité du style de l'inégalité de Young. Plus précisément, nous allons montrer que si l'inégalité
$$\|f * g\|_r \leq C\|f\|_p \|g\|_q,\ \forall\, f \in \mathscr{L}^p,\ \forall\, g \in \mathscr{L}^q, \tag{2}$$
est vraie pour une constante finie C, alors nous avons nécessairement (1).

Commençons par un argument physique, qui ne constitue pas un preuve mais guide la preuve mathématique. (a) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction scalaire, alors son intégrale sur $\mathbb{R}^n$ se mesure en m^n. (b) Comme $|f|^p$ est encore un scalaire, il s'ensuit que l'intégrale de $|f|^p$ se mesure encore en m^n, et donc $\|f\|_p$ se mesure en $m^{n/p}$. (Cette conclusion reste vraie si $p = \infty$.) (c) De même, $\|g\|_q$ se mesure en $m^{n/q}$. (d) De même, $f * g(x)$ se mesure en m^n, $|f * g(x)|^r$ en m^{nr} et $\|f * g\|_r$ en $m^{n+n/r}$. (e) Si (2) est vraie, alors les unités de mesure des deux côtés doivent être les mêmes. (Selon le principe général qu'une identité doit être cohérente en termes d'unités de mesure.) De ce qui précède, le membre de gauche de (2) se mesure en $m^{n+n/r}$, et celui de droite en $m^{n/p} m^{n/q} = m^{n/p+n/q}$. Il s'ensuit que
$$n + \frac{n}{r} = \frac{n}{p} + \frac{n}{q},$$
ce qui donne (1).

La démarche mathématique qui transforme ce qui précède en preuve est celle du *changement d'échelle* (dans l'espace). Elle fonctionne comme suit. Soient $\lambda > 0$, $f_\lambda(x) \coloneqq f(\lambda x)$, $g_\lambda(x) \coloneqq g(\lambda x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

($x \mapsto \lambda x$ est le *changement d'échelle* dans l'espace.) En utilisant plusieurs fois des changements affines ou linéaires de variables, nous obtenons respectivement :

$$f_\lambda * g_\lambda(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x - \lambda y)\, g(\lambda y)\, dy = \lambda^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(\lambda x - z)\, g(z)\, dz = \lambda^{-n} f * g(\lambda x),$$

$$\|f_\lambda * g_\lambda\|_r = \lambda^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(\lambda x)|^r\, dx \right)^{1/r} = \lambda^{-n-n/r} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f * g(y)|^r\, dy \right)^{1/r} = \lambda^{-n-n/r} \|f * g\|_r,$$

et, de même,

$$\|f_\lambda\|_p = \lambda^{-n/p} \|f\|_p, \ \|g_\lambda\|_q = \lambda^{-n/q} \|g\|_q,$$

si $1 < p, q, r < \infty$. (Les identités obtenues restent vraies si les exposants valent ∞.)

En insérant ces identités dans (2) appliquée à f_λ et g_λ (c'est là l'argument de changement d'échelle), nous obtenons

$$\lambda^{-n-n/r} \|f * g\|_r \leq C \lambda^{-n/p-n/q} \|f\|_p \|g\|_q, \ \forall\, f \in \mathscr{L}^p, \ \forall\, g \in \mathscr{L}^q, \ \forall\, \lambda > 0. \tag{3}$$

Prenons maintenant f et g telles que les trois normes dans (3) soient finies et strictement positives. On admet que cela est vrai, par exemple, si f et g sont les fonctions caractéristiques d'une boule (le calcul est aisé). Alors (3) devient

$$\lambda^{-n-n/r+n/p+n/q} \leq C \frac{\|f\|_p \|g\|_q}{\|f * g\|_r}, \ \forall\, \lambda > 0,$$

et donc $\lambda \mapsto \lambda^{-n-n/r+n/p+n/q}$ est bornée. Or, la seule fonction puissance bornée est $\lambda \mapsto \lambda^0$. Il s'ensuit que $-n - n/r + n/p + n/q = 0$, ce qui donne (1).

Un exercice pour tester l'argument de changement d'échelle dans un autre contexte.

Exercice. Si $\alpha, \beta, C \in \mathbb{R}$ sont tels que

$$\|f'\|_\infty \leq C \|f\|_\infty^\alpha \|f''\|_\infty^\beta, \ \forall\, f \in C^2(\mathbb{R}), \tag{4}$$

montrer que $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$. (Ici, $\|g\|_\infty$ désigne $\sup |g|$.)

(Indication : tester (4) pour $t f_\lambda$, avec $t, \lambda > 0$.) Par ailleurs, on peut montrer que la condition $\alpha = \beta = \dfrac{1}{2}$ est suffisante, et que nous avons l'*inégalité de Landau-Hadamard*

$$\|f'\|_\infty \leq \sqrt{2} \|f\|_\infty^{1/2} \|f''\|_\infty^{1/2}, \ \forall\, f \in C^2(\mathbb{R}).$$