# Analyse complexe
# L3 Mathématiques générales et applications 2015–2016
# Plan des cours

## 2 Cours du 10 février 2016

### 2.1 Généralités sur les fonctions holomorphes

**Exemples d'utilisation des équations de Cauchy-Riemann**

**2.1 Proposition.** Dans un domaine, une fonction holomorphe $f$ est constante si :

1. $u = 0$ ou
2. $v = 0$ ou
3. $|f|$ holomorphe.

**2.2 Exercice.** Si $f \in C^1$, alors $f$ holomorphe $\iff$ $f$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann. (À comparer à $f$ holomorphe $\iff$ [$f \in C^1$ et $f$ vérifie les équations de Cauchy-Riemann], qui utilise le théorème de Goursat.)

**Transformations conformes**

Définition difféomorphismes (locaux) conformes.

**2.3 Proposition.** $f$ conforme $\iff$ $f$ holomorphe.

**2.4 Théorème** (Liouville (1850)*)**.** En dimension $\geq 3$ de l'espace, $f$ conforme $\iff$ $f$ est une composée d'homothéties, isométries, inversions.

### 2.2 Formes et chemins

**Chemins**

1. Chemins, lacets, courbes (connexes). Courbes fermées et non fermées.
2. Régularité : $C^1$, $C^1$ par morceaux, à variation bornée*.
3. Une courbe (connexe) paramétrée a exactement deux sens du parcours.

**Formes**

1. Formes (1-formes).
2. Exemple fondamental : différentielle d'une fonction.
3. Intégrale (curviligne) $\displaystyle\int_\gamma \omega$ d'une forme continue $\omega$ sur un chemin $\gamma$ de classe $C^1$ par morceaux. [1]

1. Lecture supplémentaire pour l'intégration sur des chemins à variation bornée : Conway, pp. 58–68.

4. Indépendance de l'intégrale curviligne par rapport à une reparamétrisation qui conserve le sens.
5. Formes exactes, formes fermées.
6. Reformulation du lemme de Poincaré dans le langages des formes.
7. Lien entre formes et analyse complexe : si $g \in C^1(U, \mathbb{C})$, alors $g$ holomorphe $\iff$ $g(z)dx + \imath g(z)dy = g(z)dz$ fermée.