Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^{e} année
Approfondissement en analyse — Année 2018-2019

Complément #2
Caractérisations « séquentielles » (à l'aide des suites)

Notations, cadre

a) La notation $(x^j) \subset X$ désigne une suite de terme général x^j dont tous les termes appartiennent à X. La notation « officielle » serait $(x^j) \in X^{\mathbb{N}}$.

b) (x^{j_k}) désigne une sous-suite de (x^j).

c) Nous nous plaçons dans un espace métrique (X, d). Les applications données en cours vont porter plus spécifiquement sur les espaces normés $(E, \| \ \|)$ munis de la distance induite par la norme : $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall\, x, y \in E$.

1. Par définition, $x^j \to x$ si et seulement si $d(x^j, x) \to 0$ (sous-entendu quand $j \to \infty$).
2. $F \subset X$ est un fermé si et seulement si :
$$\left[(x^j) \subset F, x^j \to x\right] \implies [x \in F].$$
3. $U \subset X$ est ouvert si et seulement si U^c est fermé.
4. $K \subset X$ est compact si et seulement si : pour toute suite $(x^j) \subset K$, il existe une sous-suite (x^{j_k}) et un point $x \in K$ tels que $x^{j_k} \to x$ (pour $k \to \infty$).
5. Soit $A \subset X$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Soit $x \in A$. Alors f est continue au point x si et seulement si :
$$\left[(x^j) \subset A,\ x^j \to x\right] \implies [f(x^j) \to f(x)].$$
6. Soit $A \subset X$. Soit $f : A \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$). Alors f est continue si et seulement si :
$$\left[(x^j) \subset A,\ x \in A,\ x^j \to x\right] \implies [f(x^j) \to f(x)].$$
7. Théorème. Soit $K \subset X$ un compact. Soit $f : K \to \mathbb{R}$ continue. Alors il existe $\underline{x} \in K$, $\overline{x} \in K$ tels que
$$f(\underline{x}) \le f(x) \le f(\overline{x}),\ \forall\, x \in K.$$
De manière équivalente, f a un point de maximum et un point de minimum sur K.