Université Claude Bernard Lyon 1
Approfondissement en analyse

Licence de mathématiques 3e année
Année 2018-2019

Contrôle continu #2
– le 1er avril 2019, durée une heure –

Question de cours. (4 p.) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage ouvert du rectangle R de sommets (a,b), $(a+h,b)$, $(a+h,b+k)$, $(a,b+k)$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\partial_2 f$ et $\partial_1\partial_2 f$.

Montrer qu'il existe $(a+\xi, b+\eta) \in R$ tel que

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) = hk\,\partial_1\partial_2 f(a+\xi,b+\eta).$$

Exercice # 1. (5 p.) Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{C}^1(U,\mathbb{R})$. Soient $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a+t(b-a))$, $\forall\, t \in [0,1]$.

À partir de la formule

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)\,dt,$$

obtenir la formule de Taylor à l'ordre 1 « avec reste intégral » pour f (entre les points a et b).

Exercice # 2. (7 p.) On définit $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}}.$$

1. Justifier que l'on peut prolonger f en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Étudier l'existence de dérivées partielles en $(0,0)$ pour ce prolongement.

Exercice # 3. (4 p.) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Soit $f(x,y) = e^{x-2y}$. Nous admettons le fait que f est différentiable.

1. Calculer $df(0,0)(h,k)$, $h, k \in \mathbb{R}$.
2. Écrire la formule de Taylor à l'ordre 1 « avec reste en petit o » de f en $(0,0)$.