Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^{e} année
Approfondissement en analyse | Année 2018-2019

Complément #3
Formules de Taylor à l'ordre 1 et 2

Notations, cadre

a) Pour simplifier la compréhension, nous considérons uniquement des fonctions définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^N$. U est un ouvert de $\mathbb{R}^N$, et $f : U \to \mathbb{R}$.
b) a, b sont des points de U, et $[a, b]$ désigne le segment (fermé) entre a et b.
c) $\partial_j f(a)$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à x_j au point $a \in U$. $\partial_i \partial_j f(a)$ est la dérivée par rapport à x_i de $\partial_j f$, calculée en a.
d) $\|\|$ est une norme quelconque sur $\mathbb{R}^N$. Les « petits o » sont pour $h \to 0$.
e) Plus généralement, nous aurions pu considérer des fonctions f définies sur un ouvert d'un espace normé E de dimension finie N. Dans ce cadre, nous fixons une base $\{e_1, \dots, e_N\}$ de E et nous pouvons retrouver les propriétés et formules correspondant à f à partir des propriétés et formules correspondant à $F(x_1, \dots, x_N) := f(x_1 e_1 + \cdots + x_N e_N)$.

Formule de Taylor à l'ordre 1 « avec reste en petit o »

Hypothèse. f différentiable en a.

Conclusion. $f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{N} [\partial_j f(a)] h_j + o(\|h\|)$.

Formule de Taylor à l'ordre 1 « avec point intermédiaire »

Hypothèses. f différentiable dans U. $[a, b] \subset U$.

Conclusion. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(b) = f(a) + \sum_{j=1}^{N} [\partial_j f(c)](b_j - a_j) = f(a) + \langle \nabla f(c), b - a \rangle$.

Formule de Taylor à l'ordre 1 « avec reste intégral »

Hypothèses. f de classe $\mathscr{C}^1$ dans U (c'est-à-dire, les dérivées partielles du premier ordre de f existent et sont continues dans U). $[a, b] \subset U$.

Conclusion. $f(b) = f(a) + \int_0^1 \sum_{j=1}^{N} [\partial_j f(a + t(b-a))](b_j - a_j)\, dt = f(a) + \int_0^1 \langle \nabla f(a + t(b-a)), (b-a) \rangle\, dt$.

Formule de Taylor à l'ordre 2 « avec reste en petit o »

Hypothèses. f différentiable dans U. f deux fois différentiable en a (c'est-à-dire, les dérivées partielles du premier ordre de f sont différentiables en a).

Conclusion. $f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{N} [\partial_j f(a)] h_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} [\partial_i \partial_j f(a)] h_i h_j + o(\|h\|^2)$.

Formule de Taylor à l'ordre 2 « avec point intermédiaire »

Hypothèses. f deux fois différentiable dans U (c'est-à-dire, les dérivées partielles du premier ordre de f sont différentiables).

Conclusion. Il existe un point $c \in [a, b]$ tel que

$$f(b) = f(a) + \sum_{j=1}^{N} [\partial_j f(a)](b_j - a_j) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} [\partial_i \partial_j f(c)](b_i - a_i)(b_j - a_j).$$

Formule de Taylor à l'ordre 2 « avec reste intégral »

Hypothèses. f de classe $\mathscr{C}^2$ (c'est-à-dire, les dérivées partielles du premier et second ordre de f sont continues). $[a, b] \subset U$.

Conclusion.

$$f(b) = f(a) + \sum_{j=1}^{N} [\partial_j f(a)](b_j - a_j) + \int_0^1 (1-t) \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} [\partial_i \partial_j f(a + t(b-a))](b_i - a_i) b_j - a_j)\, dt.$$