Analyse complexe
L3 Mathématiques générales et applications 2015–2016
Plan des cours

3 Cours du 17 février 2016

2.1 Formes et chemins

Chemins

1. Distinction entre chemin et paramétrisation d'une courbe.
2. Une courbe (connexe) non fermée et C^1 a exactement deux sens du parcours. Variantes de ce résultat pour des courbes fermées et/ou C^1 par morceaux.

Formes

1. Majoration de l'intégrale curviligne :
$$\left|\int_\gamma \omega\right| \le \sup_{z\in\gamma([a,b])} |(P,Q)(z)|\, \ell(\gamma).$$
2. Un calcul fondamental : $\displaystyle\int_\gamma du = u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))$.
3. Preuve du lemme de Poincaré si U étoilé. [1]
4. Si $\gamma \subset U$ lacet, ω fermée et U étoilé (simplement connexe*), alors $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$.
5. D'autres cas où $\displaystyle\int_\gamma \omega = 0$: cas de deux cercles, et cas d'une courbe convexe.
6. Définition de $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz$ (avec f continue).

2.2 Formule(s) de Cauchy

Dans cette partie, $f : U \to \mathbb{C}$ est une fonction holomorphe et C^1. Le fait que le caractère C^1 est une conséquence de l'holomorphie sera établi plus tard.

1. $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ si $\gamma \subset U$ lacet C^1 par morceaux (rectifiable*) et U étoilé (ou simplement connexe*).

1. Lecture supplémentaire pour le lemme Poincaré dans des domaines simplement connexes : Conway, pp. 80–88.

2. Autres situations dans lesquelles l'égalité $\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ est vérifiée.[2]
3. La formule de représentation de Cauchy

$$f(z) = \frac{1}{2\imath\pi} \int_{\mathscr{C}(a,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \ \forall z \in \mathbb{D}(a,r).$$

   .

4. Les fonctions holomorphes sont C^{∞}.
5. Les fonctions holomorphes sont indéfiniment dérivables.
6. Représentation des dérivées d'ordre supérieur.

2. Lecture supplémentaire pour la validité de l'égalité $\int_{\gamma} f(z)\,dz = 0$: Ahlfors, pp. 137–146.