Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^{e} année
Approfondissement en analyse | Année 2018-2019

Contrôle continu #1

– le 4 mars 2019, durée une heure –

Question de cours. (5 p.) Soit $(E, \| \ \|)$ un espace normé de dimension finie. Soit $K \subset E$. Montrer l'équivalence [K est compact] $\iff$ [K est fermé et borné].

Exercice # 1. (4 p.) Soit $E = \mathbb{R}[X]$, avec les opérations usuelles sur les polynômes. Pour $P = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n \in \mathbb{R}[X]$, soient

$$\|P\| := \sum_{j=0}^{n} |a_j|, \ |||P||| := \sum_{j=0}^{n} (j+1)|a_j|.$$

Nous admettons par la suite que $\| \ \|$ et $||| \ |||$ sont des normes sur E. [On ne demande pas de montrer ce fait.]

Montrer que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

Exercice # 2. (5 p.)

1. Soit $f : [-1,2] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe de f est un compact de $\mathbb{R}^2$ (muni d'une norme).
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe de f est un fermé de $\mathbb{R}^2$ (muni d'une norme).

Exercice # 3. (6 p.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit

$$\| \ \| : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}, \ \|P\| = |P(0/n)| + |P(1/n)| + \cdots + |P(n/n)|, \ \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

   Montrer que $\| \ \|$ est une norme sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ (qui peut dépendre de n) telle que

$$\left| \int_0^1 P(x)\,dx \right| \leq C(|P(0/n)| + |P(1/n)| + \cdots + |P(n/n)|), \ \forall P \in \mathbb{R}_n[X].$$

3. **[Question plus difficile]** Montrer qu'il n'existe pas d'entier $n \in \mathbb{N}^*$ et de constante $C \in [0, \infty[$ tels que

$$\left| \int_0^1 f(x)\,dx \right| \leq C(|f(0/n)| + |f(1/n)| + \cdots + |f(n/n)|), \ \forall f \in \mathscr{C}^0([0,1], \mathbb{R}).$$