Université Claude Bernard Lyon 1
Approfondissement en analyse

Licence de mathématiques 3^e année
Année 2018-2019

Contrôle terminal

– 2e session, le 24 juin 2019, durée 60 minutes –

Question de cours. (3 p.) Soit $U \subset \mathbb{R}^2$ un voisinage ouvert du rectangle ouvert R de sommets (a,b), $(a+h,b)$, $(a+h,b+k)$, $(a,b+k)$. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\partial_2 f$ et $\partial_1\partial_2 f$.

Montrer qu'il existe $(a+\xi, b+\eta) \in R$ tel que

$$f(a+h,b+k) - f(a+h,b) - f(a,b+k) + f(a,b) = hk\,\partial_1\partial_2 f(a+\xi,b+\eta).$$

Exercice # 1. (2 p.) Soit $K \subset \mathbb{R}^n$. En utilisant la caractérisation des compacts de $(\mathbb{R}^n, \| \, \|)$ à l'aide des suites et des sous-suites, nier « K est compact ».

Exercice # 2. (4 p.) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que le graphe de f est un compact de $\mathbb{R}^2$ (muni d'une norme).

Exercice # 3. (4 p.) Soit $(E, \| \, \|)$ un espace normé. Montrer qu'une boule ouverte de E est comme son nom l'indique : ouverte.

Exercice # 4. (3 p.) Soient $(E, \| \, \|)$ un espace normé, $U \subset E$ un ouvert et $a \in U$. Montrer que

$$[f \text{ est continue en } a] \iff [f(a+h) = f(a) + o(1) \text{ quand } h \to 0].$$

Exercice # 5. (4 p.) Soit $N \geq 2$ un entier. Soit $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert. Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Soient $a, b \in U$ tels que $[a,b] \subset U$.

1. Faire un dessin comprenant a, b et U comme ci-dessus.

Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$.

2. Rappelons que, si $g \in \mathscr{C}^1([0,1])$, alors

$$g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)\,dt. \tag{1}$$

Supposons $f \in \mathscr{C}^1(U)$. En considérant la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g(t) := f(a+t(b-a))$, $\forall\, t \in [0,1]$, obtenir la formule de Taylor à l'ordre un avec reste intégral pour f.

3. Rappelons que, si $g \in \mathscr{C}^2([0,1])$, alors

$$g(1) = g(0) + g'(0) + \int_0^1 (1-t)\,g''(t)\,dt. \tag{2}$$

Supposons $f \in \mathscr{C}^2(U)$. En considérant la même fonction g que dans la question précédente, obtenir la formule de Taylor à l'ordre deux avec reste intégral pour f.