Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3^e année
Mesure et intégration — Année 2018-2019

Contrôle terminal
– 2e session, le 25 juin 2019 –
– durée 120 minutes –

Consignes pour les questions « vrai ou faux ». Répondre par « vrai » ou « faux ». Il n'est pas demandé de justifier la réponse. Réponse correcte = 1 p. Réponse erronnée = -0,5 p. Non réponse = 0 p.

Vrai ou faux $\#1$ (1 p. – -0,5 p. – 0 p.). Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Une fonction mesurable et positive sur X est intégrable.
Vrai ou faux $\#2$ (1 p. – -0,5 p. – 0 p.). Nous munissons $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est borélienne, alors f est limite simple de fonctions boréliennes étagées.
Vrai ou faux $\#3$ (1 p. – -0,5 p. – 0 p.). Soit (X, d) un espace métrique. Alors les boréliens de X sont ouverts ou fermés.
Vrai ou faux $\#4$ (1 p. – -0,5 p. – 0 p.). Nous munissons $[0,1]$ de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Soit $f : [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne. Si $f \in \mathscr{L}^2([0,1])$, alors $f \in \mathscr{L}^1([0,1])$.

Consignes pour les exercices. a) Justifier, si nécessaire, la mesurabilité des fonctions considérées.
b) Préciser la nature (de Lebesgue, généralisée...) des intégrales qui interviennent dans les énoncés et les calculs.
c) Justifier l'utilisation des résultats théoriques (continuité des intégrales à paramètre, théorème de Fubini, etc.) et préciser à quel type d'intégrale s'applique le résultat utilisé.

Une formule utile. $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice $\#1$ (3 p.) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction continue et 2π-périodique donnée par $f(x) = |x|$ si $|x| < \pi$.
a) Calculer les coefficients de Fourier de f.
b) Écrire, à l'aide de ces coefficients, la conclusion du théorème de Dirichlet appliqué à f.
c) Écrire, à l'aide de ces coefficients, la conclusion de l'identité de Parseval appliquée à f.

Exercice $\#2$ (3 p.) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Montrer que, pour tout $x \in [0, \sqrt{n}\,]$, nous avons $e^{x^2} \times \left(1 - \dfrac{x^2}{n}\right)^n \leq 1.$
b) Déterminer, en justifiant la conclusion, la valeur de la limite

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

Exercice $\#3$ (3 p.) Nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue. Soient f, g deux fonctions boréliennes telles que $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$. À l'aide du théorème de Fubini, dont on justifiera l'utilisation, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx.$$

Exercice $\#4$ (4 p.) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace probabilisé. † Soit $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable.
a) Déterminer, en justifiant la conclusion, la valeur de la limite $I = I(f) = \lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_X \arctan(f^n)\, d\mu$. (Indication : on pourra, par exemple, considérer les ensembles $\{x \in X\,;\ f(x) \leq 1\}$ et $\{x \in X\,;\ f(x) > 1\}$.)

†. Donc μ est une mesure sur $\mathscr{T}$ et $\mu(X) = 1$.

b) Nous considérons le cas particulier où $X = [0,1]$, muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue. Pour tout nombre $c \in [0, \pi/2]$, construire une fonction $f : [0,1] \to [0, \infty[$ borélienne telle que $I(f) = c$.

Exercice $\#5$ **(8 p.)** Pour $a > 0$ et $x \geqslant 0$, posons $H_a(x) := \displaystyle\int_0^\infty e^{-(at^2 + x/t^2)}\, dt$.

a) Donner un sens à l'intégrale qui définit $H_a(x)$, puis montrer son existence.
b) Montrer que la fonction $H_a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.
c) Calculer $H_a(0)$.
d) Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, \infty[$.
e) Calculer, pour $x > 0$, $H_a'(x)$ en fonction de $H_a(x)$ (on pourra utiliser le changement de variable $t = \dfrac{\alpha}{s}$, avec α convenablement choisi).
f) En déduire que

$$H_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ax}}, \ \forall\, a > 0, \ \forall\, x \geqslant 0.$$

Exercice $\#6$ **(7 p.)** Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu et de la mesure de Lebesgue.
On pose, pour $t > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\Phi^t(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4\pi t}}\, e^{-(x^2)/(4t)}$.

a) Montrer que $\Phi^t \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, $\forall\, t > 0$.
b) Calculer $\widehat{\Phi^t}$, avec $t > 0$.
c) Montrer, à partir de la formule précédente, que $\widehat{\Phi^s}\,\widehat{\Phi^t} = \widehat{\Phi^{s+t}}$, $\forall\, s, t > 0$.
d) Montrer que $\Phi^s * \Phi^t$ est continue, $\forall\, s, t > 0$.
e) En utilisant les deux questions précédentes et la formule d'inversion de Fourier, montrer que $\Phi^s * \Phi^t = \Phi^{s+t}$, $\forall\, s, t > 0$.