Analyse complexe
L3 Mathématiques générales et applications 2015–2016
Plan des cours

1 Cours du 3 février 2016

1.1 Généralités sur les fonctions holomorphes

Notations

1. Le plan complexe est désigné par $\mathbb{C}$, rarement par $\mathbb{R}^2$.
2. Notations pour les ouverts de $\mathbb{C}$: U, V, Ω, ω.
3. Notations pour les points de $\mathbb{C}$: z, w, ζ. On écrit $z = x + \imath y \simeq (x, y)$, $z_0 = x_0 + \imath y_0$.
4. Notations pour les dérivées partielles : f_x ou $\dfrac{\partial f}{\partial x}$.
5. Si $f : U \to \mathbb{C}$, alors on écrit $f = u + \imath v$, plus rarement $f = P + \imath Q$.
6. $*$: résultat qui dépasse le niveau du cours.

Dérivée complexe, holomorphie

Définitions $f'(z_0)$, f', holomorphie.

1.1 Théorème ((Goursat). Dû à Cauchy, 1814, sous l'hypothèse supplémentaire $f \in C^1$)**.** f holomorphe $\implies$ f indéfiniment dérivable au sens réel et au sens complexe (et plus : f analytique, mais nous verrons ceci plus tard).

1.2 Corollaire. f holomorphe $\iff$ $f \in C^1$ et f vérifie les équations de Cauchy-Riemann.

1.3 Corollaire (de la preuve du corollaire précédent)**.** f dérivable en z_0 $\implies$ f vérifie Cauchy-Riemann en z_0.

1.4 Théorème (Looman-Menchoff*)**.** f holomorphe $\iff$ f continue et vérifie Cauchy-Riemann.

Exercices

Étudier l'holomorphie de z, $\overline{z}$, $1/z$, e^z.

Propriétés de base

1. Somme, produit, etc. de fonctions holomorphes.
2. f dérivable en $z_0 \implies f$ différentiable en z_0.
3. f dérivable en $z_0 \implies$ la matrice Jacobienne de f en z_0 est

$$J_{z_0}f = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ -u_y(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix}.$$

4. ∂_z, $\partial_{\overline{z}}$, Δ (définitions).
5. f dérivable $\implies \partial_{\overline{z}} = 0$ et $\partial_z = f'$.
6. f holomorphe $\implies u, v$ harmoniques.

Types d'ouverts

1. Domaines, ouverts convexes, étoilés, simplement connexes* (pour les besoins du cours, les simplement connexes sont définis uniquement sur un dessin).
2. Lemme de Poincaré : dans un ouvert étoilé (simplement connexe*), un champ (P,Q) est un gradient $\iff \dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$.
3. Dans un domaine étoilé (simplement connexe*), toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

À travailler pour le cours du 10 février : compléter les énoncés du cours (en rajoutant l'hypothèse $f : U \to \mathbb{C}$, avec $U \subset \mathbb{C}$ ouvert) et prouver le résultat suivant.

Exemples d'utilisation des équations de Cauchy-Riemann

1.5 Proposition. Dans un domaine, une fonction holomorphe f est constante si :
1. $u = 0$ ou
2. $v = 0$ ou
3. $|f|$ holomorphe.