Université Claude Bernard Lyon 1
Approfondissement en analyse

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2018-2019

Contrôle terminal

– le 28 mai 2019, durée 90 minutes –

Question de cours. (4 p.)

1. Définir le conjugué de p, où $1 \leq p \leq \infty$.
2. Énoncer et montrer l'inégalité de Young.

Exercice # 1. (2 p.) Soit $F \subset E$, avec $(E, \| \, \|)$ normé. Nier

1. « F est fermé ».
2. « F est borné ».

Exercice # 2. (2 p.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Montrer que f n'est pas lipschitzienne.

Exercice # 3. (4 p.) Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert convexe et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si
$$f(y) - f(x) \geq [\nabla f(x)] \cdot (y - x), \; \forall \, x, y \in U.$$
2. Soit $x \in U$. Montrer que x est un point de minimum de f si et seulement si $\nabla f(x) = 0$.

Exercice # 4. (8 p.) Soit $g \in \mathscr{C}^2([0,1], \mathbb{R})$. Pour $k = 1, 2$, soit

$$I_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^1 (1-t)^{k-1} \, g^{(k)}(t) \, dt.$$

1. Calculer I_1.
2. Calculer I_2. On pourra commencer par exprimer I_2 en fonction de I_1.
3. En déduire la formule de Taylor avec reste intégral,
$$g(1) = g(0) + g'(0) + R, \tag{1}$$
avec R une intégrale dont on donnera l'expression.
4. Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soit $f \in \mathscr{C}^2(U, \mathbb{R})$. Soient $a, b \in U$ tels que $[a, b] \subset U$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a + t(b-a))$, $\forall \, t \in [0,1]$. En utilisant (1), obtenir la formule de Taylor (pour f) à l'ordre deux avec reste intégral.
5. Détailler cette formule si $N = 2$, $U = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = xy$, $a = (0,0)$, $b = (1,2)$.