Mesure, Intégration, Éléments d'Analyse Fonctionnelle

Université Claude Bernard Lyon 1

Licence de mathématiques troisième année

Parcours Mathématiques générales et applications

Petru Mironescu

2024–2025

Guide de lecture

A. Ce document sert de support aux cours « Mesure et intégration » et « Éléments d'analyse fonctionnelle », destinés aux étudiants en troisième année de la licence de mathématiques de l'Université Claude Bernard Lyon 1, parcours Mathématiques générales et applications. Malgré le caractère introductif de ces cours, les outils présentés permettent de s'attaquer à de nombreux problèmes concrets.

Le texte donne un aperçu de la partie élémentaire de la théorie abstraite et concrète de la mesure et de l'intégrale, avec quelques premières applications aux espaces de fonctions, aux séries de Fourier et à la transformée de Fourier. Historiquement, les objets et résultats présentés reflètent les efforts des mathématiciens du début du vingtième siècle pour étendre et conceptualiser la théorie de l'intégration « de Riemann », afin de corriger quelques-unes de ses faiblesses et d'étendre le théorème de Leibniz-Newton au-delà du cadre des fonctions continues.

B. Le texte a été conçu comme un compagnon des cours magistraux. Il n'a pas été rédigé dans l'optique d'un usage en complète autonomie. Afin de garder une longueur raisonnable du manuscrit, certains éléments de preuve, généralement parmi les plus faciles, ont été omis. Ces omissions sont repérables grâce aux injonctions « vérifier ! » ou « justifier ! », auxquelles le lecteur qui veut dépasser une utilisation superficielle du manuscrit est encouragé à obéir.

Afin d'alléger le texte, dans certaines sections nous faisons des hypothèses qui sont implicitement supposées satisfaites dans tous les énoncés. Situation typique : dans le chapitre 3, nous nous donnons une tribu $\mathscr{T}$ sur X, mais dans les énoncés de ce chapitre la tribu n'y figure pas toujours. Le lecteur est vivement encouragé à lire les hypothèses des résultats dans cette perspective, et si nécessaire à compléter les énoncés en rajoutant les hypothèses implicites.

C. La partie élémentaire du volet « théorique » de la théorie de la mesure repose sur deux piliers.

1. La théorie axiomatique de la mesure : ce que veut dire mesure, comment définir l'intégrale et quelles sont ses principales propriétés. Cette partie inclut les grands théorèmes les plus utilisés en calcul intégral (théorèmes de convergence monotone et de convergence dominée, lemme de Fatou,

théorèmes de Fubini et Tonelli), faciles à comprendre et montrer, mais dont l'utilisation pose souvent problème à l'analyste débutant.

2. La construction concrète de mesures. La théorie de la mesure et de l'intégration ne vaut pas grand-chose sans ses applications, qui exigent d'avoir sous la main des mesures et des fonctions à intégrer par rapport à ces mesures. La difficulté principale de la théorie consiste précisément à construire de bonnes mesures et à établir leurs propriétés. La mesure la plus utilisée, celle de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, n'est pas facile à construire. Elle a des propriétés spécifiques, qui vont au-delà des propriétés générales des mesures, qui la rendent très utile et qui sont de nature géométrique. Le théorème du changement de variables est une conséquence fondamentale de ces propriétés.

D. Conformément au programme en vigueur, sont admis les résultats fondamentaux suivants : existence de la mesure de Lebesgue, existence de la mesure produit et les théorèmes de Fubini et Tonelli, théorème du changement de variables. Néanmoins, les preuves de ces résultats apparaissent dans le texte. Les parcourir sera utile au lecteur qui veut poursuivre dans la voie de l'analyse : elles reposent sur un bon nombre de raisonnements fondamentaux et récurrents en analyse, raisonnements qu'il convient de maîtriser.

1. Il y a deux façons classiques de construire la mesure de Lebesgue.
   a) « À la main », en montrant pour commencer qu'elle est nécessairement donnée par une formule assez explicite. La difficulté consiste alors à montrer que cette formule définit effectivement une mesure. La méthode pour y arriver, due à Lebesgue, est celle que nous suivons.
   b) Obtenir son existence à travers l'existence de l'intégrale de Riemann combinée avec le théorème de représentation de Riesz, théorème qui dépasse largement le cadre d'un premier cours (voir Rudin [19, Chapitre 2]) – voie plus élégante, mais difficile à comprendre en première lecture.
2. La construction de la mesure produit et les théorèmes de Tonelli et Fubini sont de belles illustrations de la puissance de la construction axiomatique de la théorie de la mesure, en particulier de l'utilisation des classes monotones. Les démonstrations s'écrivent toutes seules !
3. Pour le changement de variables, la preuve présentée est naturelle, mais quelque peu laborieuse. On peut procéder de manière plus élégante, en utilisant un théorème moins élémentaire, celui de Radon-Nikodym (voir Rudin [19, Chapitre 7]), mais cette approche convient plus en deuxième lecture, lorsqu'on s'intéresse aux aspects plus avancés de la théorie de la mesure. Il y a également une voie rapide et relativement élémentaire pour y arriver, en passant par une réduction au cas de la dimension un (voir Gramain [10, Section X.3]). Elle relève néanmoins trop d'une astuce pour être vraiment instructive et utile dans d'autres circonstances.

E. Dans la perspective des évaluations liées à ce cours et de l'utilisation de la théorie de la mesure dans des cours ultérieurs et « dans la vraie vie », les objectifs minimaux sont les suivants.

1. Montrer qu'un ensemble est a. p. d.
2. Montrer qu'une fonction ou un ensemble sont mesurables.
3. Faire le lien entre intégrale habituelle (de Riemann) et intégrale de Lebesgue.
4. Utiliser les propriétés de la mesure de Lebesgue et de la mesure de comptage.
5. Utiliser correctement, notamment pour la mesure de Lebesgue, les théorèmes fondamentaux (convergence monotone, convergence dominée, lemme de Fatou, intégrales à paramètres, Fubini, Tonelli, changement de variables). Ce sont notamment l'existence d'une majorante intégrable et le théorème de Fubini qui posent le plus de problèmes dans la pratique.
6. Manipuler les espaces $\mathscr{L}^p$ (inégalités de Hölder, Minkowski et Young).
7. Manipuler les théorèmes fondamentaux concernant les séries de Fourier (Dirichlet, Fejér, Parseval) et la transformée de Fourier (formule d'inversion, théorème de Plancherel).
8. Manipuler les séries orthogonales dans un espace de Hilbert, et en particulier le développement d'un vecteur dans une base hilbertienne.

Y arriver, c'est déjà bien !

Dans cette optique, les notes de cours offrent les bases théoriques nécessaires à la résolution des questions proposées en TD ; la maîtrise des objectifs cidessus passe par la résolution des problèmes. Les quelques exercices présents dans le texte ont pour but uniquement d'illustrer les propos théoriques, voire de déléguer au lecteur la vérification de quelques propriétés faciles.

F. La théorie de probabilités utilise de manière intensive la théorie de la mesure et de l'intégrale. Un très beau premier texte sur ce sujet est Barbe et Ledoux [3]. Plusieurs notions et résultats basiques en théorie des probabilités (mesure image, formule de transfert, v. a. i., etc.) seront traités en TD.

G. En tant qu'étudiant, quels objectifs se donner pour ces UE ? J'utiliserais une métaphore bureautique. Pour un traitement de texte ou un tableur, il y a les utilisateurs, les utilisateurs experts et les développeurs ou concepteurs. Les premiers maîtrisent les bases et savent éventuellement utiliser les tutoriels. Les deuxièmes conçoivent les tutoriels. Et les troisièmes développent le logiciel.

Pour valider les UE, maîtriser les compétences minimales énoncées en début de chaque chapitre devrait suffire. Pour continuer en master de mathématiques, le bon objectif est de viser le niveau utilisateur expert : en plus des compétences minimales, comprendre les énoncés, la structure des preuves les plus courantes, savoir adapter ces preuves. Pour attendre le troisième niveau, il faudrait s'attaquer aux exercices avancés, lire les sections « pour aller plus loin » et, pourquoi pas, lire en parallèle (le début de) l'un des textes cités dans cette introduction, ou d'autres textes plus récents et accessibles comme Taylor [21] ou (le début de) Lieb et Loss [16].

Pour aller plus loin

H. Un théorème d'analyse s'utilise rarement dans la forme qui apparaît dans les textes (monographies ou cours). On a souvent besoin d'une variante qui se montre en suivant les grandes lignes de la preuve du théorème standard. Un exemple typique est celui de la continuité d'une intégrale par rapport aux paramètres. C'est pourquoi il est important, pour ceux qui vont continuer à utiliser l'analyse, d'avoir au moins une idée des preuves des principaux résultats de ce cours.

I. La théorie de Lebesgue est née du besoin d'étudier la validité de l'égalité $f(b) - f(a) = \int_a^b f'(x)\,dx$ lorsque f n'est plus de classe C^1. La réponse est connue, mais dépasse le cadre de ce cours. Quelques résultats en ce sens sont mentionnés sans preuve. D'autres résultats avancés, significatifs pour la théorie de la mesure et de l'intégration, sont mentionnés ici et là, dans les sections « Pour aller plus loin ».

J. Pour aller au-delà de ce cours, plusieurs directions accessibles sont envisageables.

1. La théorie « abstraite » : construction axiomatique des mesures par Carathéodory, théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue, mesures signées et vectorielles (théorèmes de Hahn et Jordan, intégrale de Bochner), etc. Quelques références à ce sujet : Halmos [11, Chapitre 6], Rudin [19, Chapitre 7] et, pour une preuve très élégante du théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue, Taylor [21, Chapter 4]. Et un très beau livre qui donne un panorama de la théorie de la mesure : Bogachev [4]. Cette référence contient aussi un nombre important de repères historiques, liés aux travaux des grands noms de la théorie (Lebesgue, Borel, Carathéodory, etc.). Une référence s'il n'en fallait qu'une : le mémoire de 1904 de Lebesgue [15], qui contient sa théorie de l'intégration, développée entre 1901 et 1904. Lebesgue avait 26 ans en 1901 !

2. Les espaces L^p traités du point de vue de l'analyse fonctionnelle ; voir Brezis [5, Chapitre 4].

3. Les mesures « concrètes » et leurs applications. Nous traitons ici la mesure de Lebesgue (dans $\mathbb{R}^3$: le volume), mais d'autres mesures ont une signification géométrique dans $\mathbb{R}^3$: la longueur des courbes, l'aire des surfaces. Une

façon unifiée de traiter ces notions est donnée par les mesures de Hausdorff, que nous nous contentons ici de définir. Nous expliquons aussi la démarche, due à Carathéodory et inspirée par la construction de la mesure de Lebesgue, qui permet de montrer leurs propriétés. L'étude approfondie de ces mesures mène vers des formules géométriques, l'étude des propriétés fines des fonctions et une branche de l'analyse, en plein développement, la « théorie géométrique de la mesure ». À son tour, la théorie géométrique de la mesure est indispensable au traitement mathématique de certains problèmes concrets (traitement d'images, micro-structures, etc.). Quelques références, de la plus élémentaire à la plus avancée : Evans et Gariepy [7, Chapitres 2 et 3], Federer [8, Section 2.10], à nouveau Evans et Gariepy [7, Chapitres 4, 5 et 6], Ziemer [23, Chapitre 3].

Guide pratique

1. Pour faciliter la lecture, les définitions et résultats essentiels sont encadrés. Au début de chaque chapitre sont fixés des objectifs minimaux de compréhension et savoir-faire.
2. Une autre aide à la lecture est le découpage des parties « au programme » en texte principal (explications, définitions, énoncés), exercices, démonstrations.
3. Les démonstrations prendront une place *très importante* dans ce cours. Après deux premières années universitaires passées principalement à apprendre les énoncés des théorèmes et à apprendre à s'en servir, nouvel objectif cette année : comprendre les théorèmes, et avoir un aperçu de quelques théories (comme celle de la mesure) accessibles à ce niveau.

   Les principes de preuves jouent un rôle fondamental en analyse. C'est pourquoi j'ai privilégié des *preuves moldues*, qui évitent la magie, tout en reposant sur des arguments qui servent souvent.

   Les preuves sont souvent plus longues que dans d'autres textes. La raison principale est qu'elles contiennent en général tous les détails.
4. Les parties « hors programme » (comme les sections « Pour aller plus loin », ou le chapitre 5) sont rédigées comme des textes à lire en autonomie, et l'ordre est celui habituel d'un texte mathématique.
5. Le manuscrit doit encore contenir des erreurs. Si vous en trouvez, merci de m'en faire part à l'adresse `mironescu@math.univ-lyon1.fr`

Remerciements

Christophe Sabot a utilisé, pendant plusieurs années, ce texte comme support pédagogique. Je le remercie pour ses retours constructifs qui ont permis d'améliorer la présentation.

Les feuilles d'exercices, bien plus riches que ce qui pourra être traité en classe, servent aux séances de travaux dirigés (standard et avancés), de base d'entraînement et de réservoir pour les contrôles.

Dans la rédaction des exercices et des sujets des contrôles, j'ai bénéficié de l'aide de Xinxin Chen et Theresia Eisenkoelbl, que je remercie. La feuille d'exercices sur les espaces de Hilbert a été rédigée par Dragoş Iftimie et Johannes Kellendonk.

Je remercie également Jules Berry, Jérôme Germoni, Frédéric Lagoutière, Christian Mercat et Élisabeth Mironescu pour leurs conseils typographiques liés à la transformation de ce texte en outil d'enseignement hybride.

Enfin, je remercie Jean-Paul Frappa pour une relecture attentive du manuscrit, ainsi que Johannes Kellendonk, Todor Tsankov et tous les autres collègues et étudiants (notamment ceux de la promotion 2022–2023 de la première année du master) qui m'ont fait part de leurs remarques et suggestions et contribué ainsi à améliorer les versions précédentes de ce texte.

À Lyon, le 30 janvier 2023

Vue d'ensemble

Ce texte est une *introduction détaillée aux aspects* les plus *basiques de la théorie de Lebesgue de la mesure et de l'intégration*.

On peut comprendre les briques de cette théorie à partir du calcul de l'intégrale *de Riemann* $I := \int_a^b f(x)\,dx$. Rappelons que, du moins si f est continue par morceaux sur $[a,b]$ et positive, I s'interprète comme l'*aire* du domaine D compris entre le graphe de f et l'axe Ox. De manière théorique, pour calculer I nous commençons par le cas où f est une *fonction en escalier*, c'est-à-dire une fonction de la forme

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & \text{si } x \in I_1 \\ a_2, & \text{si } x \in I_2 \\ \dots & \\ a_n, & \text{si } x \in I_n, \end{cases} \tag{1}$$

avec les I_j intervalles disjoints dont l'union est $[a,b]$.

Dans ce cas, D est une union de rectangles disjoints, de base I_j et de hauteur a_j, et nous posons, « naturellement »,

$$\int_a^b f(x)\,dx := \sum_{j=1}^{n} a_j m(I_j), \tag{2}$$

avec $m(I_j)$ la *longueur*, ou encore la *mesure* de I_j.

Dans le cas général, nous « approchons » f par des fonctions en escalier, et son intégrale par les intégrales de ces fonctions en escalier (ceci sera brièvement rappelé dans la section 6.6).

La généralisation de cette approche nécessite :

a) De *pouvoir mesurer* des ensembles. (Dans le cas d'une fonction en escalier, il s'agit de mesurer les intervalles I_j.)
b) De définir l'intégrale des fonctions « simples » (du type fonctions en escalier). Dans la théorie de l'intégration, leur nom est *fonctions étagées*.

c) De définir un procédé d'approximation des fonctions « générales » par des fonctions étagées. Les fonctions approchables sont les *fonctions mesurables*.

d) De définir l'*intégrale* des fonctions mesurables.

Si tout ce programme est achevé, ce n'est que le début... Il reste encore à établir

e) Les propriétés de l'intégrale ainsi définie. Ainsi, on s'attend à ce que l'intégrale soit linéaire, qu'elle vérifie l'inégalité triangulaire, et autres propriétés fondamentales de l'intégrale de Riemann.

f) Des méthodes concrètes de calcul des intégrales : intégration par parties, changement de variable, calcul d'intégrales multiples à partir d'intégrales itérées (théorème de Fubini), etc.

g) Et (surtout !) d'illustrer, par des applications, l'utilité de la théorie.

Ce programme (minimal, dans la mesure où la théorie de la mesure et de l'intégration est bien plus riche que ce que nous verrons) sera mis en place dans ce qui suit. Et encore : l'intégration par parties (*formule de Stokes*) ne sera pas vue.

En bref

1. Le chapitre 1 n'est pas directement lié à la théorie de la mesure. Il traite quelque notions auxiliaires comme $\sup$, $\inf$, les limites des suites et le dénombrement des ensembles.

2. Dans le chapitre 2, nous rencontrons un objet fondamental, la *tribu*, et étudions quelques-unes de ces propriétés. A posteriori, la tribu est la collection $\mathscr{T}$ des tous les ensembles que nous saurons mesurer. En accord avec cette philosophie, un élément de $\mathscr{T}$ (c'est-à-dire, un ensemble $A \in \mathscr{T}$) est un *ensemble mesurable*.

   Pour que la théorie soit vraiment utile, $\mathscr{T}$ doit avoir des propriétés algébriques encodées dans sa définition (par exemple, si nous savons mesurer A et B, nous savons également mesurer $A \cap B$). La propriété *fondamentale* qui fait la force de la théorie de la mesure est que si nous savons mesurer $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (suite infinie), alors nous savons mesurer $A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup \ldots$.

3. Le chapitre 3 est dédié aux fonctions qui, a posteriori, seront intégrées. Le début se devine facilement : une *fonction étagée* est une fonction de la forme, analogue à (1),

$$f(x) = \begin{cases} a_1, & \text{si } x \in A_1 \\ a_2, & \text{si } x \in A_2 \\ \ldots \\ a_n, & \text{si } x \in A_n, \end{cases} \tag{3}$$

   avec chaque A_j *mesurable* et les A_j deux à deux disjoints.

Pour passer des fonctions étagées aux fonctions mesurables, le choix de l'approximation est *crucial* : une *fonction mesurable* est une *limite simple de fonctions étagées*.

Il reste à établir les principales propriétés des fonctions mesurables. Comme pour les fonctions continues, avec lesquelles elles partagent des caractéristiques communes, la somme ou le produit de fonctions mesurables est mesurable, etc.

4. Le chapitre 4 est dédié aux *mesures*. Une mesure μ est un « procédé » pour associer à chaque ensemble mesurable $A \in \mathscr{T}$ sa mesure, $\mu(A)$, qui est un nombre positif (ou $+\infty$; penser à la longueur d'un intervalle infini). La propriété *fondamentale* de la mesure (qui fait la force de la théorie de la mesure) est que, si $A_0, A_1, A_2, \ldots$ (suite infinie) sont des *ensembles mesurables disjoints*, alors

$$\mu(A_0 \cup A_1 \cup A_2 \cup ...) = \mu(A_0) + \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots .$$

C'est *cette propriété* qui *permet de passer à la limite dans les intégrales* ; or, le passage à la limite est l'essence de l'analyse.

5. Le chapitre 5 à la fois sort du programme décrit plus haut et lui donne de la valeur. La théorie de Lebesgue de l'intégration est née pour améliorer celle de Riemann ; elle doit donc la contenir. Ceci est vrai, et la preuve passe par l'existence d'une mesure qui généralise la longueur des intervalles. Le résultat fondamental du chapitre est l'existence de la *mesure de Lebesgue* (sur $\mathbb{R}$), plus précisément d'une tribu $\mathscr{T}$ contenant tous les intervalles, et d'une mesure μ sur $\mathscr{T}$ telle que $\mu(I) = m(I)$ si I est un intervalle.

6. Le chapitre 6 est consacré à la construction de l'*intégrale « abstraite »*. Comme attendu, si f est une fonction étagée *positive* comme dans (3), nous posons, « naturellement », par analogie avec (2),

$$\int f := \sum_{j=1}^{n} a_j\, \mu(A_j).$$

Le cas où f est *mesurable positive* est traité par approximation, mais la définition de l'intégrale $\int f$ dans ce cas n'est pas très intuitive. Le cas où f est tout simplement *mesurable* (mais pas nécessairement positive) est plus délicat : en général, l'intégrale n'existe pas.

Toujours dans ce chapitre, nous rencontrons le premier théorème permettant de « permuter » $\lim$ et $\int$, le *théorème de convergence monotone* (*théorème de Beppo Levi*), qui affirme que si $(f_n)_n$ est une suite *croissante* de *fonctions mesurables positives*, alors

$$\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n. \tag{4}$$

La suite du chapitre fait le lien entre intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue et intégrale de Riemann, respectivement la sommation des séries et l'intégration. Ceci permet de s'apercevoir que la théorie de l'intégration est un cadre général qui permet de traiter des problèmes d'apparence différente ; d'autres illustrations de ce fait apparaissent dans les chapitres 10–13.

7. L'égalité (4) est cruciale dans les applications, et à elle seule justifierait l'importance de la théorie de l'intégration. Dans le chapitre 7, nous étudions le célèbre *théorème de convergence dominée de Lebesgue* qui permet d'obtenir (4) sans hypothèse de positivité ou convergence monotone, et surtout ses conséquences concernant l'étude des *intégrales à paramètre*. Ces intégrales sont omniprésentes en théorie des probabilités, physique mathématique, étude des équations différentielles, etc.
8. Le chapitre 8 met les bases du calcul des *intégrales multiples*. Vous avez déjà utilisé sans preuve une égalité du type
$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy. \tag{5}$$
La théorie développée dans ce chapitre donne des outils pour vérifier la validité de formules du style (5) (*théorème de Tonelli*, *théorème de Fubini*) et d'interpréter les *intégrales doubles* ou *itérées* de (5) comme une seule intégrale dans la variable (x, y) par rapport à la *mesure produit*. Cette notion, très intuitive, est un avatar des règles habituelles pour le calcul des aires et volumes (l'aire d'un rectangle $I \times J$ est le produit des longueurs $m(I)$ et $m(J)$, etc.).
9. Le chapitre 9 donne une autre méthode de calcul d'intégrales : le *changement de variable(s)*. Dans les applications les plus courantes (coordonnées polaires, cylindriques, sphériques), le changement de variables n'en est pas tout à fait un, et il faudra établir un théorème du *presque* changement de variables adapté à ces cas.
10. Le chapitre 10 est dédié à l'étude de certains *espaces de fonctions*. En topologie et calcul différentiel, les fonctions les plus étudiées sont les fonctions continues, dérivables (ou différentiables), de classe C^1, etc. En théorie de l'intégration, nous avons déjà mentionné les fonctions mesurables. Dans les applications, les espaces les plus populaires sont les *espaces de Lebesgue* $\mathscr{L}^p$, avec $1 \leq p \leq \infty$. Ils donnent un cadre naturel à la formulation mathématique de nombreux problèmes concrets, par exemple issus de la physique. Pour $1 \leq p < \infty$, leur définition est
$$\mathscr{L}^p := \left\{ f \,;\, f \text{ est mesurable et } \int |f|^p < \infty \right\}.$$
Nous donnerons dans le chapitre 10 quelques propriétés fondamentales de ces espaces.

11. Dans le chapitre 11, nous introduisons la *convolution*. En langage moderne, c'est l'opération qui associe à deux fonctions sur $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}^n$), f et g, la nouvelle fonctions
$$(f * g)(x) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy. \tag{6}$$
Des expressions du type (6) apparaissent naturellement dans la résolution des équations ; ceci était déjà connu au 18e siècle (Euler, d'Alembert). Elles sont également utilisées en théorie de l'image et du signal.
Dans le chapitre 11, nous nous contentons de donner quelques applications de (6) à la théorie des espaces $\mathscr{L}^p$.
12. Le chapitre 12 est consacré aux *séries de Fourier*. À nouveau, elles apparaissent naturellement dans la résolution des équations différentielles, et de grands mathématiciens du 18e siècle (d'Alembert, Euler, Lagrange) se sont demandés si « toute fonction » était une superposition de (co)sinusoïdes. En langage moderne, si on pouvait écrire une fonction 2π-périodique f comme
$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) ; \tag{7}$$
c_0, a_n, b_n sont les *coefficients de Fourier de* f.
Fourier y a cru, et a utilisé (7) pour résoudre des problèmes physiques. La justification rigoureuse de (7) a été une locomotive de l'analyse au 19e siècle (et au-delà). Nous donnons, dans le chapitre 12, quelques théorèmes en lien avec la validité de (7) : *théorème de Dirichlet*, *théorème de Fejér*, *théorème de Fatou*, *égalité de Parseval* et *théorème de Riesz-Fischer*.
13. Dans le chapitre 13, nous introduisons l'analogue continu des coefficients de Fourier : la *transformée de Fourier*
$$\widehat{f}(\xi) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath \xi x} f(x)\, dx. \tag{8}$$
Son *importance*, notamment dans la théorie des probabilités et dans la théorie des équations différentielles, est *immense*.
Pour la transformée de Fourier, l'analogue de (7) est la *formule d'inversion de Fourier*
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\imath x \xi} \widehat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{9}$$
Dans le chapitre 13, nous étudions la validité de (9), ainsi que la possibilité de définir $\widehat{f}$ même quand (8) n'a pas de sens (*théorème de Plancherel*).

14. Le chapitre 14 est une pièce rapportée à ce texte, qui rend compte du changement de programme de la licence. Nous y présentons les résultats les plus basiques de la *théorie des espaces de Hilbert*, notamment l'*existence d'une base hilbertienne* dans un espace de Hilbert séparable. Ceci permet notamment de voir la théorie L^2 des séries de Fourier comme un cas particulier de construction d'une base hilbertienne, et d'interpréter l' *inégalité de Bessel* et l'*égalité de Parseval* (obtenues pour les séries de Fourier) dans le cadre plus général d'un espace de Hilbert. L'autre résultat significatif de ce chapitre est l'*existence d'une projection sur un convexe fermé* et son corollaire, le *théorème de Riesz* caractérisant les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert.

    Afin de rendre la lecture plus fluide, ce chapitre apparaît à la fin (même s'il est enseigné avant le chapitre 12).

Et après ?

1. La *théorie des probabilités* utilise naturellement le cadre de la théorie de la mesure et de l'intégration. En plus de la théorie abstraite (chapitres 2 à 6), le produit de convolution et la transformée de Fourier seront particulièrement utiles.
2. L'étude des espaces $\mathscr{L}^p$ sera reprise et amplifiée en *analyse fonctionnelle*.
3. Les séries de Fourier et la transformée de Fourier seront étudiées de manière plus approfondie en *analyse fonctionnelle*.
4. Le produit de convolution et la transformée de Fourier seront des outils essentiels dans l'étude des *équations aux dérivées partielles*.

À Lyon, le 30 janvier 2023

Table des matières

Chapitre 1

Notations, rappels, premières définitions

1.0 Aperçu

La théorie de l'intégration repose de manière cruciale sur les inégalités, en particulier sur des inégalités faisant intervenir $\sup$ et $\inf$.

Un autre élément fondamental est le passage à la limite le long d'une suite. Une suite n'a pas nécessairement une limite ; elle a néanmoins *toujours* une $\limsup$ et une $\liminf$, qui sont de bons substituts de la $\lim$. Ces notions sont rappelées dans la section 1.1.

Un autre concept crucial en intégration est celui de famille *dénombrable* ou, plus généralement, *au plus dénombrable*. Ces notions seront introduites dans la section 1.2.

Enfin, nous verrons dans la section 1.3 les premiers objets fondamentaux en théorie de la mesure : les *clans*, les *tribus* et les *classes monotones* (qui sont des ensembles d'ensembles !) et les *mesures*.

Dans cette même section, nous verrons quelques opérations internes à un clan $\mathscr{C}$, ou tribu $\mathscr{T}$. Une propriété typique : si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \backslash B \in \mathscr{C}$.

Compétences minimales attendues.

a) Calculer le $\sup$ et l'$\inf$ d'un ensemble.

b) Calculer la $\limsup$ et la $\liminf$ d'une suite.

c) Montrer qu'un ensemble est (ou n'est pas) a. p. d. $\diamond$

1.1 Limite supérieure, limite inférieure

La théorie de la mesure exige de travailler avec les « nombres » $-\infty$ et ∞, donc sur la droite réelle étendue $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$.

1.1 Définition (sup, inf)**.** Si $A \subset \mathbb{R}$ est non vide (mais pas nécessairement borné),

$$\sup A := \text{le plus petit majorant } M \in \overline{\mathbb{R}} \text{ de } A,$$
$$\inf A := \text{le plus grand minorant } m \in \overline{\mathbb{R}} \text{ de } A.$$

Ces quantités ont essentiellement les mêmes propriétés que dans le cas des ensembles bornés, comme le montre l'exercice 1.7.

Une autre notion fondamentale est celle de $\limsup$ (*limite supérieure*) d'une suite. Nous savons qu'une suite réelle n'a pas nécessairement une limite. Elle a, en revanche, *toujours* une limite supérieure $\limsup$ et une *limite inférieure* $\liminf$.

Pour définir ces notions, précisons quelques notations.

1.2 Notations.

a) Si tous les termes de la suite $(x_n)_n$ appartiennent à l'ensemble A, nous écrirons $(x_n)_n \subset A$.[†]

b) En règle générale, la notation $\sup\limits_{i \in I} x_i$ désigne $\sup\{x_i;\ i \in I\}$.

De même, $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ désigne $\sup\{f(x)\,;\ x \in A\}$.

Notations similaires pour $\inf$. ◇

1.3 Définition ($\limsup, \liminf$)**.** Si $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$, alors

$$\limsup_n x_n := \lim_{n\to\infty} \sup_{k \geq n} x_k, \tag{1.1}$$
$$\liminf_n x_n := \lim_{n\to\infty} \inf_{k \geq n} x_k. \tag{1.2}$$

1.4 Remarque. Considérons *toutes* les suites $(x_{n_k})_k$ extraites de $(x_n)_n$ *qui ont une limite.*

Notons $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ l'ensemble de toutes les limites obtenues de cette façon.

Le nombre $\limsup_n x_n$ est le plus grand élément de A, et $\liminf_n x_n$ est le plus petit élément de A.

†. Donc $(x_n)_{n \geq 0} \subset A$ se substitue à la notation « officielle » $(x_n)_{n \geq 0} \in A^{\mathbb{N}}$.

La remarque 1.4 est une conséquence des items c) et d) de la proposition 1.6 (qui suit). Elle donne une *caractérisation* de $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$ – caractérisation qui constitue une *définition alternative* de ces limites.

Quelques rappels utiles pour comprendre l'énoncé de la proposition 1.6.

1.5 Rappels.

a) La somme $x + y$ avec $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, est définie à l'exception du cas où $x = \pm\infty$ et $y = -x$.

b) *En analyse*, le produit tx, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \overline{\mathbb{R}}$, est défini sauf si $t = 0$ et $x = \pm\infty$.† ◇

1.6 Proposition.

a) Les limites définies dans (1.1)–(1.2) existent.

b) On a $\limsup_n (tx_n) = t \limsup_n x_n$ et $\limsup_n (-tx_n) = -t \liminf_n x_n$, $\forall\, t \in]0, \infty[$. Formules analogues pour $\liminf$.

c) Si $(x_{n_k})_k$ est une suite extraite de la suite $(x_n)_n$ telle que $x_{n_k} \to \ell$, alors $\liminf\limits_n x_n \leq \ell \leq \limsup\limits_n x_n$.

d) Il existe une suite extraite $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \to \limsup\limits_n x_n$. De même pour $\liminf\limits_n x_n$.

e) Si $x_n \to \ell$, alors $\ell = \liminf\limits_n x_n = \limsup\limits_n x_n$. Réciproquement, si $\liminf\limits_n x_n = \limsup\limits_n x_n = \ell$, alors $x_n \to \ell$.

f) Si la quantité $\limsup_n x_n + t \limsup_n y_n$ a un sens, alors

$$\limsup_n\, (x_n + ty_n) \leq \limsup_n x_n + t \limsup_n y_n, \ \forall\, t \in]0, \infty[.$$

Formules analogues pour $\liminf\limits_n\, (x_n + ty_n)$, $\limsup\limits_n\, (x_n - ty_n)$, $\liminf\limits_n\, (x_n - ty_n)$.

g) Si $x_n \to \ell$ et si la quantité $\ell + \limsup_n y_n$ a un sens, alors

$$\limsup_n\, (x_n + y_n) = \ell + \limsup_n y_n.$$

De même pour $\liminf_n$. ◇

Exercices

1.7 Exercice. Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que :

a) $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \to M$. Caractérisation analogue de $\inf A$.

†. L'impossibilité de définir utilement le produit tx vient du calcul des limites. *Dans le cadre de la théorie de l'intégration*, nous verrons que $0 \cdot \pm\infty = 0$.

b) A admet $\sup A \in]-\infty, \infty]$ et $\inf A \in [-\infty, \infty[$.
c) $\sup A$ et $\inf A$ sont uniques.
d) Nous avons $\sup(-tA) = -t \inf A$, $\forall\, t \in]0, \infty[$. Formules analogues pour $\sup(tA)$, $\inf(tA)$, $\inf(-tA)$.
e) Nous avons $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.
f) Si $A \subset B$, alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.
g) Si $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}$ est une suite croissante, alors

$$\lim_n x_n = \sup\{x_n\,;\, n \geq n_0\} = \sup_{n \geq n_0} x_n.$$

Énoncé analogue pour une suite décroissante.
h) Si $\sup A > x \in \overline{\mathbb{R}}$, alors il existe un $y \in A$ tel que $y > x$. ◇

1.8 Exercice. Que devient ce qui précède si nous considérons des parties non vides $A, B \subset \overline{\mathbb{R}}$? ◇

1.9 Exercice.

a) Si $\liminf_n x_n \geq \limsup_n x_n$, alors $x_n \to \limsup_n x_n = \liminf_n x_n$.
b) Si $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n \geq n_0$, alors $a \leq \liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n \leq b$.
c) Si $x_n \geq a$, $\forall\, n \geq n_0$ et $\limsup_n x_n \leq a$, alors $x_n \to a$. ◇

1.10 Exercice. Calculer $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$ pour les suites données par :

a) $x_n = (-1)^n$;
b) $x_n = (-1)^n \sqrt{n}$. ◇

1.11 Exercice. Montrer que $[x_n \leq y_n, \forall\, n \geq n_0] \implies \limsup x_n \leq \limsup y_n$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 1.6. Nous utilisons les items de l'exercice 1.7. Nous faisons les raisonnements uniquement pour $\limsup$. Posons

$$X_n := \sup_{k \geq n} x_k \text{ et } \overline{\ell} := \limsup_n x_n.$$

a) La suite $(X_n)_n$ décroît avec n (item f)). Elle a donc une limite. Ceci prouve l'existence de $\overline{\ell} = \lim_n X_n$, et aussi que $\overline{\ell} \leq X_n$, $\forall\, n$.
b) Calculons par exemple $\limsup_n (-tx_n)$. Nous avons $\sup_{k \geq n}(-tx_k) = -t \inf_{k \geq n} x_k$ (item d)), d'où

$$\limsup_n (-tx_n) = \lim_n \sup_{k \geq n}(-tx_k) = \lim_n \left(-t \inf_{k \geq n} x_k\right) = -t \lim_n \inf_{k \geq n} x_k = -t \liminf_n x_n.$$

c) Nous avons $x_{n_k} \leq X_{n_k}$, $\forall\, k$. En passant à la limite sur k, nous obtenons $\ell \leq \overline{\ell}$.

d) Soit $(M_k)_k$ une suite telle que $M_k < \overline{\ell}$ et $M_k \to \overline{\ell}$. Comme $\ell = \lim_n X_n > M_k$, $\forall\, k$, pour tour k il existe un rang m_k tel que $X_n > M_k$, $\forall\, n \geq m_k$. Il s'ensuit que pour tout k et $n \geq m_k$, il existe un $m = m(n,k) \geq n$ (m dépend de n et k) tel que $x_m > M_k$ (item h)). Posons $n_1 := m(m_1, 1)$ et, par récurrence, $N_k := \max{(n_k, m_k)} + 1$ et $n_{k+1} := m(N_k, k+1)$. Nous avons $n_k < n_{k+1}$ et $x_{n_k} > M_k$, $\forall\, k$ (vérifier). La suite extraite $(x_{n_k})_k$ satisfait donc $M_k < x_{n_k} \leq X_{n_k}$. En faisant $k \to \infty$ et en utilisant le théorème des gendarmes, nous obtenons $x_{n_k} \to \overline{\ell}$.

e) Soit $(x_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} \to \overline{\ell}$. Nous avons $x_{n_k} \to \ell$, d'où $\ell = \overline{\ell}$.
Réciproquement, supposons que $\liminf\limits_n x_n = \limsup\limits_n x_n = \ell$. Soit $Y_n := \inf\limits_{k \geq n} x_k$. Nous avons $Y_n \leq x_n \leq X_n$ et $Y_n \to \ell$, $X_n \to \ell$. Le théorème des gendarmes permet de conclure.

f) Montrons l'inégalité pour $\limsup_n (x_n - t y_n)$. Nous avons (en utilisant les items d) et e) de l'exercice)

$$\sup_{k \geq n} (x_n - t y_n) \leq \sup_{k \geq n} x_n + \sup_{k \geq n} (-t y_n) = \sup_{k \geq n} x_n - t \inf_{k \geq n} y_n.$$

En passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus, nous obtenons

$$\limsup_n (x_n - t y_n) \leq \limsup_n x_n - t \liminf_n y_n.$$

g) Soit $(y_{n_k})_k$ telle que $y_{n_k} \to \limsup_n y_n$. Nous avons $x_{n_k} + y_{n_k} \to \ell + \limsup_n y_n$. L'item c) de cette proposition implique (*) $\ell + \limsup y_n \leq \limsup_n (x_n + y_n)$.
En particulier, nous avons avons « = » si $\ell + \limsup_n y_n = \infty$ ou si $\limsup_n (x_n + y_n) = -\infty$. Nous pouvons donc supposer que $\ell + \limsup y_n < \infty$ (et donc, en particulier, que $\ell < \infty$) et que $\limsup_n (x_n + y_n) > -\infty$.
Par ailleurs, soit $(x_{n_k} + y_{n_k})_k$ telle que $x_{n_k} + y_{n_k} \to \limsup_n (x_n + y_n)$. Nous avons $y_{n_k} \to \limsup_n (x_n + y_n) - \ell$ (vérifier que $\limsup_n (x_n + y_n) - \ell$ existe bien !). À nouveau l'item c) donne (**) $\limsup_n (x_n + y_n) - \ell \leq \limsup y_n$.
Nous concluons grâce à (*) et (**) (vérifier !). CQFD

1.2 Dénombrement

En théorie de la mesure, nous travaillons souvent avec des familles $(A_i)_{i \in I}$ d'ensembles, avec I fini ou pouvant s'écrire comme une suite : dans ce qui suit, un tel I est désigné comme *au plus dénombrable*. La question que nous abordons ici est comment montrer qu'un ensemble est au plus dénombrable.

1.12 Définition (a. p. d.).

a) Un ensemble est *dénombrable* s'il est en correspondance bijective avec $\mathbb{N}$ (autrement dit : si on peut écrire tous les éléments de A, sans répétition, comme une suite).

b) Un ensemble est *au plus dénombrable* (a. p. d.) s'il est soit fini, soit dénombrable.

L'outil le plus commode pour vérifier qu'un ensemble est dénombrable est le suivant.

1.13 Proposition.

a) Une partie d'un ensemble a. p. d. est a. p. d.

b) Une union a. p. d. d'ensembles a. p. d. est a. p. d.

c) Un produit cartésien fini d'ensembles a. p. d. est a. p. d.

d) Un ensemble a. p. d. qui contient une infinité d'éléments distincts est dénombrable.

e) Un ensemble qui contient une partie qui n'est pas a. p. d. n'est pas a. p. d.

f) Si A et B sont en correspondance bijective et B est a. p. d., alors A est a. p. d.

Exercices

1.14 Exercice. a) $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Q}^n$ sont dénombrables.

b) L'ensemble des parties finies de $\mathbb{N}$ est dénombrable.

c) $[0, 1]$, $\mathbb{R}$ ne sont pas dénombrables. ◇

Démonstrations

Pour la preuve de la proposition 1.13, voir la section 1.4.

1.3 Clans, tribus, classes monotones, mesures

Les premiers objets importants de la théorie de la mesure sont les *ensembles*. Nous définissons ici les *ensembles d'ensembles* [†] qui jouent un rôle central dans la théorie : les *clans* et les *tribus*.

1.15 Notations.

a) $\mathscr{P}(X)$ est l'ensemble de toutes les parties de X, c'est-à-dire : $\mathscr{P}(X) := \{A\,;\ A \subset X\}$.

b) Si A est une partie de X, le complémentaire de A dans X est noté $X \setminus A$. S'il est clair qui est X, on notera ce complémentaire par A^c. ◇

†. Donc un clan (ou une tribu) est un ensemble dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles...

1.16 Définition (Clan)**.** Un *clan dans* X (ou *clan* tout court, s'il est clair qui est X) est un ensemble $\mathscr{C}$ dont les éléments sont des parties de X,† tel que :

i) $\emptyset \in \mathscr{C}$;

ii) si $A \in \mathscr{C}$, alors $A^c \in \mathscr{C}$;

iii) Si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \cup B \in \mathscr{C}$.

1.17 Remarque. La définition d'un clan demande qu'une union de deux ensembles de $\mathscr{C}$ soit encore dans $\mathscr{C}$. Nous verrons plus loin (exercice 1.37) qu'une union *consistant en un nombre fini d'ensembles* de $\mathscr{C}$ appartient à $\mathscr{C}$.

En général, une union *consistant en un nombre infini* d'ensembles de $\mathscr{C}$ *n'appartient pas* à $\mathscr{C}$.

Le raisonnement « chaque A_i (avec $i \in I$) est dans $\mathscr{C}$, d'où $\cup_{i\in I} A_i \in \mathscr{C}$ » n'est pas valide, à moins de savoir que I est fini. ◇

1.18 Définition (Tribu)**.** Une *tribu dans* X (ou *tribu* tout court, s'il est clair qui est X) est un ensemble $\mathscr{T}$ dont les éléments sont des parties de X, tel que :

i) $\emptyset \in \mathscr{T}$;

ii) si $A \in \mathscr{T}$, alors $A^c \in \mathscr{T}$;

iii) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{T}$, alors $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{T}$.

Si une partie A de X appartient à $\mathscr{T}$, on dit que A est un ensemble *$\mathscr{T}$-mesurable* (ou *ensemble mesurable* ou *mesurable* tout court, quand il est clair qui est $\mathscr{T}$).

1.19 Remarque. La question « $A \subset X$ est-il mesurable ? » n'a pas de sens. La réponse dépend de $\mathscr{T}$.‡ ◇

1.20 Remarque. La définition d'une tribu demande qu'une union *dénombrable* d'ensembles de $\mathscr{T}$ soit encore dans $\mathscr{T}$. L'exercice 1.37 montre que ceci encore vrai pour une union *a. p. d.*

En général, une union *quelconque* d'ensembles de $\mathscr{T}$ n'est pas dans $\mathscr{T}$.

Le raisonnement « chaque A_i (avec $i \in I$) est dans $\mathscr{T}$, d'où $\cup_{i\in I} A_i \in \mathscr{T}$ » n'est pas valide, à moins de savoir que I est a. p. d. ◇

1.21 Dictionnaire.

a) Clan=*algèbre*=(en anglais) algebra.

b) *Tribu*=*σ-algèbre*=(en anglais) σ-algebra. ◇

Quelques propriétés fondamentales (et simples) des clans et tribus :

†. Donc $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$.

‡. Situation analogue en topologie : la question « U est-il ouvert ? » n'a pas de sens sans connaître la topologie τ.

1.22 Proposition. Soit $\mathscr{C}$ un clan. Nous avons :

a) $X \in \mathscr{C}$.

b) Si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \cap B \in \mathscr{C}$.

c) Si $A, B \in \mathscr{C}$, alors $A \setminus B \in \mathscr{C}$.

d) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $\cup_{j=1}^n A_j \in \mathscr{C}$ et $\cap_{j=1}^n A_j \in \mathscr{C}$.

1.23 Proposition. Soit $\mathscr{T}$ une tribu. Nous avons :

a) $X \in \mathscr{T}$.

b) Si $A, B \in \mathscr{T}$, alors $A \cap B \in \mathscr{T}$.

c) Si $A, B \in \mathscr{T}$, alors $A \setminus B \in \mathscr{T}$.

d) Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{T}$, alors $\cup_{j=1}^n A_n \in \mathscr{T}$ et $\cap_{j=1}^n A_n \in \mathscr{T}$.

e) Si $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathscr{T}$, alors $\cap_n A_n \in \mathscr{T}$. ◇

Voici un troisième type d'ensembles d'ensembles qui jouent un rôle important, notamment au niveau des preuves : les *classes monotones*.

Pour commencer, deux définitions naturelles.

1.24 Définition. Une suite $(A_n)_n$ de parties de X est :

a) *croissante* si $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout n ;

b) *décroissante* si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout n.

1.25 Remarque. La définition qui va suivre est celle de la littérature anglophone. La définition admise dans la communauté francophone est différente. Ceci explique pourquoi le résultat fondamental qui fait intervenir les classes monotones, le théorème 2.9 (« de la classe monotone »), a un énoncé différent de celui que l'on trouve dans d'autres textes en français. ◇

1.26 Définition (Classe monotone)**.** Une *classe monotone (dans X)* est un ensemble $\mathscr{M}$ de parties de X tel que :

i) Si $(A_n)_n \subset \mathscr{M}$ est une suite croissante, alors $\cup_n A_n \in \mathscr{M}$;

ii) Si $(A_n)_n \subset \mathscr{M}$ est une suite décroissante, alors $\cap_n A_n \in \mathscr{M}$.

Dernier objet fondamental de cette section : la *mesure*. Dans les applications : (i) la tribu (parfois le clan) est la collection des ensembles « que l'on peut (ou que l'on sait) mesurer » ; (ii) la mesure est la fonction qui associe à un ensemble de la tribu sa « longueur », son « aire », son « volume », bref... sa mesure.

1.27 Définition. Une famille d'ensembles $(A_i)_{i \in I}$ est *d. d. d.* (acronyme pour *deux à deux disjoints*) si $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\forall\, i, j \in I$ avec $i \neq j$. ◇

1.28 Notation. Il sera commode d'utiliser la notation « $\sqcup$ » pour des unions d. d. d. : $\sqcup_{i\in I} A_i$ dénote l'union d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles d. d. d. $\diamond$

1.29 Définition (Mesure). Si $\mathscr{C}$ est un clan, une *mesure positive sur* $\mathscr{C}$ (ou *mesure* tout court) est une application $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ telle que :

i) $\mu(\emptyset) = 0$;

ii) Si $(A_n)_n \subset \mathscr{C}$ est une suite d. d. d. et si $\cup_n A_n \in \mathscr{C}$, alors $\mu(\sqcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

1.30 Remarque.

a) La propriété ii) est la *σ-additivité*.

b) Dans le cas particulier où $\mathscr{C}$ est une tribu, l'hypothèse $\cup_n A_n \in \mathscr{C}$ est automatiquement satisfaite. $\diamond$

1.31 Définition (Espace mesurable, mesuré)**.**

a) Un *espace mesurable* est un couple $(X, \mathscr{T})$, avec $\mathscr{T}$ tribu dans X.

b) Un *espace mesuré* est un triplet $(X, \mathscr{T}, \mu)$, avec $\mathscr{T}$ tribu dans X et μ mesure sur $\mathscr{T}$.

Nous concluons cette section avec quelques définitions et notations utiles.

1.32 Notation. $A\Delta B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A)$ désigne la *différence symétrique* de $A, B \subset X$. $\diamond$

1.33 Notations.

a) $A_n \nearrow A$ signifie que la *suite* $(A_n)_n$ est *croissante* et $A = \cup_n A_n$.

b) $A_n \searrow A$ signifie que la *suite* $(A_n)_n$ est *décroissante* et $A = \cap_n A_n$. $\diamond$

1.34 Définition (Fonction caractéristique)**.** Si $A \subset X$, la *fonction caractéristique* de A est $\chi_A : X \to \{0, 1\}$, définie par

$$\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \in X\backslash A \end{cases}. \qquad \diamond$$

Exercices

1.35 Exercice (Exemples fondamentaux de clans)**.**

a) L'ensemble $\mathscr{C}_1$ des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un clan.
De même si nous remplaçons $\mathbb{R}$ par un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et nous considérons des unions finies d'intervalles contenus dans I.

b) Un *pavé de* $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, avec chaque I_j intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{C}_n$ des unions finies de pavés de $\mathbb{R}^n$ est un clan.

c) Tout élément de $\mathscr{C}_n$ est une union finie de pavés de $\mathbb{R}^n$ deux à deux disjoints. $\diamond$

1.36 Exercice.

a) Soit $\mathscr{C}$ un clan sur X. Soit $Y \subset X$. Montrer que $\mathscr{C}_Y := \{A \cap Y\,;\ A \in \mathscr{C}\}$ est un clan sur Y.
   De même pour une tribu $\mathscr{T}$.
   $\mathscr{C}_Y$ (respectivement $\mathscr{T}_Y$) est le *clan induit* par $\mathscr{C}$ sur Y (respectivement la *tribu induite* par $\mathscr{T}$ sur Y).

b) Si $Y \in \mathscr{C}$, alors $\mathscr{C}_Y = \{A;\ A \in \mathscr{C},\ A \subset Y\}$. $\diamond$

1.37 Exercice. Montrer que si $\mathscr{C}$ est un clan et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{C}$. De même si on remplace clan par tribu. $\diamond$

1.38 Exercice.

a) $\mathscr{P}(X)$ est une tribu.

b) Si $X = \{1, 2, 3\}$, alors $\mathscr{C} = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$ est une tribu. $\diamond$

1.39 Exercice. Si X est fini, alors tout clan est une tribu. $\diamond$

1.40 Exercice.

a) Montrer que $A_n \nearrow A$ si et seulement si : la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ est croissante et converge simplement vers χ_A.

b) De même, $A_n \searrow A$ si et seulement si : la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ est décroissante et converge simplement vers χ_A. $\diamond$

1.41 Exercice.

a) Toute tribu est un clan.

b) Toute tribu est une classe monotone. $\diamond$

1.42 Exercice. Soit $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ (avec $\mathscr{C}$ clan) une application qui vérifie l'axiome ii) d'une mesure. Montrer que : (i) ou bien μ est une mesure; (ii) ou bien $\mu(A) = \infty$, $\forall\, A \in \mathscr{C}$. $\diamond$

Les deux exercices suivants donnent des exemples basiques de mesures.

1.43 Exercice. Soit $a \in X$. Soit $\delta_a : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\delta_a(A) := \begin{cases} 1, & \text{si } a \in A \\ 0, & \text{si } a \notin A \end{cases}.$$

Montrer que δ_a est une mesure. C'est la *mesure de Dirac en a* (ou *masse de Dirac en a*). $\diamond$

1.44 Exercice. Soit X un ensemble. Montrer que l'application $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{card } A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure sur $\mathscr{P}(X)$. C'est la *mesure de comptage*. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 1.22.

a) On a $X = \varnothing^c$.

b) découle de l'identité $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$.

c) suit de b) et de $A \backslash B = A \cap B^c$.

d) se montre par récurrence sur n. CQFD

Démonstration de la proposition 1.23.
a)–d) sont une conséquence de la proposition 1.22, car une tribu est un clan (exercice 1.41).

e) découle de l'identité $\cap_n A_n = (\cup_n A_n^c)^c$. CQFD

1.4 Pour aller plus loin

Dans cette section, nous démontrons la proposition 1.13 (et un peu plus). Pour faciliter la compréhension, les outils utilisés dans la preuve ont été énoncés et prouvés séparément, comme des lemmes.[†] Un ingrédient important de la preuve est le *théorème de Cantor-Bernstein* 1.50, que nous prouvons uniquement dans le cas simple qui sert à la preuve de la proposition 1.13.

1.45 Lemme. Toute partie infinie A de $\mathbb{N}$ est dénombrable. ◇

Démonstration du lemme 1.45. Soient $x_0 := \min A$ et $A_0 := A\backslash\{x_0\}$. Notons que $A_0 \neq \varnothing$ (sinon A serait fini).

Par récurrence, soient $x_{n+1} := \min A_n$ et $A_{n+1} := A_n\backslash\{x_{n+1}\}$. Alors A_n est non vide, $\forall\, n$, sinon A serait fini, et $x_{n+1} > x_n$, $\forall\, n$ (vérifier par récurrence sur n).

La suite $(x_n)_n$ d'entiers est donc strictement croissante, d'où $x_n \to \infty$.

Il suffit de montrer que $A = \{x_0, x_1, \ldots\}$. (En effet, si tel est le cas, alors $f : \mathbb{N} \to A$, $f(n) := x_n$, $\forall\, n$, est une bijection.) Preuve par l'absurde. Supposons qu'il existe $x \in A$ tel que $x \neq x_n$ pour tout n. On a $x > x_0$, par choix de x_0, d'où $x \in A_0$. Comme $x \neq x_1$, on trouve $x > x_1$. Par récurrence, $x \in A_n$ et $x > x_{n+1}$ pour tout n. En passant à la limite, $x \geq \lim x_{n+1} = \infty$, absurde. CQFD

1.46 Lemme. Si $A \subset B$ avec B a. p. d., alors A est a. p. d.

Par contraposée, si $A \subset B$ et A n'est pas a. p. d., alors B n'est pas a. p. d. ◇

Démonstration du lemme 1.46. Si A ou B est fini, c'est clair. Supposons A et B infinis.

†. Pour lemme, voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Lemme_(mathématiques)`.

Soit $f : B \to \mathbb{N}$ une bijection. La restriction g de f à A est une bijection entre A et $C = f(A)$.

C est infini, sinon A serait fini.

Le lemme précédent montre qu'il existe une bijection $h : C \to \mathbb{N}$.

Il s'ensuit que $h \circ g : A \to \mathbb{N}$ est une bijection. CQFD

1.47 Lemme. S'il existe une injection f de A vers $\mathbb{N}$, alors A est a. p. d. La réciproque est vraie. ◇

Démonstration du lemme 1.47. A est en bijection avec $B := f(A) \subset \mathbb{N}$.

Si B est fini, alors A l'est aussi.

Si B est infini, alors B est en bijection avec $\mathbb{N}$ (lemme 1.45), donc A l'est aussi.

Réciproquement, supposons A a. p. d. Si A est infini, alors A est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Si A est fini, alors on peut écrire $A = \{x_0, \ldots, x_k\}$, et la fonction $A \ni x_n \mapsto n \in \mathbb{N}$ est injective. CQFD

1.48 Corollaire. [†] Si A est infini et s'il existe une injection f de A vers $\mathbb{N}$, alors A est dénombrable. ◇

Démonstration du corollaire 1.48. Exercice ! CQFD

1.49 Lemme. Si B est a. p. d. et s'il existe une injection $f : A \to B$, alors A est a. p. d. ◇

Démonstration du lemme 1.49. L'ensemble $C := f(A)$ est une partie de B, donc (grâce au lemme 1.46) C est a. p. d.

A est en bijection avec C, donc A est a. p. d. CQFD

1.50 Théorème (Théorème de Cantor-Bernstein ; cas particulier)**.** S'il existe une injection $f : A \to \mathbb{N}$ et une injection $g : \mathbb{N} \to A$, alors A est dénombrable. ◇

Démonstration du théorème 1.50. A est en bijection avec $f(A) \subset \mathbb{N}$, donc A est a. p. d.

Par ailleurs, A n'est pas fini, car il contient la suite d'éléments distincts $g(0), g(1), \ldots$.

Il s'ensuit (grâce au corollaire 1.48) que A est dénombrable. CQFD

1.51 Remarque. L'énoncé *intuitif* du *théorème* (général) *de Cantor-Bernstein* est le suivant : Soient A, B deux ensembles tels que : (i) B a plus d'éléments que A ; (ii) A a plus d'éléments que B. Alors A et B ont autant d'éléments.

L'énoncé *rigoureux* est : Soient A, B deux ensembles tels qu'il existe $f : A \to B$ injective et $g : B \to A$ injective. Alors il existe $h : A \to B$ bijective.

†. Corollaire : cas particulier ou conséquence immédiate d'un résultat déjà montré.

De manière équivalente, s'il existe $f : A \to B$ injective et $k : A \to B$ surjective, alors il existe $h : A \to B$ bijective.

Voir https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorème_de_Cantor-Bernstein. (Notamment la preuve König du théorème). $\diamond$

1.52 Lemme. $\mathbb{N}^2$ est dénombrable. $\diamond$

Démonstration du lemme 1.52. $\mathbb{N}^2$ est infini, car il contient la suite $((n, 0))_{n\in\mathbb{N}}$, dont les éléments sont distincts.

Il suffit donc de construire une application injective $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$. (Le corollaire 1.48 permet alors de conclure.) Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(m, n) := 2^m 3^n$. L'unicité de la décomposition d'un entier en facteurs premiers montre que f est injective. CQFD

Le résultat précédent implique qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{N}$. En voici une explicite.

1.53 Exercice. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(m, n) := \dfrac{(m + n)(m + n + 1)}{2} + n$. Montrer que f est bijective. $\diamond$

Les résultats suivants complètent la preuve de la proposition 1.13.

1.54 Lemme. Un produit cartésien fini d'ensembles a. p. d. est a. p. d. $\diamond$

Démonstration du lemme 1.54. Il suffit de montrer le résultat quand il y a deux facteurs ; le cas général s'obtient par récurrence sur le nombre de facteurs dans le produit.

Soient A_1, A_2 deux ensembles a. p. d. Du lemme 1.47, il existe $f_j : A_j \to \mathbb{N}$ injective, $j = 1, 2$. Soit $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ bijective (*cf* lemme 1.52). Alors

$$h : A_1 \times A_2 \to \mathbb{N},\ h(a_1, a_2) := g(f(a_1), f(a_2)),\ \forall\, a_1 \in A_1,\ a_2 \in A_2,$$

est injective (vérifier !), d'où la conclusion (grâce au lemme 1.47). CQFD

1.55 Lemme. Une union a. p. d. d'ensembles a. p. d. est a. p. d. $\diamond$

Démonstration du lemme 1.55. Soient A_n, $n < l$, avec $l = \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$, des ensembles a. p. d.

Posons $B_0 := A_0$ et, pour $1 \leq n < l$, $B_n := A_n \backslash (\cup_{k=0}^{n-1} A_k)$. Alors les B_n sont d. d. d. et $\sqcup_n B_n = \cup_n A_n$.

Comme A_n est a. p. d. et $B_n \subset A_n$, l'ensemble B_n est a. p. d. (lemme 1.49). Nous pouvons donc écrire $B_n = \{x_i^n\ ;\ i < l_n\}$, avec $l_n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, d'où tout élément de $A := \cup_n A_n$ s'écrit de manière unique x_i^n pour un $n \in \mathbb{N}$ et pour un $i \in N$.

L'application $A \ni x_i^n \mapsto (n, i) \in \mathbb{N}^2$ est donc injective.

Comme dans la preuve du lemme 1.54, il s'ensuit que $A = \cup_n A_n$ est a. p. d. CQFD

Chapitre 2

Tribus, clans, classes monotones

2.0 Aperçu

Rappelons que les clans, tribus, classes monotones sont des ensembles dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles. Toute *collection* $\mathscr{A}$ d'ensemble engendre un clan, tribu ou classe monotone, au sens où il existe *une plus petite collection* d'ensembles, contenant $\mathscr{A}$, et qui soit un clan, ou tribu, ou classe monotone (section 2.1). Cette propriété est un parent d'autres propriétés du même type : par exemple, toute partie F d'un espace vectoriel engendre un espace Vect (F).

Dans la section 2.2, nous montrons le premier résultat important de ce cours, le *théorème de la classe monotone*. Son importance est plutôt théorique : *le théorème de la classe monotone permet de montrer* facilement *qu'une propriété vraie* (et, souvent, évidente) *pour une famille* $\mathscr{A}$ d'ensembles, *reste vraie pour la tribu engendrée par* $\mathscr{A}$. Deux applications fondamentales de ce théorème seront vues dans ce cours : l'unicité de la mesure de Lebesgue (section 4.5) et les propriétés des coupes des ensembles (section 8.1). Bien d'autres applications seront vues dans le cours de probabilités.

Enfin, dans la section 2.3, nous introduisons la plus importante des tribus, la *tribu borélienne* (du nom du mathématicien français Émile Borel). Elle est engendrée par les ouverts d'un espace métrique.

Compétences minimales attendues.

a) Montrer qu'un ensemble appartient à un clan où à une tribu.

b) Plus particulièrement, montrer qu'un ensemble est borélien. $\diamond$

2.1 Structures engendrées

« Engendré » est ici analogue à ce que nous avons rencontré avec d'autres structures : espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (contenus dans un espace vectoriel), sous-groupe engendré par une partie d'un groupe, etc.

2.1 Proposition. Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, alors il existe un plus petit clan (ou tribu, ou classe monotone) $\mathscr{B}$ contenant $\mathscr{A}$.

En d'autres termes, il existe $\mathscr{B}$ tel que :

i) $\mathscr{B}$ soit un clan (ou tribu, ou classe monotone).

ii) $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$.

iii) Si $\mathscr{D}$ est un clan (ou tribu, ou classe monotone) contenant $\mathscr{A}$, alors $\mathscr{B} \subset \mathscr{D}$.

$\mathscr{B}$ est le clan (ou tribu, ou classe monotone) *engendré par* $\mathscr{A}$ et est noté respectivement $\mathscr{C}(\mathscr{A})$, $\mathscr{T}(\mathscr{A})$ ou $\mathscr{M}(\mathscr{A})$. ◇

Comparons les trois structures engendrées par une famille $\mathscr{A}$.

2.2 Proposition. On a $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{A})$. ◇

2.3 Proposition. On a $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{A})$. ◇

2.4 Proposition. Un clan $\mathscr{C}$ qui est aussi une classe monotone est une tribu. ◇

Exercices

2.5 Exercice. Si $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ est une famille telle que $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{P}(X)$, $\forall\, i \in I$, et si chaque $\mathscr{A}_i$ est un clan (ou tribu, ou classe monotone), alors $\cap_{i\in I}\mathscr{A}_i$ est un clan (ou tribu, ou classe monotone). ◇

2.6 Exercice. Si $X := \{1, 2, 3\}$ et $\mathscr{A} := \{\{1\}\}$, alors :

a) le clan (et la tribu) engendré par $\mathscr{A}$ est $\{\varnothing, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$;

b) la classe monotone engendrée par $\mathscr{A}$ est $\mathscr{A}$. ◇

2.7 Exercice (Une source de contre-exemples)**.** Soient $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\ ;\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que :

a) $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$;

b) $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \{A \subset \mathbb{N}\ ;\ A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$.

c) $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.

d) En déduire que :

(i) En général, $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \neq \mathscr{C}(\mathscr{A})$, $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \neq \mathscr{M}(\mathscr{A})$ et $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \neq \mathscr{M}(\mathscr{A})$.

(ii) Si $\mathscr{C}$ est un clan et $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$, alors en général $\cup_{n\geq 0}A_n \notin \mathscr{C}$ et $\cap_{n\geq 0}A_n \notin \mathscr{C}$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 2.1. Nous faisons la preuve pour les clans ; preuve identique dans les autres cas.

Soit $\mathscr{F} := \{\mathscr{D}\,;\mathscr{A} \subset \mathscr{D}$ et $\mathscr{D}$ est un clan$\}$.

La famille $\mathscr{F}$ est non vide ; elle contient $\mathscr{P}(X)$.

Si on pose $\mathscr{B} := \cap_{\mathscr{D}\in\mathscr{F}}\mathscr{D}$, alors $\mathscr{B}$ est un clan contenant $\mathscr{A}$ (voir l'exercice 2.5).

Par définition de $\mathscr{F}$, tout clan $\mathscr{D}$ contenant $\mathscr{A}$ appartient à $\mathscr{F}$, donc (par définition de $\mathscr{B}$) contient $\mathscr{B}$. CQFD

2.8 Remarque. C'est la même preuve que celle qui donne l'existence du sous-espace engendré par une partie d'un espace vectoriel, ou l'existence d'un sous-groupe engendré par une partie d'un groupe, etc. ◇

Démonstration de la proposition 2.2. Avec $\mathscr{F}$ comme ci-dessus et

$$\mathscr{G} := \{\mathscr{D}\,;\ \mathscr{A} \subset \mathscr{D} \text{ et } \mathscr{D} \text{ tribu}\},$$

nous avons $\mathscr{F} \supset \mathscr{G}$, et donc $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \cap_{\mathscr{D}\in\mathscr{F}}\mathscr{D} \subset \cap_{\mathscr{D}\in\mathscr{G}}\mathscr{D} = \mathscr{T}(\mathscr{A})$. CQFD

Démonstration de la proposition 2.3. Preuve analogue à celle de la proposition 2.2, en remplaçant « clan » par « classe monotone ». CQFD

Démonstration de la proposition 2.4. Nous devons montrer que, si $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$, alors $\cup_{n\geq 0}A_n \in \mathscr{C}$.

Soit $B_n := \cup_{k=0}^{n}A_k$, $\forall\, n$. Nous avons $B_n \nearrow \cup_k A_k$ et $B_n \in \mathscr{C}$, $\forall\, n$ (car $\mathscr{C}$ est un clan).

$\mathscr{C}$ étant une classe monotone, nous trouvons $\cup_k A_k = \cup_n B_n \in \mathscr{C}$. CQFD

2.2 Théorème de la classe monotone

Cette section est consacrée à la preuve du premier résultat important que nous rencontrons :

2.9 Théorème (Théorème de la classe monotone). $\mathscr{C}$ clan $\implies \mathscr{M}(\mathscr{C}) = \mathscr{T}(\mathscr{C})$.

Ou encore : la classe monotone engendrée par un clan est la tribu engendrée par le clan.

En particulier, toute classe monotone qui contient $\mathscr{C}$ contient également $\mathscr{T}(\mathscr{C})$.

2.10 Remarque. Voir la remarque 1.25 ! ◇

2.11 Remarque. Concrètement, le théorème de la classe monotone est utilisé pour établir « pour pas cher » que, pour une propriété (P) et une tribu $\mathscr{T}$, nous avons

$$A \in \mathscr{T} \implies A \text{ satisfait (P)}. \tag{2.1}$$

Le schéma « abstrait » est le suivant. Si :

i) $\mathscr{C}$ est un clan qui engendre $\mathscr{T}$, c'est-à-dire tel que $\mathscr{T}(\mathscr{C}) = \mathscr{T}$.

ii) (P) est vraie pour tout $A \in \mathscr{C}$.

iii) $\{A \subset X\ ;\ A \text{ satisfait (P)}\}$ est un classe monotone,

alors nous avons (2.1).

Ce schéma est intéressant notamment lorsque la propriété ii) est évidente ; ceci est par exemple le cas dans la preuve des propositions 4.24 et 8.8. ◇

Exercices

2.12 Exercice.

a) Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{C}(\mathscr{B})$, $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

b) Nous avons $\mathscr{C}(\mathscr{C}(\mathscr{A})) = \mathscr{C}(\mathscr{A})$.

Propriété analogue pour la classe monotone et la tribu engendrées. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 2.9. Au vu de la proposition 2.3, il suffit de montrer que (*) $\mathscr{M} := \mathscr{M}(\mathscr{C})$ contient $\mathscr{T}(\mathscr{C})$.

Par définition de la tribu engendrée, (*) est vraie si $\mathscr{M}$ est une tribu. Pour montrer que $\mathscr{M}$ est une tribu, il suffit de montrer que (**) $\mathscr{M}$ est un clan, car « clan+classe monotone$\Longrightarrow$tribu » (proposition 2.4). Ainsi, le théorème 2.9 est ramené à la propriété suivante, que nous allons prouver dans ce qui suit : *la classe monotone engendrée par un clan est un clan.*

Posons, pour $A \subset X$ fixé, $\mathscr{M}_A := \{B \in \mathscr{M}\ ;\ A \cup B \in \mathscr{M}\}$. Alors $\mathscr{M}_A$ est une classe monotone. En effet, soit $(B_n)_n \subset \mathscr{M}_A$ une suite croissante. Alors $A \cup \cup_n B_n = \cup_n (A \cup B_n) \in \mathscr{M}$, car la suite $(A \cup B_n)_n \subset \mathscr{M}$ est croissante. De même, si $(B_n)_n \subset \mathscr{M}_A$ est une suite décroissante, alors $A \cup \cap_n B_n = \cap_n (A \cup B_n) \in \mathscr{M}$.

Si $A \in \mathscr{C}$, alors $\mathscr{M}_A \supset \mathscr{C}$ et donc, de ce qui précède, $\mathscr{M}_A$ est une classe monotone qui contient $\mathscr{C}$. Il s'ensuit que $\mathscr{M}_A \supset \mathscr{M}$ (justifier). Comme, par ailleurs, $\mathscr{M}_A \subset \mathscr{M}$, nous avons $\mathscr{M}_A = \mathscr{M}$. Autrement dit, l'union d'un élément de $\mathscr{C}$ et d'un élément de $\mathscr{M}$ est un élément de $\mathscr{M}$.

Par conséquent, si $A \in \mathscr{M}$, alors $\mathscr{M}_A \supset \mathscr{C}$. Il s'ensuit que $\mathscr{M}_A = \mathscr{M}$. Donc, (***) si $A, B \in \mathscr{M}$, alors $A \cup B \in \mathscr{M}$.

Enfin, soit $\mathscr{N} := \{A \in \mathscr{M} ; A^c \in \mathscr{M}\}$. Alors $\mathscr{N}$ est une classe monotone. En effet, si $(B_n)_n \subset \mathscr{N}$ est une suite croissante, alors $(\cup_n B_n)^c = \cap_n B_n^c \in \mathscr{N}$, car $(B_n^c)_n \subset \mathscr{N}$ est une suite décroissante. Il s'ensuit que $\cup_n B_n \in \mathscr{N}$.

De même, si $(B_n)_n \subset \mathscr{N}$ est une suite décroissante, alors $\cap_n B_n \in \mathscr{N}$.

Donc $\mathscr{N}$ est en effet une classe monotone. Comme $\mathscr{N}$ contient $\mathscr{C}$, nous trouvons $\mathscr{N} = \mathscr{M}$. Autrement dit, (****) si $A \in \mathscr{M}$, alors $A^c \in \mathscr{M}$.

(**) découle de (***), de (****) et de l'observation que $\varnothing \in \mathscr{M}$ (car $\varnothing \in \mathscr{C}$). CQFD

2.3 La tribu borélienne

Dans cette section, nous définissons la tribu la plus importante pour les applications : la *tribu borélienne*.

Soit (X, d) un espace métrique.†

2.13 Définition (Tribu borélienne)**.** La *tribu borélienne* $\mathscr{B}_X$ sur X est la tribu engendrée par les ouverts de X.

Ou encore : $\mathscr{B}_X := \mathscr{T}(\{U ; U \text{ ouvert de } X\})$.

Si on désigne par τ la topologie de X (=l'ensemble des ouverts de X), alors $\mathscr{B}_X = \mathscr{T}(\tau)$.

Les ensembles de cette tribu sont les *boréliens de* X.

2.14 Remarque. Donné X, la question « A est-il un borélien ? » n'a pas de sens, car la tribu borélienne dépend de la distance sur X. C'est la situation rencontrée en topologie à propos de la question « A est-il un ouvert ? ».

Néanmoins, il y a un abus fréquent de langage : « $A \subset \mathbb{R}^n$ est borélien » sous-entend que $\mathbb{R}^n$ est muni d'une norme. ◇

2.15 Remarque. Il est souvent utile d'avoir un *système de générateurs* d'une tribu $\mathscr{T}$, c'est-à-dire une famille $\mathscr{A}$ (simple à décrire) telle que $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{T}$.

Une telle famille permet de mettre en œuvre un mécanisme similaire à celui de la remarque 2.11. Si :

i) $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{T}$.
ii) (P) est vraie pour tout $A \in \mathscr{A}$.
iii) $\{A \subset X ; A \text{ satisfait (P)}\}$ est une tribu,

alors

$$A \in \mathscr{T} \implies A \text{ satisfait (P)}.$$ ◇

†. Plus généralement, nous pouvons considérer, au lieu d'un espace métrique, un espace topologique (X, τ). Néanmoins, pour les applications usuelles en théorie de l'intégration, le cadre des espaces métriques est suffisant.

La proposition suivante donne quelques systèmes importants de générateurs.

2.16 Proposition.

a) $\mathscr{B}_X$ est la tribu engendrée par les fermés de X.

b) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ est la tribu engendrée par :

   (i) les intervalles de $\mathbb{R}$

   ou

   (ii) les intervalles de la forme $]a, \infty[$.

c) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ est engendrée par les *pavés ouverts de* $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire les ensembles P de la forme $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, avec I_j intervalle ouvert, $\forall\, j$.

2.17 Remarque (Les ensembles « usuels » sont boréliens)**.** Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, il existe des parties de $\mathbb{R}^n$ qui ne sont pas boréliennes (un exemple, assez difficile, sera examiné dans le chapitre 4).

Ce qu'il faut retenir est que tous les ensembles ne sont pas nécessairement boréliens. En revanche, *tous les ensembles « usuels » sont boréliens.* ◇

Exercices

2.18 Exercice. On munit $\mathbb{R}$ de la métrique usuelle. Les intervalles, les fermés et les ouverts (de $\mathbb{R}$) sont boréliens. ◇

2.19 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $Y \subset X$, muni de la métrique induite par X. Montrer que $\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y\,;\, B \in \mathscr{B}_X\}$.

De manière équivalente, $\mathscr{B}_Y$ coïncide avec la tribu induite par $\mathscr{B}_X$ sur Y. ◇

2.20 Exercice. Soient (X, d), (Y, δ) deux espaces métriques. Soit $\Phi : X \to Y$ un *homéomorphisme.*[†] Si $A \subset X$, alors $A \in \mathscr{B}_X$ si et seulement si $\Phi(A) \in \mathscr{B}_Y$.

Symétriquement, si $B \subset Y$, alors $B \in \mathscr{B}_Y$ si et seulement si $\Phi^{-1}(B) \in \mathscr{B}_X$.

Si nous supposons uniquement Φ continue, alors nous avons $B \in \mathscr{B}_Y \implies \Phi^{-1}(B) \in \mathscr{B}_X$. ◇

2.21 Exercice.

a) Soient $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$. Montrer que $A \times B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

b) Plus généralement, si (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques et si nous munissons $X \times Y$ d'une métrique produit, alors $\mathscr{B}_X \times \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X \times Y}$. ◇

2.22 Remarque. Nous reprenons le cadre et la conclusion de l'exercice 2.21. Si (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques et si nous munissons $X \times Y$ d'une métrique produit, alors $\mathscr{B}_X \times \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X \times Y}$. Dans des situations usuelles, nous avons l'égalité $\mathscr{B}_X \times \mathscr{B}_Y =$

†. Un *homéomorphisme* est une application $\Phi : X \to Y$, avec X, Y espaces métriques (ou topologiques), continue, bijective, et avec Φ^{-1} continue.

$\mathscr{B}_{X\times Y}$ (voir l'exercice de synthèse # 18, partie II f)). Néanmoins, *en général, cette inclusion est stricte* (pathologie de Nedoma [18]). Voici (sans preuve) un exemple : si $X = Y = \mathscr{P}(\mathbb{R})$, muni de la métrique discrète $d(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$, alors la diagonale $\Delta_x := \{(x,x)\,;\, x \in X\}$ appartient à $\mathscr{B}_{X\otimes X}$, mais pas à $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X$. ◇

Démonstrations

Dans la preuve de la proposition 2.16, nous utiliserons les deux faits suivants.

2.23 Rappels.

a) Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union a. p. d. d'intervalles ouverts d. d. d.

b) Si on munit $\mathbb{R}^n$ d'une norme, tout point de $\mathbb{R}^n$ est la limite d'une suite de points ayant toutes les coordonnées rationnelles. ◇

Démonstration de la proposition 2.16. Notons, dans chaque cas, τ l'ensemble des ouverts, et $\mathscr{A}$ l'ensemble des parties de X données par l'énoncé (fermés, intervalles, etc).

Dans chaque cas, nous avons $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}_X$, et donc $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B}_X) = \mathscr{B}_X$. Il reste donc à montrer l'inclusion inverse $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \supset \mathscr{B}_X$.

Pour cela, il suffit de montrer que $\tau \subset \mathscr{T}(\mathscr{A})$, car si tel est le cas alors nous avons $\mathscr{B}_X = \mathscr{T}(\tau) \subset \mathscr{T}(\mathscr{T}(\mathscr{A})) = \mathscr{T}(\mathscr{A})$. En conclusion, il suffit de montrer que $U \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$ pour tout ouvert U.

Soit U un ouvert.

a) Nous avons $U^c \in \mathscr{A}$, d'où $U = (U^c)^c \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.

b) (i) U est une union a. p. d. d'intervalles ouverts I_j (voir le rappel 2.23 a)). Comme chaque I_j est dans $\mathscr{A}$, nous avons $U \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.

(ii) De ce qui précède, il suffit de montrer que tout intervalle ouvert $I =]a,b[$ est dans $\mathscr{T}(\mathscr{A})$.
Si $a \in \mathbb{R}$ et $b = \infty$, c'est clair.
Si $I = \mathbb{R}$, nous avons $I = \cup_{n\in\mathbb{N}}]-n,\infty[\in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
Il reste le cas $b \in \mathbb{R}$.
Pour tout $c \in \mathbb{R}$, nous avons $]a,c] =]a,\infty[\cap]c,\infty[^c\in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.
Il s'ensuit que $]a,b[= \cup_{n\in\mathbb{N}^*}]a,b-1/n] \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$.

c) Les ouverts de $\mathbb{R}^n$, donc la tribu borélienne, ne dépendent pas de la norme choisie. Nous prenons comme norme $\|\|_\infty$.
Soit $\mathscr{C} := \{B(x,r)\,;\, x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}$. Alors $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ et $\mathscr{C}$ est a. p. d. (En effet, la fonction $B(x,r) \mapsto (x,r) \in \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ est injective et $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}$ est dénombrable.) Il suffit donc de montrer que U est l'union d'une famille de boules de $\mathscr{C}$; cette union sera automatiquement a. p. d.

Posons $\mathscr{D} := \{B(x,r) \in \mathscr{C}\ ;\ B(x,r) \subset U\}$. Nous allons montrer l'égalité

$$\cup_{B(x,r)\in\mathscr{D}} B(x,r) = U. \tag{2.2}$$

Dans (2.2), l'inclusion « $\subset$ » est claire.

Montrons, dans (2.2), « $\supset$ ». Soit $y \in U$. Nous allons trouver une boule $B(x,r)$ telle que $B(x,r) \in \mathscr{D}$ et $y \in B(x,r)$.

Il existe un $R > 0$ tel que $B(y,R) \subset U$. Quitte à diminuer R, nous pouvons supposer $R \in \mathbb{Q}$.

Soit $x \in \mathbb{Q}^n$ tel que $\|x - y\|_\infty < r := R/2$. (L'existence de y découle du rappel 2.23 b).) On vérifie aisément que $y \in B(x,r)$ et $B(x,r) \subset B(y,R)$; d'où $B(x,r) \subset U$. Finalement, nous avons bien $B(x,r) \in \mathscr{D}$ et $y \in B(x,r)$. CQFD

Chapitre 3

Fonctions mesurables

3.0 Aperçu

La topologie travaille avec des ensembles, dont les plus importants sont les *ouverts*, et des fonctions, dont les plus importantes sont les *fonctions continues*. Nous avons rencontré, dans le chapitre précédent, des analogues des ouverts en théorie de la mesure : il s'agit, dans un cas particulier, de *boréliens*, et dans le cas général d'*ensembles mesurables*, c'est-à-dire les éléments d'une tribu.

Dans ce chapitre, nous définissons les analogues des fonctions continues, qui sont les *fonctions mesurables*. Au vu de la définition d'une fonction continue, une définition naturelle serait

$$f : X \to \mathbb{R} \text{ est mesurable} \iff f^{-1}(U) \text{ est mesurable}, \forall\, U \subset \mathbb{R} \text{ ouvert}. \tag{3.1}$$

Nous ne partirons pas de cette définition (qui serait correcte !), mais d'une définition équivalente, qui a le mérite de s'insérer plus naturellement dans les preuves.[†] (3.1) sera alors une *caractérisation* des fonctions mesurables.

Comme pour les fonctions continues, les opérations usuelles (somme, produit, etc.) transforment les fonctions mesurables en fonctions mesurables ; ceci sera prouvé dans les sections 3.2 et 3.3. Nous apprendrons au passage un slogan très important : *borélien* $\circ$ *mesurable* = *mesurable*, qui est le pendant de *continu* $\circ$ *continu* = *continu*.

Une propriété qui distingue les fonctions mesurables des fonctions continues est qu'une limite *simple* de fonctions mesurables est mesurable ; rappelons qu'en général ceci est faux pour les fonctions continues.

†. Une raison plus profonde, qui dépasse largement le cadre de ce cours, de préférer la définition 3.3 à la définition (3.1) est que, pour des fonctions *à valeurs vectorielles*, (3.1) et la définition 3.3 ne sont plus équivalentes. Dans ce cadre, la « bonne » définition est 3.3.

Compétences minimales attendues.

a) Vérifier qu'une fonction *concrète* est mesurable, en particulier via l'exercice 3.18.

b) Utiliser les fonctions mesurables pour montrer que des ensembles sont mesurables. ◇

3.1 Définition. Caractérisation

Dans cette section, nous définissons les fonctions mesurables et donnons des caractérisations (qui peuvent être vues comme des définitions alternatives) de celles-ci. Le point de départ est celui des *fonctions étagées*.

3.1 Notations.

a) Si $f : X \to Y$ et $B \subset Y$, alors $f^{-1}(B) := \{x \in X\,;\, f(x) \in B\}$.

b) Pour alléger l'écriture, si $B := \{y\}$, nous écrivons $f^{-1}(y)$ au lieu de $f^{-1}(\{y\})$. Ainsi, $f^{-1}(y) := \{x \in X\,;\, f(x) = y\}$. ◇

3.2 Définition (Fonction étagée)**.** Une *fonction étagée* est une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ de la forme $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$, où :

i) La somme a un *nombre fini de termes*.

ii) $a_i \in \mathbb{R}$, $\forall\, i$.

iii) $A_i \in \mathscr{T}$, $\forall\, i$.

3.3 Définition (Fonction mesurable)**.** Une *fonction* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est *mesurable* s'il existe une suite $(f_n)_n$ de fonctions étagées telle que $f_n \to f$ simplement.

Dans le cas particulier où (X, d) est un espace métrique et $\mathscr{T}$ est la tribu borélienne, f est une *fonction borélienne*.

Dans le cas particulier de l'espace $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n)$, f est une fonction *Lebesgue mesurable*. †

3.4 Remarque.

a) La question « f est-elle mesurable ? » n'a pas de sens si $\mathscr{T}$ n'est pas précisée ; la réponse dépend de $\mathscr{T}$. Voir la remarque 1.19.

b) Dans le cas particulier où $X \subset \mathbb{R}^n$, sauf spécification contraire, la tribu considérée est la tribu borélienne induite par $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ sur X, c'est-à-dire $\mathscr{B}_X = \{B \cap X\,;\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}\}$ (voir l'exercice 2.19). Donc lorsque $X \subset \mathbb{R}^n$, « mesurable = borélien ». ◇

†. $\mathscr{L}_n$ est la *tribu de Lebesgue*, qui sera introduite dans la définition 4.36.

Comme expliqué dans l'aperçu, les fonctions mesurables peuvent être décrites en termes d'images réciproques.

3.5 Théorème (Caractérisation des fonctions mesurables)**.** $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

i) $f^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$.

ii) $f^{-1}(-\infty) \in \mathscr{T}$.

iii) $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

3.6 Remarque. Supposons $f : X \to \mathbb{R}$ (c'est-à-dire, f ne prend pas les valeurs $\pm\infty$). Dans ce cas, la condition de mesurabilité devient $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Cette condition est équivalente à (3.1) (exercice 3.15). ◇

La preuve du théorème 3.5 (mais pas son énoncé) mène à la conclusion suivante.

3.7 Corollaire. Toute fonction mesurable positive est la limite d'une suite croissante de fonctions étagées.

Voici une autre caractérisation des fonctions mesurables, plus utilisée dans la pratique que le théorème 3.5. Son énoncé est à mettre en rapport avec les *systèmes de générateurs* (remarque 2.15 et propriété 2.16).

3.8 Proposition. $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si nous avons

$$\{x \in X \,;\, f(x) > a\} = f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathscr{T} \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$

En particulier, $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si nous avons

$$f^{-1}(]a, \infty[) \in \mathscr{T} \text{ pour tout } a \in \mathbb{R}.$$ ◇

Le résultat suivant est un *théorème-définition* : si $f : X \to \mathbb{R}^n$, nous pouvons prendre chacune des propriétés équivalentes 1 et 2 comme *définition* de la mesurabilité. À mettre en parallèle avec l'équivalence (avec cette fois-ci X espace métrique)

$$f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n \text{ continue } \iff f_i \text{ continue}, \forall\, i \in [\![1, n]\!].$$

3.9 Théorème. Soit $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. Chaque f_i est mesurable, $i \in [\![1, n]\!]$.
2. Pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$.

Si l'une de ces deux conditions est satisfaite, f est appelée *mesurable*.

Cas particulier : $f : X \to \mathbb{C}$ est mesurable $\iff \operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont mesurables. ◇

Les fonctions ne sont pas toujours définies sur l'espace entier X, mais uniquement sur une partie A de celui-ci. Nous définissons ici la notion de mesurabilité dans ce cas. Ce n'est pas la seule définition possible ; une autre définition, *qui n'est pas équivalente à celle-ci*, est suggérée dans la remarque 3.12.

3.10 Définition. Si $A \subset X$ et si $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, alors f est *mesurable* si et seulement si :

i) A est mesurable.

ii) f étendue par la valeur 0 sur A^c est mesurable.

Même définition si $f : A \to \mathbb{R}^n$.[†]

(Reformulation de l'item ii) : la fonction $\chi_A f$, définie sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, est mesurable.) ◇

L'énoncé qui suit est l'analogue des théorèmes 3.5 et 3.9 et de la proposition 3.8 pour des fonctions définies uniquement sur $A \subset X$.

3.11 Proposition. Soit $A \subset X$ mesurable.

a) $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

 i) $f^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$.

 ii) $f^{-1}(-\infty) \in \mathscr{T}$.

 iii) $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$ pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

b) Une autre caractérisation : $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable si et seulement si

$$f^{-1}(]a, \infty]) \in \mathscr{T}, \ \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

c) $f : A \to \mathbb{R}^n$ est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. ◇

3.12 Remarque. En utilisant la proposition 3.11, nous pouvons déduire facilement que la mesurabilité de f (au sens de la définition 3.10) est équivalente à : $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{R}^n$) est mesurable par rapport à la tribu induite $\mathscr{T}_A = \{B \cap A \,;\, B \in \mathscr{T}\}$.

Cette équivalence n'est vraie que si A est mesurable. ◇

Exercices

3.13 Exercice. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. Montrer que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B \subset \mathbb{R}$. ◇

3.14 Exercice. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonction étagées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f + g$ et λf sont étagées. ◇

---

†. Si f est à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors 0 est le nombre réel 0. Si f est à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, alors 0 est le vecteur $0_{\mathbb{R}^n}$.

‡. Rappelons que, si $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $f\chi_A := \begin{cases} f, & \text{dans } A \\ 0, & \text{dans } A^c \end{cases}$.

L'exercice qui suit explique pourquoi (3.1) serait une bonne définition.

3.15 Exercice. Soit $f : X \to \mathbb{R}$. Montrer que

$$f^{-1}(B) \in \mathscr{T},\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \iff f^{-1}(U) \in \mathscr{T},\ \forall\, U \subset \mathbb{R} \text{ ouvert.} \qquad \diamond$$

L'exercice qui suit sera utilisé dans la preuve du théorème 3.5.

3.16 Exercice. Soit $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$ une suite ayant une limite. Nous avons

$$\lim_n x_n > a \in \mathbb{R} \iff \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } x_n > a + 1/k,\ \forall\, n \geq m. \qquad \diamond$$

3.17 Exercice. Soit $A \subset X$. Alors χ_A est mesurable si et seulement si A l'est. $\diamond$

L'exercice qui suit est *fondamental* (notamment l'item f)). Il offre une *boîte à outils* efficace pour montrer qu'un fonction est mesurable. [†]

3.18 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique.

a) Soient $A \in \mathscr{B}_X$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est borélienne.
En particulier, toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est borélienne.

b) Plus généralement, si f est continue en dehors d'une partie finie de X, alors f est borélienne.

c) Encore plus généralement. Soient $A_1, A_2, \ldots,$ boréliens d. d. d. tels que $X = \sqcup_k A_k$. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est borélienne.

d) De même si, dans le point précédent, on remplace « f_k continue » par « f_k borélienne » (voir également le point f)).

e) De même pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

f) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soient $A_1, A_2, \ldots,$ mesurables d. d. d. tels que $X = \sqcup_k A_k$. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est mesurable.

g) Montrer que les items a)–e) sont des cas particuliers de l'item f). $\diamond$

Démonstrations

Le résultat qui suit sera utilisé dans la preuve du théorème 3.5; il sera utile dans d'autres circonstances.

3.19 Proposition. Soit $f : X \to Y$ et soit $\mathscr{A}$ une famille de parties de Y. Si $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ pour tout $A \in \mathscr{A}$, alors $f^{-1}(A) \in \mathscr{T}$ pour tout $A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$. $\diamond$

†. Dans le cas particulier où X est un espace métrique, cet exercice permet donc de montrer qu'une fonction est borélienne.

Démonstration de la proposition 3.19. Soit $\mathscr{D} := \{A \subset Y \; ; \; f^{-1}(A) \in \mathscr{T}\}$.

Nous avons $\mathscr{D} \supset \mathscr{A}$. Par ailleurs, $\mathscr{D}$ est une tribu. En effet, si $(A_n)_n \subset \mathscr{D}$, alors $f^{-1}(\cup_n A_n) = \cup_n f^{-1}(A_n) \in \mathscr{T}$; vérification analogue des autres propriétés de la tribu.

Il s'ensuit que $\mathscr{D} \supset \mathscr{T}(\mathscr{A})$. CQFD

Démonstration du théorème 3.5 .
« $\Longrightarrow$ » Soit (f_n) une suite de fonctions étagées telle que $f_n \to f$.

Soient $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Posons $A_{n,a} := (f_n)^{-1}(]a, \infty[)$, qui appartient à $\mathscr{T}$ (exercice 3.13).

Nous avons (en utilisant l'exercice 3.16)

$$f(x) > a \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } f_n(x) > a + 1/k \text{ pour } n \geq m.$$

En d'autres termes,

$$\begin{aligned} f(x) > a &\Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^*, \exists\, m \in \mathbb{N} \text{ tels que } x \in \cap_{n\geq m} A_{n,a+1/k} \\ &\Longleftrightarrow x \in \cup_{k\in\mathbb{N}^*} \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{n\geq m} A_{n,a+1/k} \in \mathscr{T} \end{aligned}$$

(justifier l'appartenance à $\mathscr{T}$).

Donc

$$f^{-1}(]a, \infty]) = \{x \in X \; ; \; f(x) > a\} = \cup_{k\in\mathbb{N}^*} \cup_{m\in\mathbb{N}} \cap_{n\geq m} A_{n,a+1/k} \in \mathscr{T}, \; \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

Il s'ensuit que $f^{-1}(\infty) = \cap_n f^{-1}(]n, \infty]) \in \mathscr{T}$.

Par conséquent, $f^{-1}(]a, \infty[) = f^{-1}(]a, \infty]) \setminus f^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$.

La proposition 3.19 combinée avec la partie b) ii) de la proposition 2.16 montre que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}, \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Enfin, $f^{-1}(-\infty) = X \setminus (f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\infty)) \in \mathscr{T}$.

« $\Longleftarrow$ » Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) := \begin{cases} -2^n, & \text{si } f(x) < -2^n \\ 2^n, & \text{si } f(x) \geq 2^n \\ k/2^n, & \text{si } k/2^n \leq f(x) < (k+1)/2^n \end{cases}$; ici, k est un entier relatif compris entre -4^n et $4^n - 1$.

Formule équivalente pour f : si nous posons

$$A_n := f^{-1}([-\infty, -2^n[), \; B_n := f^{-1}([2^n, \infty]) \text{ et } C_{n,k} := f^{-1}([k/2^n, (k+1)/2^n[),$$

alors

$$f_n = -2^n \chi_{A_n} + 2^n \chi_{B_n} + \sum_{k=-4^n}^{4^n-1} \frac{k}{2^n} \chi_{C_{n,k}}.$$

Chaque f_n est une fonction étagée (vérifier) et nous avons $f_n \to f$ (vérifier). CQFD

Démonstration du corollaire 3.7. Dans le cas particulier où f est positive, la suite $(f_n)_n$ construite, dans la preuve du théorème 3.5, pour montrer l'implication « $\Longleftarrow$ », est croissante. CQFD

Démonstration de la proposition 3.8.
« $\Longrightarrow$ » Implication vue dans la preuve du théorème 3.5.

« $\Longleftarrow$ » Nous avons $f^{-1}(\infty) = \cap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(]n, \infty]) \in \mathscr{T}$.

Il s'ensuit que $f^{-1}(]a, \infty[) = f^{-1}(]a, \infty])\backslash f^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. La proposition 3.19 combinée avec la partie b) ii) de la proposition 2.16 implique $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Enfin, $f^{-1}(-\infty) = X\backslash(f^{-1}(\mathbb{R}) \cup f^{-1}(\infty)) \in \mathscr{T}$. CQFD

Démonstration du théorème 3.9.
« 1. $\Longrightarrow$ 2. » Si $I_1, I_2, \ldots, I_n$ sont des intervalles ouverts, alors $(f_i)^{-1}(I_i) \in \mathscr{T}$.

Il s'ensuit que $f^{-1}(I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n) = \cap (f_i)^{-1}(I_i) \in \mathscr{T}$.

La proposition 3.19 combinée avec la partie c) de la proposition 2.16 montre que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

« 2 $\Longrightarrow$ 1. » Si $I =]a, \infty[$, alors $(f_i)^{-1}(I) = f^{-1}(\mathbb{R}^{i-1} \times I \times \mathbb{R}^{n-i}) \in \mathscr{T}$. CQFD

Démonstration de la proposition 3.11.

a) « $\Longrightarrow$ »
   i) Posons $g := f\chi_A$. Nous avons (*) $f^{-1}(\infty) = g^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$.
   ii) Même raisonnement que pour i).
   iii) Il suffit de noter que $f^{-1}(B) = g^{-1}(B) \cap A$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

   « $\Longleftarrow$ » De (*), nous avons $g^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$; de même, $g^{-1}(-\infty) \in \mathscr{T}$.
   Si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, alors : soit $0 \notin B$, et alors $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, soit $0 \in B$, et dans ce cas $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup A^c \in \mathscr{T}$.
   Les conditions i)–iii) du théorème 3.5 sont donc satisfaites par g ; il s'ensuit que g est mesurable, donc (définition 3.10) f l'est également.

b) Il suffit de répéter la preuve de la proposition 3.8.

c) Nous pouvons reprendre les arguments de l'item a) :
   « $\Longrightarrow$ » Si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, alors $f^{-1}(B) = g^{-1}(B) \cap A \in \mathscr{T}$.
   « $\Longleftarrow$ » Si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, alors : soit $0 \notin B$, et alors $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, soit $0 \in B$, et dans ce cas $g^{-1}(B) = f^{-1}(B) \cup A^c \in \mathscr{T}$. CQFD

3.2 Opérations avec les fonctions mesurables

Dans cette section et la suivante, nous décrivons plusieurs mécanismes qui permettent de construire des fonctions mesurables à partir de fonctions mesurables. Par exemple, comme pour les fonctions continues, *un produit de fonctions mesurables est une fonction mesurable.*

Nous travaillons dans un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$.

3.20 Proposition. Une limite simple de fonctions mesurables est une fonction mesurable.

3.21 Proposition. Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est *borélienne* et si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est *mesurable*, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ est mesurable.

$$X \xrightarrow[\text{mesurable}]{f} \mathbb{R}^n \xrightarrow[\text{borélienne}]{g} \mathbb{R}^k \implies X \xrightarrow[\text{mesurable}]{f\circ g} \mathbb{R}^k.$$

3.22 Remarque. À retenir sous la forme : *borélienne* ∘ *mesurable* = *mesurable*. ◇

Le plus souvent, la proposition 3.21 est utilisée avec g continue, cas particulier couvert par le corollaire suivant.

3.23 Corollaire. Si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ est continue et si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}^k$ est mesurable.

Avant de démontrer qu'une somme ou produit de fonctions mesurables est une fonction mesurable (proposition 3.25), revenons sur les opérations faisant intervenir $\pm\infty$.

3.24 Convention. *En théorie de la mesure et de l'intégration*, nous adoptons la *convention* suivante : $0 \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot 0 = 0$.

En particulier, si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$, alors le produit fg est défini en tout point.

Néanmoins, les sommes $\infty + (-\infty)$ et $-\infty + \infty$ ne sont toujours pas définies. La somme $f + g$ est définie *uniquement dans le complémentaire de l'ensemble*

$$\{x \in X\,;\ f(x) = \pm\infty \text{ et } g(x) = -f(x)\}.$$ ◇

3.25 Proposition.

a) Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont mesurables, alors fg et (si cela a un sens) $f + g$ sont mesurables.
   (On peut définir $f + g$ s'il n'y a pas de point $x \in X$ tel que $f(x) = \pm\infty$ et $g(x) = -f(x)$.)
   De même pour $f - g$.

b) Si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf est mesurable.

Exercices

3.26 Exercice. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} 1/x, & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$.

a) Montrer que g est borélienne.

b) En déduire que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable et $f \neq 0$, alors $1/f$ est mesurable.

c) Montrer que, si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable et $f \neq 0$, alors $1/f$ est mesurable. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 3.20. Il suffit de copier la preuve du théorème 3.5 « $\Longrightarrow$ ». Cette fois-ci, la mesurabilité des $A_{n,a}$ est donnée non pas par le fait que les f_n sont étagées, mais par le théorème 3.5. CQFD

Démonstration de la proposition 3.21. Si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^k}$, alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \mathscr{T}$, car $g^{-1}(B) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. CQFD

Démonstration de la proposition 3.25.

a) *$f + g$ est mesurable.* Supposons que $f + g$ ait un sens.
Si f_n, g_n sont des fonctions étagées telles que $f_n \to f$, $g_n \to g$, alors $f_n + g_n$ est étagée (exercice 3.14) et $f_n + g_n \to f + g$.
Preuve similaire pour $f - g$.
fg est mesurable. Soit $F_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & \text{si } f(x) \neq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) = 0 \end{cases}$; on définit de même G_n. Définition équivalente : si $A := f^{-1}(0)$, alors $F_n = f_n \chi_{A^c}$.
La fonction F_n est étagée et nous avons $F_n \to f$ (vérifier). La fonction $F_n G_n$ est étagée (exercice 3.14) et $F_n G_n \to fg$ (vérifier).

b) Nous avons $\lambda f_n \to \lambda f$.

Dans tous les cas, nous concluons grâce à la proposition 3.20. CQFD

3.27 Remarque. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$, nous pouvons raisonner différemment. Nous avons $f + g = \Phi(f, g)$, avec $\Phi(x, y) := x + y$. $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ est mesurable, car chacune des ses coordonnées l'est (théorème 3.9). Φ étant continue (donc borélienne), la proposition 3.21 permet de conclure. De même pour fg. Voir la remarque 3.35 pour un raisonnement similaire. ◇

3.3 Autres opérations

Dans cette partie, nous travaillons dans un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$. Toutes les fonctions considérées sont définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ et sont *supposées mesurables*.

3.28 Proposition. $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ sont mesurables. ◇

3.29 Corollaire. $\max(f_0, \ldots, f_n)$ et $\min(f_0, \ldots, f_n)$ sont mesurables. ◇

3.30 Notations.

a) Si $t \in \mathbb{R}$, $t_+ := \begin{cases} t, & \text{si } t \geq 0 \\ 0, & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est la *partie positive de t*, et $t_- := \begin{cases} 0, & \text{si } t \geq 0 \\ -t, & \text{si } t < 0 \end{cases}$ est la *partie négative de t*.

b) Si f est une fonction, $f_+(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0, & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$ est la *partie positive de* f, et $f_- := \begin{cases} 0, & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x), & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$ est la *partie négative de* f. ◇

3.31 Corollaire. f_+, f_- et $|f|$ sont mesurables. ◇

3.32 Proposition. $\sup_n f_n$ et $\inf_n f_n$ sont mesurables. ◇

3.33 Proposition. $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables.

3.34 Proposition. Soit

$$A := \{x \in X \text{ ; la suite } (f_n(x))_n \text{ a une limite dans } \overline{\mathbb{R}}\}.$$

Nous avons les propriétés suivantes :

a) A est mesurable.

b) Si nous posons, pour $x \in A$, $f(x) := \lim_n f_n(x)$, alors $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable.

c) Soit $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$, définie par $F(x) := \begin{cases} \lim_n f_n(x), & \text{si } \lim f_n(x) \text{ existe} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$. Alors F est mesurable. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 3.28. Nous considérons deux suites, $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$, de fonctions étagées, avec $f_n \to f$, $g_n \to g$. Nous avons $h_n \to \max(f, g)$ et $k_n \to \min(f, g)$, où $h_n := \max(f_n, g_n)$ et $k_n := \min(f_n, g_n)$; vérifier, en utilisant les formules

$$\max(a, b) = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \ \min(a, b) = \frac{a + b - |a - b|}{2}. \tag{3.2}$$

Au vu de la proposition 3.20, il suffit donc de montrer que h_n et k_n sont mesurables, ce qui découle de (3.2). CQFD

3.35 Remarque. Si $f, g : X \to \mathbb{R}$, nous pouvons raisonner différemment. Nous avons $\max(f, g) = \Phi(f, g)$, avec $\Phi(x, y) := \max(x, y)$. $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ est mesurable, car chacune des ses coordonnées l'est (théorème 3.9). Φ est continue (donc borélienne) ; ceci découle de (3.2). La proposition 3.21 permet de conclure. De même pour $\min(f, g)$. Voir aussi la remarque 3.27. ◇

Démonstration du corollaire 3.29. Par récurrence, via la proposition 3.28 (vérifier !). CQFD

Démonstration du corollaire 3.31. Nous avons $f_+ = \max(f, 0)$, $f_- = f_+ - f$ et $|f| = f_+ + f_-$ (vérifier). Nous concluons grâce aux propositions 3.28 et 3.25. CQFD

Démonstration de la proposition 3.32. Nous avons $\sup_n f_n = \lim_{n\to\infty} \max(f_0, \ldots, f_n)$, donc la fonction $\sup_n f_n$ est limite d'une suite de fonctions mesurables. Preuve similaire pour $\inf$. CQFD

Démonstration de la proposition 3.33. Considérons la $\liminf$; preuve similaire pour la $\limsup$.

Soit $g_n := \inf_{m\geq n} f_m$, qui est mesurable. Il suffit alors de se rappeler que $\liminf_n f_n = \lim_{n\to\infty} g_n$ et d'appliquer la proposition 3.32. CQFD

Démonstration de la proposition 3.34. Soient $g := \liminf_n f_n$, $h := \limsup_n f_n$, toutes les deux mesurables.

Posons $B := g^{-1}(\infty)$, $C := h^{-1}(-\infty)$, $k := (h - g)\chi_{(B\cup C)^c}$, qui sont mesurables (vérifier).

a) Nous avons $A = k^{-1}(0) \cup B \cup C$ (justifier) et donc $A \in \mathscr{T}$.

b) et c) Sur A, nous avons $f = g$, et donc $F = f\chi_A = g\chi_A$, la dernière fonction étant mesurable. Il s'ensuit que f et F le sont (voir la définition 3.10). CQFD

Chapitre 4

Mesures

4.0 Aperçu

L'objet d'étude de ce chapitre est la *mesure*. Dans la section 4.1, nous en établissons quelques propriétés simples, mais fondamentales (*monotonie*, *sous-additivité*, etc.).

Les sections 4.2 et 4.3 sont dédiées aux ensembles qui sont suffisamment « petits » pour qu'ils soient « oubliés » dans les calculs : il s'agit d'ensembles *négligeables*, qui en théorie de la mesure et de l'intégration sont comme leur nom l'indique. À l'opposé du négligeable, nous avons la notion de *presque partout*.

À partir de la section 4.4, nous nous intéressons à des mesures particulières : *finies*, *σ-finies*, *de Radon*. Comme dans d'autres circonstances, plus les définitions sont contraignantes, plus les objets ont des propriétés intéressantes.[†] En particulier, nous verrons que pour une mesure de Radon, la mesure des ouverts détermine la mesure de tous les autres boréliens (corollaire 4.27).

Dans la section 4.5, nous définissons la (célèbre) *mesure de Lebesgue* dans $\mathbb{R}^n$, en donnant quelques-unes de ses propriétés. Sa *construction* dans $\mathbb{R}$,[‡] qui est hors programme mais très instructive, fera l'objet du chapitre 5. Curieusement, sa construction dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, est bien plus facile (corollaire 8.11 dans la section 8.2)... à condition d'admettre l'existence de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$.

À défaut de pouvoir montrer son existence, nous montrerons l'*unicité* de la mesure de Lebesgue (proposition 4.38).

La section 4.6 relève de la culture générale. Dans la section 4.6.1, nous donnons un aperçu de la nécessité des axiomes qui définissent la mesure de Lebesgue, ce

†. Un espace euclidien a plus de propriétés remarquables qu'un espace normé, et un espace normé en a plus qu'un espace vectoriel.

‡. Autrement dit, la preuve de son *existence*.

qui est quelque peu marginal en théorie de la mesure, mais a intéressé de grands mathématiciens dans la première moitié du 20ᵉsiècle... et fait rêver (*paradoxe de Banach-Tarski*, théorème 4.43).

Bien plus important (en particulier pour la théorie des probabilités) est le sujet abordé dans la section 4.6.2 : la convergence des suites de fonctions. En particulier, le *théorème d'Egoroff (Egorov)* 4.46 fait un lien inattendu entre *convergence simple* et *convergence uniforme*.[†]

Compétences minimales attendues.

a) Utiliser les propriétés générales des mesures (propositions 4.1 et 4.2).

b) Reconnaître et utiliser les ensembles négligeables.

c) Connaître et utiliser les propriétés de la mesure de Lebesgue, notamment dans $\mathbb{R}$. ◇

4.1 Propriétés générales

Dans cette partie, $(X, \mathscr{T}, \mu)$ est un espace mesuré, et toutes les parties de X considérées (A, B, A_j,...) *appartiennent à* $\mathscr{T}$.

Toutes les propriétés démontrées restent valables si on a une mesure sur un clan, à condition que les unions et intersections considérées soient encore dans le clan.

4.1 Proposition. Nous avons

a) Si $A \subset B$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$. (C'est la propriété de *monotonie* de μ.)
Si, de plus, $\mu(B) < \infty$, alors $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$ et $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

b) $\mu(A_0 \cup \ldots \cup A_k) \leq \sum_{n=0}^{k} \mu(A_n)$. Si les A_n sont d. d. d., alors l'inégalité devient égalité. Cette dernière propriété est l'*additivité* de μ.

c) $\mu(\cup_{n=0}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n)$. C'est la propriété de *sous-additivité* de μ.

d) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$. En particulier, si $\mu(A \cap B) < \infty$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.

4.2 Proposition. Nous avons

a) (Théorème de la suite croissante). Si $A_n \nearrow A$, alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

†. Rappelons l'implication « convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple ». Le théorème d'Egoroff donne « presque » l'implication opposée.

b) (Théorème de la suite décroissante). Si $A_n \searrow A$ et si, *de plus*, $\mu(A_0) < \infty$, alors $\mu(A_n) \to \mu(A)$.

Exercices

4.3 Exercice. Soit μ la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$. Si $A_n := \{m\ ;\ m \geq n\}$, alors $A_n \searrow \emptyset$, mais $\mu(A_n) \not\to \mu(\emptyset)$.

Conclusion ? $\diamond$

4.4 Exercice.

a) Montrer que, si $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) < \infty$, alors

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

b) Que devient cette formule dans le cas particulier de la mesure de comptage ? $\diamond$

4.5 Exercice. Soient μ une mesure sur le clan (ou la tribu) $\mathscr{C}$ et $A \in \mathscr{C}$.

a) La fonction $\mu_A : \mathscr{C} \to [0, \infty]$, $\mu_A(B) := \mu(A \cap B)$, $\forall\, B \in \mathscr{C}$, est une mesure sur $\mathscr{C}$.

b) Soit $\mathscr{C}_A$ le clan induit par $\mathscr{C}$ sur A (voir l'exercice 1.36). Montrer que la restriction de μ à $\mathscr{C}_A$ est une mesure. $\diamond$

4.6 Exercice (La limite d'une suite croissante de mesures est une mesure)**.** Soit $(\mu_j)_j$ une suite de mesures sur le même clan $\mathscr{C}$. Supposons que $\mu_j(A) \leq \mu_{j+1}(A)$, $\forall\, j$, $\forall\, A \in \mathscr{C}$.

Posons $\mu(A) := \lim \mu_j(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{C}$.

Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{C}$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 4.1.

a) Nous avons $B = A \sqcup (B \setminus A) \sqcup \emptyset \sqcup \ldots \sqcup \emptyset \sqcup \ldots$, d'où $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$. Dans le cas particulier où $\mu(B) < \infty$, nous avons également $\mu(B \setminus A) < \infty$ (justifier), d'où $\mu(A) = \mu(B) - \mu(B \setminus A)$. De même, $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

b) Posons $B_0 := A_0$ et, pour $1 \leq n \leq k$, $B_n := A_n \setminus (A_0 \cup \ldots \cup A_{n-1})$. Les B_n sont d. d. d. et, de plus, $B_n \subset A_n$ et $\cup_n A_n = \sqcup_n B_n$. Il s'ensuit que

$$\mu(A_0 \cup \ldots \cup A_k) = \mu(B_0 \sqcup \ldots \sqcup B_k \sqcup \emptyset \sqcup \ldots \sqcup \emptyset \sqcup \ldots) = \sum_{n=0}^{k} \mu(B_n) \leq \sum_{n=0}^{k} \mu(A_n).$$

Dans le cas particulier où les A_n sont d. d. d., nous avons $B_n = A_n$, et l'inégalité devient égalité.

c) Même preuve que pour l'item b), sauf qu'il n'y a plus besoin d'ajouter des $\emptyset$.

d) Si $\mu(A) = \infty$, alors $\mu(A \cup B) = \infty$, et l'égalité est claire.
Supposons $\mu(A) < \infty$, ce qui entraîne $\mu(A \cap B) < \infty$ (justifier).
Nous avons

$$\mu(A) = \mu((A \backslash B) \sqcup (A \cap B)) = \mu(A \backslash B) + \mu(A \cap B),$$

d'où $\mu(A \backslash B) = \mu(A) - \mu(A \cap B)$.
En utilisant cette dernière égalité, nous obtenons

$$\mu(A \cup B) = \mu((A \backslash B) \sqcup B) = \mu(A \backslash B) + \mu(B) = \mu(A) - \mu(A \cap B) + \mu(B),$$

ce qui donne l'égalité désirée. CQFD

Démonstration de la proposition 4.2.

a) Posons $B_0 := A_0$ et, pour $n \geq 1$, $B_n := A_n \backslash A_{n-1}$. Alors les B_n sont d. d. d. et $\sqcup_n B_n = A$.
Par ailleurs, nous avons $A_n = B_0 \sqcup \ldots \sqcup B_n$.
Par conséquent,

$$\mu(A) = \sum_{k \geq 0} \mu(B_k) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \mu(B_k) = \lim_n \mu(B_0 \sqcup \ldots \sqcup B_n) = \lim_n \mu(A_n).$$

b) Nous avons $(A_0 \backslash A_n) \nearrow (A_0 \backslash A)$, d'où $\lim_n \mu(A_0 \backslash A_n) = \mu(A_0 \backslash A)$.
Ceci donne (via la proposition 4.1 a)) $\mu(A_0) - \mu(A_n) \to \mu(A_0) - \mu(A)$, d'où la conclusion. CQFD

4.2 Mesure complétée

Dans cette partie, nous nous donnons un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Les parties A de X considérées ci-dessous *ne sont pas nécessairement dans* $\mathscr{T}$. Nous introduisons la notion d'ensemble *négligeable* et montrons comment « rajouter » ces ensembles à une tribu donnée. Contrairement à la notion d'ensemble *mesurable*, qui repose sur une *tribu*, celle d'ensemble *négligeable* est relative à une *tribu et* une *mesure*.

4.7 Définition (Ensemble négligeable)**.** Un ensemble $A \subset X$ est *négligeable* s'il existe $B \in \mathscr{T}$ tel que $A \subset B$ et $\mu(B) = 0$.

S'il n'est pas clair qui est μ, on précise : A est μ-négligeable.

4.8 Remarque. La question « A est-il négligeable ? » n'a pas de sens si on ne connaît pas μ : la réponse dépend de μ. Voir les remarques 1.19 et 3.4 a). $\diamond$

4.9 Définition (Tribu complétée)**.** La *tribu complétée* engendrée par $\mathscr{T}$ et μ est la tribu $\overline{\mathscr{T}}$ engendrée par $\mathscr{T}$ et les parties négligeables de X.

Donc

$$\overline{\mathscr{T}} := \mathscr{T}(\{A\,;\ A \in \mathscr{T} \text{ ou } A \text{ négligeable}\}).$$

4.10 Remarque. $\overline{\mathscr{T}}$ dépend à la fois de $\mathscr{T}$ et de μ. ◇

Le résultat suivant décrit tous les éléments de $\overline{\mathscr{T}}$.

4.11 Proposition. Nous avons

$$\begin{aligned}\overline{\mathscr{T}} = \{A \subset X\ ;\ \exists\, B_A, C_A \in \mathscr{T} \text{ tels que}\\ B_A \subset A \subset C_A \text{ et } \mu(C_A \backslash B_A) = 0\}.\end{aligned} \tag{4.1}$$ ◇

Dans ce qui suit, nous montrons que la mesure μ, définie sur $\mathscr{T}$, a une extension unique à $\overline{\mathscr{T}}$.

4.12 Définition (Tribu complète)**.** Une tribu $\mathscr{S}$ est *complète* par rapport à une mesure ν si A ν-négligeable $\Longrightarrow A \in \mathscr{S}$.

Symétriquement, si la propriété ci-dessus est satisfaite alors ν est *complète* par rapport à $\mathscr{S}$. ◇

4.13 Définition (Extension d'une mesure)**.** Soient μ_1, μ_2 des mesures sur les tribus (ou clans) $\mathscr{T}_1$, $\mathscr{T}_2$. μ_2 est une *extension* de μ_1 si :

i) $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{T}_2$.

ii) $\mu_2(A) = \mu_1(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}_1$. ◇

4.14 Proposition. μ admet une unique extension $\overline{\mu}$ à $\overline{\mathscr{T}}$.

$\overline{\mu}$ est la *complétée de* μ et est donnée par l'une des formules $\overline{\mu}(A) = \mu(B_A)$ ou $\overline{\mu}(A) = \mu(C_A)$. ◇

Exercices

4.15 Exercice. Soit $A \in \mathscr{T}$. Montrer que

$$A \text{ est négligeable} \iff \mu(A) = 0.$$ ◇

Cet exercice est fondamental ; il donne une boîte à outils pour montrer qu'un ensemble est négligeable.

4.16 Exercice (Opérations avec les ensembles négligeables)**.**

a) Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

b) Une union a. p. d. d'ensembles négligeables est négligeable. ◇

4.17 Exercice.
a) Nous avons $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu}$ et $\overline{\overline{\mathscr{T}}} = \overline{\mathscr{T}}$.
b) $\overline{\mathscr{T}}$ est complète par rapport à $\overline{\mu}$.
c) Une partie de X est μ-négligeable si et seulement si elle est $\overline{\mu}$-négligeable. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 4.11. Donnée une partie A de X, nous allons noter (s'ils existent) B_A et C_A deux ensembles de $\mathscr{T}$ tels que $B_A \subset A \subset C_A$ et $\mu(C_A \backslash B_A) = 0$.

Soit $\mathscr{U}$ le membre de droite de l'égalité à montrer, (4.1).

« $\supset$ » Si $A \in \mathscr{U}$, alors $A = B_A \cup (A \backslash B_A)$, avec $B_A \in \mathscr{T}$ et $A \backslash B_A$ (qui est contenu dans $C_A \backslash B_A$) négligeable ; d'où $A \in \overline{\mathscr{T}}$.

« $\subset$ » Il suffit (pourquoi ?) de vérifier que $\mathscr{U}$ est une tribu qui contient $\mathscr{T}$ et les ensembles négligeables.

Si $A \in \mathscr{T}$, il suffit de prendre $B_A = C_A := A$. Si A est négligeable, nous pouvons prendre $B_A := \emptyset$ et $C_A \in \mathscr{T}$ tel que $A \subset C_A$ et $\mu(C_A) = 0$. Ceci montre que $\mathscr{U}$ contient $\mathscr{T}$ et les ensembles négligeables. Il reste à montrer que $\mathscr{U}$ est une tribu.

i) Nous avons $\emptyset \in \mathscr{T}$, et donc $\emptyset \in \mathscr{U}$.
ii) Soit $A \in \mathscr{U}$. Nous avons $(C_A)^c \subset A^c \subset (B_A)^c$, avec $\mu((B_A)^c \backslash (C_A)^c) = \mu(C_A \backslash B_A) = 0$ (vérifier). Il s'ensuit que $A^c \in \mathscr{U}$.
iii) Soit $(A_n)_{n \geq 0} \subset \mathscr{U}$. Nous avons

$$\cup_{n \geq 0} B_{A_n} \subset \cup_{n \geq 0} A_n \subset \cup_{n \geq 0} C_{A_n},$$

et

$$\mu(\cup_{n \geq 0} C_{A_n} \backslash \cup_{n \geq 0} B_{A_n}) \leq \sum_{n \geq 0} \mu(C_{A_n} \backslash B_{A_n}) = 0$$

(vérifier). Il s'ensuit que $\cup_{n \geq 0} A_n \in \mathscr{U}$.

De i)–iii), $\mathscr{U}$ est une tribu. CQFD

Démonstration de la proposition 4.14. Notons d'abord que $\mu(C_A) = \mu(B_A) + \mu(C_A \backslash B_A)$, et donc $\mu(B_A) = \mu(C_A)$.

Montrons ensuite que la formule de l'énoncé ne dépend pas du choix de B_A et C_A. En effet, si $B_A^j \subset A \subset C_A^j$, avec $B_A^j, C_A^j \in \mathscr{T}$ et $\mu\left(C_A^j \backslash B_A^j\right) = 0$, $j = 1, 2$, alors $B_A^1 \subset C_A^2$, d'où

$$\mu(C_A^1) = \mu(B_A^1) \leq \mu(C_A^2) = \mu(B_A^2).$$

En permutant les indices, nous trouvons $\mu(C_A^1) = \mu(B_A^1) = \mu(B_A^2) = \mu(C_A^2)$.

Si $\overline{\mu}$ existe, nous devons avoir $\mu(B_A) \le \overline{\mu}(A) \le \mu(C_A)$, d'où $\overline{\mu}(A) = \mu(B_A) = \mu(C_A)$. Ceci montre à la fois l'unicité de $\overline{\mu}$ et le fait que $\overline{\mu}$ est donnée par les formules de l'énoncé.

Il reste à montrer que ces formules définissent une extension de μ.

Notons d'abord que, si $A_1, A_2 \in \overline{\mathscr{T}}$ et $A_1 \subset A_2$, alors $B_{A_1} \subset A_1 \subset A_2 \subset C_{A_2}$, d'où $\overline{\mu}(A_1) = \mu(B_{A_1}) \le \mu(C_{A_2}) = \overline{\mu}(A_2)$. Il s'ensuit que $\overline{\mu}$ est monotone.

i) Si $A \in \mathscr{T}$, alors nous pouvons prendre $B_A = C_A = A$, et donc $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$.
Il s'ensuit que $\overline{\mu}$ est une extension de μ, et qu'en particulier nous avons $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

ii) Enfin, si $(A_n)_n$ est une suite d. d. d. de $\overline{\mathscr{T}}$, alors nous avons (en utilisant la monotonie de $\overline{\mu}$)

$$\sum_n \overline{\mu}(A_n) = \sum_n \mu(B_{A_n}) = \mu(\sqcup_n B_{A_n}) = \overline{\mu}(\sqcup_n B_{A_n}) \le \overline{\mu}(\sqcup_n A_n),$$
$$\overline{\mu}(\sqcup_n A_n) \le \overline{\mu}(\cup_n C_{A_n}) = \mu(\cup_n C_{A_n}) \le \sum_n \mu(C_{A_n}) = \sum_n \overline{\mu}(A_n).$$

Des items i)–ii), $\overline{\mu}$ est une extension de μ et est une mesure. CQFD

4.3 Presque partout

Dans cette section, nous introduisons la notion de *presque partout* et étudions ses liens avec la *tribu* et *mesure complétées*.

4.18 Définition (Presque partout ; p. p.). Une propriété $P(x)$ est vraie *presque partout* (par rapport à μ, ou encore μ-presque partout, ou encore *p. p.* ou μ-p. p.) si l'ensemble des $x \in X$ tel que $P(x)$ soit fausse est μ-négligeable.

4.19 Proposition.

a) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable si et seulement s'il existe une fonction $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{T}$-mesurable telle que $f = g$ μ-p. p.
De même, $f : X \to \mathbb{R}^n$ est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable si et seulement s'il existe une fonction $g : X \to \mathbb{R}^n$ $\mathscr{T}$-mesurable telle que $f = g$ μ-p. p.

b) Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telles que $f = g$ μ-p. p. Alors f est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable si et seulement si g l'est.
De même si $f, g : X \to \mathbb{R}^n$. ◇

Le résultat suivant donne un aperçu de l'utilité des tribus complétées.

4.20 Proposition. Si $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, chaque f_n est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable, et $f_n \to f$ μ-p. p., alors f est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable. ◇

Exercices

4.21 Exercice. Pour la mesure de comptage, presque partout équivaut à partout. ◇

4.22 Exercice. Pour des fonctions f, g définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, la relation $f \sim g \iff f = g$ μ-p. p. est une équivalence. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 4.19. Nous considérons uniquement le cas des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. L'autre cas est similaire.

Commençons par établir une propriété des fonctions $\overline{\mathscr{T}}$-étagées. Soit f une fonction $\overline{\mathscr{T}}$-étagée. Donc $f = \sum_n a_n\chi_{A_n}$, avec $A_n \in \overline{\mathscr{T}}$, $a_n \in \mathbb{R}$, la somme comportant un nombre fini de termes.

Soit $B_n \subset A_n$, $B_n \in \mathscr{T}$, tel que $A_n \backslash B_n$ soit μ-négligeable (justifier l'existence de B_n en utilisant la proposition 4.11). Avec $g := \sum_n a_n\chi_{B_n}$, nous avons $f - g = \sum_n a_n\chi_{A_n\backslash B_n}$. Il s'ensuit que $f = g$ en dehors de l'ensemble $\cup_n(A_n\backslash B_n)$, qui est μ-négligeable (vérifier).

Conclusion : donnée une fonction f $\overline{\mathscr{T}}$-étagée, il existe une fonction $\mathscr{T}$-étagée g telle que $f = g$ en dehors d'un ensemble μ-négligeable C.

a) « $\implies$ » Soit f_n une suite de fonctions $\overline{\mathscr{T}}$-étagées telle que $f_n \to f$. Soient g_n $\mathscr{T}$-étagées et C_n μ-négligeables tels que $f_n = g_n$ en dehors de C_n.
En dehors de l'ensemble μ-négligeable $\cup_n C_n$, nous avons $g_n = f_n \to f$.
En définissant

$$A := \{x \in X\ ;\ (g_n(x))_n \text{ a une limite dans } \overline{\mathbb{R}}\}$$

et $g := \chi_A \lim_n g_n$, nous avons que g est $\mathscr{T}$-mesurable (voir la proposition 3.34) et $g = f$ en dehors de l'ensemble μ-négligeable $\cup_n C_n$.

« $\impliedby$ » Soit C un ensemble μ-négligeable tel que $f = g$ en dehors de C. Alors

$$g^{-1}(\infty)\backslash C \subset f^{-1}(\infty) \subset g^{-1}(\infty) \cup C,$$

ce qui montre que $f^{-1}(\infty) \in \overline{\overline{\mathscr{T}}} = \overline{\mathscr{T}}$.
De même, $f^{-1}(-\infty) \in \overline{\mathscr{T}}$ et $f^{-1}(B) \in \overline{\mathscr{T}}$ si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ (vérifier). Donc f est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable (théorème 3.5).

b) Nous avons (via l'exercice 4.22) f $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable$\iff \exists\, h$ $\mathscr{T}$-mesurable telle que $f = h$ μ-p. p.$\iff \exists\, h$ $\mathscr{T}$-mesurable telle que $g = h$ μ-p. p.$\iff g$ $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable. CQFD

Démonstration de la proposition 4.20. Soit $A \in \mathscr{T}$ négligeable tel que $f_n(x) \to f(x)$, $\forall\, x \notin A$. Alors $f_n\chi_{A^c} \to f\chi_{A^c}$. Il s'ensuit que $f\chi_{A^c}$ est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable, et donc f l'est (proposition 4.19 b)). CQFD

4.4 Classes particulières de mesures

Dans cette section, nous introduisons les principales classes de mesures : *finies*, *σ-finies*, *boréliennes*, *de Radon*, et donnons quelques-unes de leurs propriétés fondamentales.

4.23 Définition. Une mesure μ définie sur un clan (ou tribu) $\mathscr{C}$ est :

a) *finie* si $\mu(X) < \infty$ (et alors $\mu(A) < \infty$ pour tout $A \in \mathscr{C}$).

b) *σ-finie* s'il existe une suite $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$ telle que :

  i) $X = \cup_{n\geq 0} A_n$.

  ii) $\mu(A_n) < \infty$, $\forall\, n$.

c) *de probabilité* (ou probabilité tout court) si $\mu(X) = 1$.

Les mesures σ-finies joueront un rôle important entre autres dans le chapitre 8 (mesures produit et leur utilisation). Une première illustration de leur utilité est le résultat suivant d'unicité.

4.24 Proposition. Soient $\mathscr{C}$ un clan dans X et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{T}(\mathscr{C})$. Si :

i) $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ pour tout $A \in \mathscr{C}$.

ii) Il existe une suite $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$ telle que $\mu_1(A_n) < \infty$, $\forall\, n$, et $\cup_{n\geq 0} A_n = X$,

alors $\mu_1 = \mu_2$. $\diamond$

4.25 Définition. Soit (X, d) est un espace métrique.

a) Une mesure *borélienne* est une mesure $\mu : \mathscr{B}_X \to [0, \infty]$ sur les boréliens de X.

b) Une mesure *de Radon* dans $\mathbb{R}^n$ est une mesure borélienne μ dans $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu(K) < \infty$, $\forall\, K$ compact.
Même définition pour une mesure sur X, avec $X \subset \mathbb{R}^n$ ouvert ou fermé.

Si une mesure est à la fois borélienne et a des propriétés de finitude (voir les hypothèses du théorème 4.26), alors nous disposons de formules « explicites » pour calculer la mesure d'un borélien. Ceci est expliqué dans le résultat suivant, dont à la fois l'énoncé et la preuve sont relativement complexes.

4.26 Théorème. Soient (X, d) un espace métrique et μ une mesure borélienne sur X.

a) Si μ est finie, alors

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(F)\,;\ F \text{ fermé et } F \subset A\}\\ &= \inf\{\mu(U)\,;\ U \text{ ouvert et } U \supset A\},\ \forall\, A \in \mathscr{B}_X,\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(A) &= \sup\{\mu(F)\,;\ F \text{ fermé et } F \subset A\}\\ &= \inf\{\mu(U)\,;\ U \text{ ouvert et } U \supset A\},\ \forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_X.\end{aligned} \tag{4.3}$$

b) Si μ est σ-finie, alors

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F)\,;\, F \text{ fermé et } F \subset A\},\ \forall\, A \in \mathscr{B}_X, \tag{4.4}$$

$$\overline{\mu}(A) = \sup\{\mu(F)\,;\, F \text{ fermé et } F \subset A\},\ \forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_X. \tag{4.5}$$

c) S'il existe une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ d'ouverts de X telle que $X = \cup_{n\geq 0} U_n$ et $\mu(U_n) < \infty$, $\forall\, n$, alors nous avons (4.2)–(4.3).

d) S'il existe une suite $(K_n)_{n\geq 0}$ de compacts telle que $X = \cup_{n\geq 0} K_n$ et une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ d'ouverts de X telle que $X = \cup_{n\geq 0} U_n$ et $\mu(U_n) < \infty$, $\forall\, n$, alors

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(K)\,;\, K \text{ compact et } K \subset A\}\\ &= \inf\{\mu(U)\,;\, U \text{ ouvert et } U \supset A\},\ \forall\, A \in \mathscr{B}_X,\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(A) &= \sup\{\mu(K)\,;\, K \text{ compact et } K \subset A\}\\ &= \inf\{\mu(U)\,;\, U \text{ ouvert et } U \supset A\},\ \forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_X.\end{aligned} \quad \diamond \tag{4.7}$$

Un cas particulier important du théorème 4.26 est celui des mesures de Radon dans $\mathbb{R}^n$; il s'applique en particulier à la mesure de Lebesgue ν_n.

4.27 Corollaire. Si μ est une mesure *de Radon dans* $\mathbb{R}^n$, alors

$$\begin{aligned}\mu(A) &= \sup\{\mu(K)\,;\, K \text{ compact et } K \subset A\}\\ &= \inf\{\mu(U)\,;\, U \text{ ouvert et } U \supset A\},\ \forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n},\end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned}\overline{\mu}(A) &= \sup\{\mu(K)\,;\, K \text{ compact et } K \subset A\}\\ &= \inf\{\mu(U)\,;\, U \text{ ouvert et } U \supset A\},\ \forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}^n}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Énoncé analogue si nous remplaçons $\mathbb{R}^n$ par un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Une conséquence immédiate du théorème 4.26 est le résultat suivant d'unicité.

4.28 Corollaire. Si μ_1, μ_2 sont deux mesures de Radon dans $\mathbb{R}^n$ telles que $\mu_1(K) = \mu_2(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, alors $\mu_1 = \mu_2$.

Énoncé analogue si nous remplaçons $\mathbb{R}^n$ par un ouvert de $\mathbb{R}^n$. $\diamond$

Exercices

4.29 Exercice. Si μ est σ-finie, alors X est une union a. p. d. d'ensembles d. d. d. de mesure finie. $\diamond$

4.30 Exercice. La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ n'est pas finie, mais est σ-finie. $\diamond$

L'exercice suivant permet de mettre en place un raisonnement du type : « si une propriété P est vraie pour les mesures finies, alors elle l'est pour les mesures σ-finies ».

4.31 Exercice (Une mesure σ-finie est limite de mesures finies)**.** Soit μ une mesure σ-finie sur la tribu $\mathscr{T}$ de X. Soit $(X_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{T}$ avec $\mu(X_n) < \infty$, $\forall\, n$ et $X = \cup_n X_n$. Posons $\mu_n(A) := \mu(A \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_n))$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. Alors :
a) μ_n est une mesure finie, $\forall\, n$.
b) $\mu_n \nearrow \mu$ (c'est-à-dire $\mu_n(A) \nearrow \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$). $\diamond$

L'exercice qui suit sera utilisé dans la preuve du théorème 4.26.

4.32 Exercice. Soit (X, d) un espace métrique. Soit F un fermé de X. Soit

$$U_n := \{x \in X\,;\, d(x, F) < 1/n\},\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors U_n est un ouvert et $U_n \searrow F$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 4.24. Soit $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$ telle que $\mu_1(A_n) < \infty$, $\forall\, n$, et $\cup_{n\geq 0} A_n = X$. En remplaçant si nécessaire les A_n par $B_n := A_0 \cup \ldots \cup A_n$, nous pouvons supposer que $A_n \nearrow X$.

Dans un premier temps, réduisons le problème au cas des mesures finies.

Comme dans l'exercice 4.31, posons $\mu_j^n(A) := \mu_j(A \cap A_n)$, $A \in \mathscr{T}(\mathscr{C})$, $j = 1, 2$, $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, μ_1^n et μ_2^n vérifient les hypothèses i) et ii) de la proposition 4.24 (justifier) et, de plus, μ_1^n et μ_2^n sont finies (vérifier). Supposons montrée l'égalité $\mu_1^n = \mu_2^n$. Grâce au théorème de la suite croissante, nous obtenons $\mu_j = \lim_n \mu_j^n$, $j = 1, 2$ (justifier), et donc $\mu_1 = \mu_2$.

Ainsi, pour conclure il suffit de montrer que $\mu_1 = \mu_2$ sous l'hypothèse i), si, *de plus*, μ_1, μ_2 sont finies.

Soient μ_1, μ_2 deux mesures *finies* sur $\mathscr{C}$, vérifiant i). Soit

$$\mathscr{U} := \{A \in \mathscr{T}(\mathscr{C})\,;\, \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Nous avons $\mathscr{C} \subset \mathscr{U}$. Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est une classe monotone (et d'invoquer le théorème de la classe monotone). Ceci résulte en appliquant à μ_j, $j = 1, 2$, le théorème de la suite croissante, respectivement le théorème de la suite décroissante. (Vérifier l'application de ces deux théorèmes, notamment dans le cas de la suite décroissante). CQFD

Démonstration du théorème 4.26.

a) Posons, pour $A \subset X$,

$$\mu^f(A) := \sup\{\mu(F)\,;\, F \text{ fermé et } F \subset A\} = \sup\{\overline{\mu}(F)\,;\, F \text{ fermé et } F \subset A\},$$
$$\mu^o(A) := \inf\{\mu(U)\,;\, U \text{ ouvert et } U \supset A\} = \inf\{\overline{\mu}(U)\,;\, U \text{ ouvert et } U \supset A\}.$$

Nous avons (vérifier)

$$\begin{aligned} &\mu^f(A) \le \overline{\mu}(A) \le \mu^o(A),\ \forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_X,\ \text{ et en particulier} \\ &\mu^f(A) \le \mu(A) \le \mu^o(A), \forall\, A \in \mathscr{B}_X. \end{aligned} \tag{4.10}$$

Nous devons montrer que (*) $\overline{\mu}(A) = \mu^f(A) = \mu^o(A)$, $\forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_X$ et en particulier (**) $\mu(A) = \mu^f(A) = \mu^o(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_X$. Il suffit en fait de montrer (**). En effet, admettons (**). Donné $A \in \overline{\mathscr{B}}_X$, soient $B_A, C_A \in \mathscr{B}_X$ tels que $B_A \subset A \subset C_A$ et $\mu(C_A \backslash B_A) = 0$ (d'où $\mu(B_A) = \mu(C_A) = \overline{\mu}(A)$). Grâce à (**) (supposée vraie), nous avons

$$\begin{aligned} &\overline{\mu}(A) \ge \mu^f(A) \ge \mu^f(B_A) = \mu(B_A) = \overline{\mu}(A), \\ &\overline{\mu}(A) \le \mu^o(A) \le \mu^o(C_A) = \mu(C_A) = \overline{\mu}(A), \end{aligned}$$

ce qui implique (*).

Il reste donc à montrer (**). Soit $\mathscr{U} := \{A \in \mathscr{B}_X\,;\ \text{(**) est vraie}\}$. Pour établir (**), il suffit de montrer que $\mathscr{U}$ est une tribu contenant les fermés (vérifier).

L'axiome i) de la tribu est clair (justifier). Vérifions l'axiome ii). Pour commencer, notons que, si $A \in \mathscr{B}_X$, alors (justifier chaque égalité)

$$\begin{aligned} \mu^f(A^c) &= \sup\{\mu(F);\ F \text{ fermé et } F \subset A^c\} \\ &= \sup\{\mu(U^c);\ U \text{ ouvert et } U^c \subset A^c\} \\ &= \sup\{\mu(U^c);\ U \text{ ouvert et } U \supset A\} \\ &= \sup\{\mu(X) - \mu(U);\ U \text{ ouvert et } U \supset A\} \\ &= \mu(X) - \inf\{\mu(U);\ U \text{ ouvert et } U \supset A\} = \mu(X) - \mu^o(A), \end{aligned}$$

et, de même, $\mu^o(A^c) = \mu(X) - \mu^f(A)$.
Il s'ensuit que, si $A \in \mathscr{U}$, alors

$$\mu^f(A^c) = \mu(X) - \mu^o(A) = \mu(X) - \mu(A) = \mu(A^c),$$

et de même $\mu^o(A^c) = \mu(A^c)$, d'où $A^c \in \mathscr{U}$. L'axiome ii) d'une tribu est vérifié pour $\mathscr{U}$.

Soit maintenant une suite $(A_n)_{n\ge1} \subset \mathscr{U}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $A_n \in \mathscr{U}$, il existe un fermé $F_{n,\varepsilon}$ et un ouvert $U_{n,\varepsilon}$ avec

$$F_{n,\varepsilon} \subset A_n \subset U_{n,\varepsilon},\ \mu(F_{n,\varepsilon}) > \mu(A_n) - \varepsilon/2^{n+1} \text{ et } \mu(U_{n,\varepsilon}) < \mu(A_n) + \varepsilon/2^{n+1},$$

d'où

$$\mu(A_n \backslash F_{n,\varepsilon}) < \varepsilon/2^{n+1} \text{ et } \mu(U_{n,\varepsilon} \backslash A_n) < \varepsilon/2^{n+1}.$$

Posons $U^\varepsilon := \cup_{n\ge1} U_{n,\varepsilon}$ (qui est un ouvert) et $F^{N,\varepsilon} = \cup_{n=1}^N F_{n,\varepsilon}$ (qui est un fermé pour tout N). Nous avons

$$\begin{aligned} \mu^o(\cup_n A_n) \le \mu(U^\varepsilon) &= \mu(U^\varepsilon \backslash \cup_n A_n) + \mu(\cup_n A_n) \\ &= \mu((\cup_n U_{n,\varepsilon}) \backslash (\cup_n A_n)) + \mu(\cup_n A_n) \\ &\le \mu(\cup_n (U_{n,\varepsilon} \backslash A_n)) + \mu(\cup_n A_n) \\ &\le \sum_{n\ge1} \mu(U_{n,\varepsilon} \backslash A_n) + \mu(\cup_n A_n) \\ &< \varepsilon + \mu(\cup_n A_n)\,; \end{aligned} \tag{4.11}$$

au passage, nous avons utilisé l'inclusion (à justifier)

$$(\cup_{i\in I}B_i)\setminus(\cup_{i\in I}C_i)\subset\cup_{i\in I}(B_i\setminus C_i).$$

En faisant $\varepsilon\to 0$ dans (4.11) et en utilisant (4.10), nous obtenons (***) $\mu^o(\cup_n A_n)=\mu(\cup_n A_n)$.
De manière analogue au calcul précédent, nous avons $\mu((\cup_{n=1}^N A_n)\setminus F^{N,\varepsilon})<\varepsilon$, ce qui implique

$$\begin{aligned}\mu^f(\cup_n A_n)\ge\mu(F^{N,\varepsilon})&=\mu(\cup_{n=1}^N A_n)-\mu((\cup_{n=1}^N A_n)\setminus F^{N,\varepsilon})\\&>\mu(\cup_{n=1}^N A_n)-\varepsilon,\ \forall\,N\in\mathbb{N}^*,\ \forall\,\varepsilon>0.\end{aligned}\tag{4.12}$$

En faisant, dans (4.12), d'abord $\varepsilon\to 0$, puis $N\to\infty$, nous obtenons, grâce au théorème de la suite croissante, $\mu^f(\cup_n A_n)\ge\mu(\cup_n A_n)$. En utilisant (4.10), nous concluons à l'égalité (****) $\mu^f(\cup_n A_n)=\mu(\cup_n A_n)$.

De (***) et (****), nous déduisons que $\mathscr{U}$ vérifie l'axiome iii) d'une tribu, De ce qui précède, $\mathscr{U}$ est une tribu.

Pour compléter a), il reste à montrer que les fermés sont dans $\mathscr{U}$. Soit F un fermé. Nous avons $\mu^f(F)\ge\mu(F)$, d'où $\mu^f(F)=\mu(F)$.

Par ailleurs, soit $(U_n)_n$ la suite de l'exercice 4.32. Nous avons $\mu^o(F)\le\mu(U_n)$, $\forall\,n$, d'où $\mu^o(F)\le\lim\mu_n(U_n)=\mu(F)$ (car μ est finie, ce qui nous permet d'utiliser le théorème de la suite décroissante).

b) Comme expliqué au point précédent, il suffit de montrer que $\mu^f(A)\ge\mu(A)$, $\forall\,A\in\mathscr{B}_X$. Soit $(A_n)_{n\ge 0}\subset\mathscr{B}_X$ avec $\cup_{n\ge 0}A_n=X$ et $\mu(A_n)<\infty$, $\forall\,n$. Quitte à remplacer A_n par $B_n:=A_1\cup\ldots\cup A_n$, nous pouvons supposer que $A_n\nearrow X$.

Posons $\mu_n(A):=\mu(A\cap A_n)$, $\forall\,A\in\mathscr{B}_X$, $\forall\,n$. La mesure μ_n est finie (vérifier) et $\mu_n(A)\nearrow\mu(A)$, $\forall\,A\in\mathscr{B}_X$ (théorème de la suite croissante). Grâce au point a), nous avons

$$\mu^f(A)\ge\mu_n^f(A)=\mu_n(A),\ \forall\,A\in\mathscr{B}_X,\ \forall\,n\in\mathbb{N}^*.\tag{4.13}$$

En faisant $n\to\infty$ dans (4.13), nous obtenons $\mu^f(A)\ge\mu(A)$, comme désiré.

c) μ étant σ-finie, nous avons la conclusion du b). Il suffit donc de montrer que $\mu^o(A)\le\mu(A)$, $\forall\,A\in\mathscr{B}_X$. Quitte à remplacer U_n par $V_n:=U_1\cup\ldots\cup U_n$, nous pouvons supposer que $U_n\nearrow X$.

Posons $\mu_n(A):=\mu(A\cap U_n)$, $\forall\,n$, qui est une mesure finie. Posons $W_1:=U_1$ et, pour $n\ge 2$, $W_n:=U_n\setminus U_{n-1}$, de sorte que les W_n sont d. d. d., $X=\sqcup_{n\ge 0}W_n$ et $W_n\subset U_n$, $\forall\,n$.

Soit $A\in\mathscr{B}_X$. Soit $A_n:=A\cap W_n$, $\forall\,n$. Les A_n sont d. d. d. et $A=\sqcup_{n\ge 0}A_n$. Par ailleurs, nous avons $A_n\subset U_n$, d'où $\mu_n(A_n)=\mu(A_n)$. Il s'ensuit que $\mu(A)=\sum_n\mu_n(A_n)$.

Soit $\varepsilon>0$. De a), il existe un ouvert $V_{n,\varepsilon}$ tel que $V_{n,\varepsilon}\supset A_n$ et $\mu_n(V_{n,\varepsilon})<\mu_n(A_n)+\varepsilon/2^{n+1}$. L'ensemble $W_{n,\varepsilon}:=V_{n,\varepsilon}\cap U_n$ est un ouvert contenant A_n. Par ailleurs nous avons $\mu_n(V_{n,\varepsilon})=\mu(W_{n,\varepsilon})$.

Finalement, nous avons

$$\begin{aligned}\mu^o(A) \le \mu(\cup_n W_{n,\varepsilon}) \le \sum_n \mu(W_{n,\varepsilon}) \le \sum_{n\ge 0} (\mu_n(A_n) + \varepsilon/2^{n+1}) \\ = \mu(A) + \varepsilon, \forall\, \varepsilon > 0.\end{aligned} \tag{4.14}$$

Nous concluons en faisant $\varepsilon \to 0$ dans (4.14).

d) Soit $\mu^c(A) := \sup\{\mu(K)\,;\, K \text{ compact et } K \subset A\}$. Tenant compte du point c) et en raisonnant comme pour les points précédents, il s'agit de montrer que $\mu^c(A) \ge \mu(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_X$.

Nous pouvons supposer $K_n \nearrow X$ (justifier).

Dans un premier temps, montrons que $\mu^c(F) \ge \mu(F)$ pour tout fermé F. Pour ce faire, posons $L_n := F \cap K_n$, $\forall\, n$. Alors L_n est un compact et $L_n \nearrow F$; en particulier, $\mu(L_n) \nearrow \mu(F)$. Par ailleurs, nous avons $\mu^c(F) \ge \mu(L_n)$, $\forall\, n$. En passant cette inégalité à la limite sur n, nous obtenons (justifier) $\mu^c(F) \ge \mu(F)$.

Soit maintenant $A \in \mathscr{B}_X$. Si F est un fermé et $F \subset A$, alors $\mu^c(A) \ge \mu^c(F) \ge \mu(F)$. En prenant le $\sup$ sur F et en utilisant le point c), nous obtenons $\mu^c(A) \ge \mu^f(A) = \mu(A)$. CQFD

4.33 Remarque. Le schéma de la preuve du théorème 4.26 a)–c) est *typique* pour les raisonnements en théorie de la mesure. *Le cœur de la preuve consiste à montrer les propriétés des mesures finies. Pour ce faire, il est commode d'utiliser le théorème de la classe monotone.* Des hypothèses du type σ-finitude permettent par la suite de s'affranchir, à peu de frais, de l'hypothèse de finitude de la mesure. ◇

Démonstration du corollaire 4.27. Posons $K_j := \overline{B}(0,j)$ et $U_j := B(0,j)$, $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$. Alors $\cup_{j\ge 1} K_j = \cup_{j\ge 1} U_j = \mathbb{R}^n$. Comme $U_j \subset K_j$, nous avons $\mu(U_j) \le \mu(K_j) < \infty$. Nous concluons grâce au théorème 4.26 d). CQFD

Démonstration du corollaire 4.28. Vérifier ! CQFD

4.5 La mesure de Lebesgue

Dans cette section, nous définissons la mesure la plus importante, celle *de Lebesgue*, sans avoir, pour l'instant, les moyens de vérifier son existence.

4.34 Définition (Pavé de $\mathbb{R}^n$). Un *pavé de* $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, avec chaque I_j intervalle.

De manière intuitive, si P est un pavé on définit la mesure (« volume ») $m(P)$ de P comme le produit des longueurs des I_j (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

4.35 Théorème (Existence et propriétés de la mesure de Lebesgue)**.** Dans $\mathbb{R}^n$, il existe une unique mesure borélienne ν_n telle que, pour chaque pavé P, on ait $\nu_n(P) = m(P)$.

Cette mesure est la *mesure de Lebesgue* sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$.

De plus, ν_n a les propriétés suivantes :

a) ν_n est donnée, pour tout borélien A, par la formule

$$\nu_n(A) = \inf \left\{ \sum_{j\geq 0} m(P_j)\ ;\ P_j \text{ est un pavé de } \mathbb{R}^n,\ \forall\, j,\ A \subset \cup_{j\geq 0} P_j \right\}.$$

b) (Invariance par isométries) Si $\mathscr{R}$ est une isométrie de $\mathbb{R}^n$,† alors, pour $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, on a $\nu_n(\mathscr{R}(A)) = \nu_n(A)$.

c) Si $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$, alors $\nu_{n+m}(A \times B) = \nu_n(A) \cdot \nu_m(B)$.

4.36 Définition (Tribu de Lebesgue)**.**

a) La *mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{R}^n$ est la complétée de ν_n. Elle est notée λ_n.

b) La *tribu de Lebesgue dans* $\mathbb{R}^n$ est la tribu complétée de $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ par rapport à ν_n. Elle est notée $\mathscr{L}_n$.

Notons la forme particulière que prend la proposition 4.19 dans le cas de la mesure de Lebesgue.

4.37 Corollaire. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors f est Lebesgue mesurable si et seulement si il existe une fonction *borélienne* $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f = g$ ν_n-p. p.

De même si $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Le chapitre 5 est consacré à la construction de la mesure de Lebesgue ν_1. Nous y établirons aussi quelques-unes de ces propriétés ; des propriétés de ν_n, $n \geq 2$, seront obtenues dans le chapitre 8. Nous nous contentons ici de montrer quelques propriétés simples de ν_n.

4.38 Proposition.

a) ν_n est σ-finie.

b) ν_n est une mesure de Radon.

c) ν_n est unique.

†. Isométrie de $\mathbb{R}^n$: application $\mathscr{R} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $\|\mathscr{R}(x) - \mathscr{R}(y)\|_2 = \|x - y\|_2$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$. De manière équivalente, il existe U matrice orthogonale et $a \in \mathbb{R}^n$ tels que $\mathscr{R}(x) = Ux + a$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

d) ν_n est invariante par translations, c'est-à-dire $\nu_n(\{x\}+A) = \nu_n(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

e) ν_1 est donnée par la formule

$$\nu_1(A) = \inf\left\{\sum_j (b_j - a_j)\,;\; A \subset \cup_j]a_j, b_j[\right\},\ \forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}. \qquad \diamond \ (4.15)$$

Exercices

4.39 Exercice. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que $\nu_n(U) > 0$.

b) Soient $f, g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $f = g$ ν_n-p. p. Montrer que $f = g$. $\diamond$

4.40 Exercice.

a) λ_n est σ-finie.

b) λ_n est l'unique mesure sur $\mathscr{L}_n$ telle que $\lambda_n(P) = m(P)$ pour tout pavé de $\mathbb{R}^n$.

c) λ_1 est donnée par la formule

$$\lambda_1(A) = \inf\left\{\sum_j (b_j - a_j)\,;\; A \subset \cup_j]a_j, b_j[\right\},\ \forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}}. \qquad \diamond$$

4.41 Exercice (Exemple d'ensemble non borélien – et non Lebesgue mesurable)**.** Définissons, pour $x, y \in [0,1]$, la relation $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

   Nous pouvons donc écrire $[0,1]$ comme l'union de classes d'équivalence C_i, qui sont d. d. d. : $[0,1] = \sqcup_{i\in I} C_i$.

   Prenons, pour chaque i, un élément et un seul $x_i \in C_i$ et définissons $A := \{x_i\,;\, i \in I\}$.

   Posons $A_q := \{q\} + A$, $\forall\, q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$.

b) Montrer que $A_q \cap A_r = \emptyset$ si $q \neq r$.

c) Montrer que $[0,1] \subset \cup_{q\in\mathbb{Q}\cap[-1,1]} A_q \subset [-1,2]$.

d) En supposant A Lebesgue mesurable, calculer $\lambda_1(A_q)$ en fonction de $\lambda_1(A)$.

e) En déduire que $1 \leq \infty \cdot \lambda_1(A) \leq 3$.

f) Conclusion : A n'est pas Lebesgue mesurable. En particulier, A n'est pas borélien.

g) (On ne peut pas bien mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$) Si $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ est une mesure invariante par translations, alors soit $\mu = 0$, soit $\mu(I) = \infty$ pour tout intervalle non dégénéré $I \subset \mathbb{R}$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration du corollaire 4.37. Exercice ! CQFD

Démonstration de la proposition 4.38.

a) Nous avons $\mathbb{R}^n = \cup_{j=1}^{\infty}[-j,j]^n$, et $\nu_n([-j,j]^n) = (2j)^n < \infty$.

b) Si K est un compact de $\mathbb{R}^n$, alors il existe $M > 0$ tel que $\|x\|_\infty \leq M$, $\forall\, x \in K$; d'où $K \subset [-M,M]^n$. Il s'ensuit que $\nu_n(K) \leq \nu_n([-M,M]^n) = (2M)^n < \infty$.

c) Soit $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des unions finies de pavés de $\mathbb{R}^n$. Alors $\mathscr{C}_n$ est un clan et, de plus, tout élément de $\mathscr{C}_n$ s'écrit comme une union d. d. d. de pavés de $\mathbb{R}^n$ (exercice 1.35). Si μ est une mesure borélienne telle que $\mu(P) = m(P)$ pour tout pavé, alors, de ce qui précède, $\mu = \nu_n$ sur $\mathscr{C}_n$.
   Nous avons clairement $\mathscr{C}_n \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Par ailleurs, $\mathscr{C}_n$ contient les pavés ouverts, qui engendrent $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ (proposition 2.16 c)). Il s'ensuit que $\mathscr{T}(\mathscr{C}_n) \supset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, d'où $\mathscr{T}(\mathscr{C}_n) = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.
   La mesure ν_n étant σ-finie, nous obtenons de ce qui précède et de la proposition 4.24 que $\mu = \nu_n$, et donc que ν_n est unique.

d) Notons d'abord que $A \subset \mathbb{R}^n$ est borélien si et seulement si $\{x\} + A$ l'est ; ceci s'obtient de l'exercice 2.20 appliqué à l'homéomorphisme $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(y) := x + y$.
   Posons $\mu(A) := \nu_n(\{x\} + A)$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Alors μ est une mesure borélienne (vérifier) et $\mu(P) = \nu_n(P)$ pour tout pavé. Nous concluons comme au point c).

e) « $\leq$ » Si $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ et $A \subset \cup_j]a_j, b_j[$, alors

$$\nu_1(A) \leq \nu_1(\cup_j]a_j, b_j[) \leq \sum_j \nu_1(]a_j, b_j[) = \sum_j m(]a_j, b_j[) = \sum_j (b_j - a_j),$$

   d'où « $\leq$ » dans (4.15).
   « $\geq$ » Soit ℓ le membre de droite de (4.15). Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Rappelons que U est une union a. p. d. d'intervalles ouverts d. d. d. $]a_j, b_j[$ (exercice 2.23). Nous avons donc $\nu_1(U) = \sum_j (b_j - a_j)$.
   Si, de plus, $U \supset A$, nous déduisons de ce qui précède que $\nu_1(U) \geq \ell$. En utilisant ce fait et le corollaire 4.27, nous obtenons

$$\nu_1(A) = \inf\{\nu_1(U)\,;\, U \text{ ouvert et } U \supset A\} \geq \ell.$$

CQFD

4.6 Pour aller plus loin

4.6.1 Mesures invariantes par isométries

Il s'ensuit de l'exercice 4.41 qu'il n'est pas possible de construire sur $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ une mesure μ invariante par translations telle que la mesure de chaque intervalle non dégénéré et borné soit un nombre dans $]0, \infty[$. De même, il n'est pas possible de construire sur $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ une mesure invariante par isométries telle que la mesure de chaque ouvert non vide et borné soit un nombre dans $]0, \infty[$. Pour pouvoir espérer obtenir cette propriété, il faut donc exiger moins de μ. Les exigences minimales sont :

$$\mu : \{A \subset \mathbb{R}^n \,;\, A \text{ borné}\} \to [0, \infty[. \tag{4.16}$$
$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) \text{ si } A \cap B = \emptyset,\ \forall\, A, B \text{ bornés}. \tag{4.17}$$
$$\mu(\mathscr{R}(A)) = \mu(A),\ \forall\, A \text{ borné},\ \forall\, \mathscr{R} \text{ isométrie}. \tag{4.18}$$
$$\text{Il existe un } A \text{ borné tel que } \mu(A) > 0. \tag{4.19}$$

Nous avons les résultats suivants.

4.42 Théorème.

a) (Banach [2]) Pour $n = 1, n = 2$, il existe une fonction μ satisfaisant (4.16)–(4.19).

b) (Hausdorff [12]) Pour $n \geq 3$, il n'existe pas une telle μ. ◇

La partie b) du théorème 4.42 est devenue célèbre grâce au résultat suivant, hautement contre-intuitif, qui l'implique.

4.43 Théorème (Paradoxe de Banach-Tarski [1])**.** Soit B une boule dans $\mathbb{R}^n$, avec $n \geq 3$. Soit C une translatée de B telle que $B \cap C = \emptyset$.

Il existe $k \in \mathbb{N}^*$, une partition $B = B_1 \sqcup \ldots \sqcup B_k$ de B et des isometries $\mathscr{R}_1, \ldots, \mathscr{R}_k$ de $\mathbb{R}^n$ telles que : $\mathscr{R}_1(B_1) \sqcup \ldots \sqcup \mathscr{R}_k(B_k) = B \sqcup C$. ◇

Démonstration de « théorème 4.43 $\Longrightarrow$ théorème 4.42 b) ». Soit $n \geq 3$. Supposons, par l'absurde, l'existence de μ satisfaisant (4.16)–(4.19). Notons que si μ satisfait (4.16) – (4.17), alors $\mu(A_1 \cup \ldots \cup A_m) \leq \sum_j \mu(A_j)$, avec égalité si les ensembles bornés A_j sont d. d. d. (vérifier). Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $0 < \mu(A) < \infty$ et soit B une boule contenant A. Soit C une translatée de B telle que $B \cap C = \emptyset$. Avec les notations du paradoxe, nous avons

$$\begin{aligned}0 < 2\mu(A) \leq& 2\mu(B) = \mu(B) + \mu(C) = \mu(B \sqcup C) = \mu(\sqcup_{j=1}^k \mathscr{R}_j(B_j)) \\ &= \sum_{j=1}^k \mu(\mathscr{R}_j(B_j)) = \sum_{j=1}^k \mu(B_j) = \mu(\sqcup_{j=1}^k B_j) = \mu(B) < \infty,\end{aligned}$$

ce qui est impossible. CQFD

4.6.2 Convergences d'une suite de fonctions

Nous discutons ici, sans donner les démonstrations, les relations entre convergence simple, convergence uniforme et convergence « en mesure » d'une suite de fonctions. Sur ce sujet, une bonne référence est Halmos [11, Section 22].

Le cadre est celui des fonctions mesurables $f_n, f : X \to \mathbb{R}$, avec $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.†

4.44 Définition.

a) $f_n \to f$ *en mesure* si pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X\,;\, |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0.$$

b) La suite $(f_n)_n$ est *de Cauchy en mesure* si pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons

$$\lim_{m,n\to\infty} \mu(\{x \in X\,;\, |f_n(x) - f_m(x)| \geq \varepsilon\}) = 0. \qquad \diamond$$

4.45 Définition.

a) $f_n \to f$ *presque uniformément* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A = A_\varepsilon \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$ et $f_n \to f$ uniformément sur $X \setminus A$.

b) La suite $(f_n)_n$ est *de Cauchy presque uniforme* si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un ensemble $A = A_\varepsilon \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$ et

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup\left(\{|f_n(x) - f_m(x)|\,;\, x \in X \setminus A\right\} = 0. \qquad \diamond$$

Le théorème d'Egoroff est à première vue étonnant ; à comparer à l'implication classique « convergence uniforme $\Longrightarrow$ convergence simple ».

4.46 Théorème (Théorème d'Egoroff)**.** Soit μ *finie*.

a) Si $f_n \to f$ p. p., alors $f_n \to f$ presque uniformément.
En particulier, « convergence simple $\Longrightarrow$ convergence presque uniforme » (si μ est finie).

b) Si $f_n \to f$ p. p., alors $(f_n)_n$ est de Cauchy presque uniforme. $\diamond$

Les implications opposées à celles données par le théorème d'Egoroff sont également vraies.

4.47 Proposition. Soit μ *finie*.

a) Si $f_n \to f$ presque uniformément, alors $f_n \to f$ p. p.

b) Si $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy presque uniforme, alors il existe f telle que $f_n \to f$ p. p. et presque uniformément. $\diamond$

En combinant les deux résultats précédents, nous obtenons donc, *si μ est finie*, l'équivalence :

$$\text{convergence p. p.} \iff \text{convergence presque uniforme}.$$

De même, *si μ est finie*, alors nous avons, cette fois-ci « à une sous-suite près », † l'équivalence entre convergence en mesure et convergence presque uniforme.

†. Pour simplifier les énoncés, nous supposons que les fonctions sont finies en tout point.

†. Nous rencontrerons une situation similaire pour le théorème *de convergence dominée* 7.2 et sa « réciproque », théorème 7.5, qui nécessite de passer à une sous-suite.

4.48 Proposition. Soit μ *finie.*

a) Si $f_n \to f$ presque uniformément, alors $f_n \to f$ en mesure.

b) Réciproquement, si $f_n \to f$ en mesure, alors *il existe une sous-suite* (f_{n_k}) telle que $f_{n_k} \to f$ p. p. et presque uniformément. $\diamond$

Dans l'esprit du théorème d'Egoroff, qui affirme que la convergence simple est « presqu'équivalente » à la convergence uniforme pour les mesures finies, notons la « presqu'équivalence » entre mesurabilité et continuité dans le cas des mesures boréliennes finies.

4.49 Théorème (Théorème de Vitali)**.** Soit μ une mesure borélienne *finie* sur un espace métrique X.

a) (Théorème de Vitali) ‡ Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne.
Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un borélien $A = A_\varepsilon$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$, avec f continue sur $X \backslash A$.

b) « Réciproquement », soit $f : X \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un borélien $A = A_\varepsilon$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$, avec f continue sur $X \backslash A$. Alors il existe une fonction borélienne $g : X \to \mathbb{R}$ telle que $f = g$ p. p. $\diamond$

Démonstration.

a) Nous allons montrer l'existence de A d'abord pour f fonction caractéristique, puis pour f étagée, ensuite pour f borélienne bornée et enfin pour f borélienne quelconque. †

Soient $B \in \mathscr{T}$, $f := \chi_B$ et $\varepsilon > 0$. Comme $\mu(X) < \infty$, il existe F fermé, U ouvert tels que $F \subset B \subset U$ et $\mu(U \backslash F) < \varepsilon$ (théorème 4.26). Posons $A := U \backslash F$. Nous avons $\mu(A) < \varepsilon$. Par ailleurs, χ_B est continue sur les fermés F et $X \backslash U$ (vérifier), donc sur $X \backslash A = F \sqcup (X \backslash U)$ (justifier).

Soit f étagée, $f = \sum_j b_j \chi_{B_j}$. Soit $A_j \in \mathscr{T}$ satisfaisant $\mu(A_j) < \varepsilon/2^{j+1}$ et χ_{B_j} continue sur $X \backslash A_j$. Si $A := \cup_j A_j$, alors $\mu(A) < \varepsilon$ et f est continue sur $X \backslash A$ (vérifier).

Soit f borélienne bornée. Soit $(f_j)_j$ une suite de fonctions étagées telle que $f_j \to f$ uniformément. ‡ Soit $A_j \in \mathscr{T}$ avec $\mu(A_j) < \varepsilon/2^{j+1}$ et f_j continue sur $X \backslash A_j$. Si $A := \cup_j A_j$, alors $\mu(A) < \varepsilon$ et chaque f_j est continue sur $X \backslash A$. Par convergence uniforme, f est continue sur $X \backslash A$.

Enfin, soit $f : X \to \mathbb{R}$ borélienne. Soit $g := \arctan f : X \to]-\pi/2, \pi/2[$. La fonction g est borélienne bornée. Soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$, avec g continue sur $X \backslash A$. Comme $f = \tan g$, f est continue sur $X \backslash A$.

‡. Plutôt connu comme théorème de Lusin (Louzine). Prouvé par Vitali, il fut redécouvert par Lusin sous la forme suivante (sur $[0,1]$) : si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est borélienne et $\varepsilon > 0$, alors il existe $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et $A \subset [0,1]$ borélien tels que $\nu_1(A) < \varepsilon$ et $f = g$ sur $[0,1] \backslash A$.

†. Sans le nommer, nous faisons un raisonnement par classes monotones, version fonctions au lieu d'ensembles. Pour l'analogue du théorème de la classe monotone dans ce contexte, voir par exemple Barbe et Ledoux [3, Théorème I.3.5].

‡. Pour justifier l'existence de la suite $(f_j)_j$, il faut examiner la preuve du théorème 3.5.

b) Soit A_j tel que $\mu(A_j) < 1/(j+1)$, avec f continue sur $X\backslash A_j$. Posons $f_j := f_{|X\backslash A_j} : A_j \to \mathbb{R}$, $A := \cap_j A_j$, $g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \in X\backslash A \\ 0, & \text{si } x \in A \end{cases}$.

L'ensemble A est borélien et $\mu(A) = 0$ (vérifier), d'où $f = g$ p. p. Comme

$$X\backslash A = X\backslash \cap_j A_j = \cup_j (X\backslash A_j),$$

nous avons, pour tout $B \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ tel que $0 \notin B$,

$$\begin{aligned} g^{-1}(B) &= \{x \in X\,; g(x) \in B\} = \{x \in X\backslash A\,;\, g(x) \in B\} \\ &= \{x \in \cup_j (X\backslash A_j)\,;\, g(x) \in B\} = \cup_j \{x \in X\backslash A_j\,;\, g(x) \in B\} \\ &= \cup_j (f_j)^{-1}(B). \end{aligned}$$

De même, si $0 \in B$, alors

$$g^{-1}(B) = A \cup \cup_j (f_j)^{-1}(B).$$

Dans les deux cas, nous avons $g^{-1}(B) \in \mathscr{B}_X$ (vérifier), et donc g est borélienne. CQFD

Chapitre 5

Constructions de mesures

5.0 Aperçu

La section 5.1 est consacrée à la construction de la *mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{R}$. Comme nous allons le voir, le cœur de la preuve consiste à construire la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$; le reste est « automatique ». La construction est celle « historique » ; les constructions plus conceptuelles présentes souvent dans les textes reposent sur la notion de *mesure extérieure* et les *théorèmes de Carathéodory* (section 5.2.2), qui sont une relecture de la preuve de Lebesgue.

Pour le « même prix » que la construction de la mesure de Lebesgue, nous obtenons les *mesures de Stieltjes* (section 5.2.1), que nous n'utiliserons pas dans ce texte, mais qui sont très utilisées en théorie des probabilités, théorie du signal ou théorie analytique des nombres.

Enfin, nous évoquons (sans détails) dans la section 5.2.3 la belle idée de Hausdorff, consistant à décrire, par une même formule, la longueur, l'aire, le volume, et bien plus (les mesures fractionnaires).

5.1 Construction de la mesure de Lebesgue

Nous cherchons à montrer l'*existence* de la mesure ν_n comme dans le théorème 4.35. Rappelons que son *unicité* est acquise, voir la proposition 4.38 c). Comme nous l'avons remarqué, il est commode de travailler dans un premier temps avec des mesures finies, puis de s'affranchir de la finitude. Nous allons donc construire la mesure de Lebesgue d'abord sur un pavé borné P. Plus spécifiquement :

1. Nous allons construire la mesure de Lebesgue sur $]0,1[^n$. La construction sera analogue sur toute autre pavé.

2. La mesure de Lebesgue sur les pavés permet de construire la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$.

Il est commode – mais pas indispensable – d'utiliser des propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann lors de l'étape 1. Afin de ne pas perdre en chemin le lecteur qui connaît l'intégrale de Riemann dans $\mathbb{R}$, mais pas dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$, nous allons prendre uniquement $n = 1$ dans ce qui suit. Une fois construite la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}$, son existence dans $\mathbb{R}^n$ est démontrée dans le chapitre 8. Il est néanmoins possible de se passer de la technologie développée dans le chapitre 8 et de montrer l'existence de μ_n en adaptant aux dimensions ≥ 2 les preuves présentées dans la section 5.1.4 (voir par exemple Stein et Shakarchi [20, Chapitre 1]).

5.1.1 Construction de la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$

Posons, pout tout intervalle I d'extrémités $a \leq b$, $m(I) := b - a$. Nous avons vu (proposition 4.38, exercice 4.40) que, si la mesure de Lebesgue λ_1 existe, alors elle est donnée par la formule

$$\lambda_1(A) = \inf \left\{ \sum_j m(I_j)\,;\ I_j \text{ intervalle ouvert, } \forall\, j,\ A \subset \cup_j I_j \right\},\ \forall\, A \in \overline{\mathscr{B}}_{\mathbb{R}}.$$

Posons, pour $A \subset]0,1[$,

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_j m(I_j)\,;\ I_j \text{ intervalle ouvert, } \forall\, j,\ A \subset \cup_j I_j \right\}. \tag{5.1}$$

Nous devons montrer que $m^* = \lambda_1$ sur la tribu de Lebesgue (de $]0,1[$). Mais il se trouve que l'existence de cette tribu repose sur l'existence de la mesure de Lebesgue, dont l'existence n'est pas encore acquise !

L'idée suivante, due à Lebesgue, permet d'identifier les candidats aux membres de la tribu. Si $m^* = \nu_1 = m$ sur les intervalles et si A est Lebesgue mesurable, alors $A^c =]0,1[\setminus A$ l'est aussi, d'où $m^*(A) + m^*(A^c) = m^*(]0,1[) = m(]0,1[) = 1$. Posons alors

$$\mathscr{T} := \{A \subset]0,1[\,;\ m^*(A) + m^*(A^c) = 1\}. \tag{5.2}$$

Nous avons alors le résultat suivant.

5.1 Théorème (Lebesgue)**.**

a) $\mathscr{T}$ est une tribu.

b) $\mathscr{T}$ contient $\mathscr{B}_{]0,1[}$.

c) La restriction de m^* à $\mathscr{T}$ est une mesure.

d) $m^*(I) = m(I)$ pour tout intervalle $I \subset]0,1[$.

e) $\mathscr{T}$ est la complétée de $\mathscr{B}_{]0,1[}$ par rapport à m^*.

En particulier, la restriction de m^* à $\mathscr{B}_{]0,1[}$ est une mesure borélienne telle que $m^*(I) = m(I)$ pour tout intervalle $I \subset]0,1[$. $\diamond$

Nous admettons pour l'instant ce théorème.

5.1.2 Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$

Soit μ_j la mesure borélienne qui vérifie l'analogue du théorème 5.1 sur $]-j,j[$, $j \in \mathbb{N}^*$. Posons $\xi_j(A) := \mu_j(A \cap]-j,j[)$, $\forall\, j$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. La mesure ξ_j est borélienne, et elle coïncide avec m pour les intervalles de $]-j,j[$ (vérifier).

Par unicité de la mesure de Lebesgue sur $]-j,j[$, nous avons $\mu_{j+1}(A) = \mu_j(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{]-j,j[}$. Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\xi_{j+1}(A) =& \mu_{j+1}(A \cap]-j-1,j+1[) \geq \mu_{j+1}(A \cap]-j,j[)\\ =& \mu_j(A \cap]-j,j[) = \xi_j(A),\ \forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.\end{aligned}$$

Ainsi, nous pouvons définir

$$\mu(A) := \lim_j \xi_j(A) = \lim_j \mu_j(A \cap]-j,j[),\ \forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}},$$

qui est une mesure (exercice 4.6).

5.2 Proposition. μ est la mesure de Lebesgue ν_1 sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. $\diamond$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\mu(I) = m(I)$ pour tout intervalle I (justifier). Si I est borné, alors $I \subset]-j,j[$ pour j suffisamment grand, et donc $\xi_j(I) = \mu_j(I) = m(I)$ pour un tel j ; d'où $\mu(I) = m(I)$. Si I est non borné, alors $\mu(I) \geq \mu(J) = m(J)$ pour tout J borné avec $J \subset I$. En prenant le sup sur tous ces J, nous obtenons $\mu(I) = \infty = m(I)$. CQFD

À partir de ν_1, nous obtenons la tribu complétée $\mathscr{L}_1$ et la mesure complétée λ_1. Le lien avec les μ_j est le suivant.

5.3 Exercice. Soit $\mathscr{T}_j$ la complétée de $\mathscr{B}_{]-j,j[}$ par rapport à μ_j.

Soit $A \subset \mathbb{R}$. Nous avons $A \in \mathscr{L}_1 \iff A \cap]-j,j[\in \mathscr{T}_j$, $\forall\, j \geq 1$. $\diamond$

5.1.3 Construction de la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$

La mesure de Lebesgue ν_1 est σ-finie et satisfait $\nu_1(I) = m(I)$ pour tout intervalle I. Il existe alors une et une seule mesure borélienne ν_n sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\nu(I_1 \times \cdots \times I_n) = m(I_1) \ldots m(I_n)$, $\forall\, I_1, \ldots, I_n$ intervalles dans $\mathbb{R}$ (voir chapitre 8).

5.1.4 Démonstration du théorème 5.1

Pour faciliter la lecture, la preuve est découpée en petites étapes préliminaires (lemmes), faciles à montrer et comprendre. Elles seront « assemblées » lors de la preuve proprement dite du théorème.

Les ingrédients les plus importants de la preuve sont les lemmes 5.6 (qui repose sur un argument topologique : les intervalles fermés bornés sont compacts) et 5.11.

Nous allons travailler ici uniquement avec des parties $A, B \ldots$ de $]0,1[$. Les notions de fermé et complémentaire s'entendent par rapport à $]0,1[$.

Notons que, si $A \subset \cup_j I_j$, alors $A \subset \cup_j (I_j \cap]0,1[)$. Par ailleurs, nous avons $\sum m(I_j \cap]0,1[) \leq \sum m(I_j)$. Il s'ensuit que, dans (5.1), il suffit de considérer des intervalles $I_j \subset]0,1[$ (justifier).

5.4 Lemme.

a) $m^*(\emptyset) = 0$.

b) m^* est monotone, c'est-à-dire $m^*(A) \leq m^*(B)$, $\forall\, A \subset B$.

c) $m^*(\cup_j A_j) \leq \sum_j m^*(A_j)$, pour toute suite $(A_j) \subset]0,1[$.

d) $m^*(A) \leq 1$, $\forall\, A$. ◇

Démonstration. Les propriétés a), b), d) sont claires (vérifier).

c) Soit $\varepsilon > 0$. Pour chaque $j \geq 1$, il existe une suite d'intervalles ouverts $(I_k^j)_k$ avec $A_j \subset \cup_k I_k^j$ et

$$\sum_k m(I_k^j) < m^*(A_j) + \varepsilon/2^{j+1}.$$

La famille $(I_k^j)_{j,k}$ est dénombrable (proposition 1.13). Si nous la listons sous la forme $(L_n)_{n\geq 0}$, alors pour toute somme finie nous avons

$$\sum_{n=0}^{N} m(L_n) \leq \sum_j (m^*(A_j) + \varepsilon/2^{j+1}),$$

d'où

$$\sum_{n\geq 0} m(L_n) \leq \sum_j m^*(A_j) + \varepsilon.$$

Comme $\cup_j A_j \subset \cup_{n\geq 0} L_n$, nous obtenons $m^*(\cup_j A_j) \leq \sum_j m^*(A_j) + \varepsilon$. Nous concluons en faisant $\varepsilon \to 0$. CQFD

5.5 Lemme. $m^*(A) = \inf\{m^*(U)\,;\, U \text{ ouvert et } A \subset U\}$. ◇

Démonstration.
« $\leq$ » est clair, car $m^*(A) \leq m^*(U)$ pour tout U comme ci-dessus.

« $\geq$ » Soit $\varepsilon > 0$ et soient I_j ouverts avec $A \subset \cup_j I_j$ et $\sum_j m(I_j) < m^*(A) + \varepsilon$. Soit $U := \cup_j I_j$. Alors U est ouvert, $A \subset U$ et (du point c) du lemme 5.4)

$$m^*(U) = m^*(\cup_j I_j) \leq \sum_j m(I_j) < m^*(A) + \varepsilon.$$ CQFD

Le premier résultat clé dans la preuve du théorème 5.1 est le suivant.

5.6 Lemme. Si $(L_k)_k$ est une famille a. p. d. d'intervalles d. d. d., alors $m^*(\sqcup_k L_k) = \sum_k m(L_k)$.

En particulier, si $I \subset]0,1[$ est un intervalle, alors $m^*(I) = m(I)$.

Cas particuliers : $m^*(\emptyset) = 0$ et $m^*(]0,1[) = 1$. $\diamond$

Démonstration. Quitte à rajouter de intervalles vides, nous pouvons supposer qu'il y a une infinité (dénombrable) d'intervalles, indexés $(L_k)_{k\geq 1}$.

« $\leq$ » Pour chaque intervalle borné L et chaque $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle ouvert J avec $L \subset J$ et $m(J) < m(L) + \varepsilon$ (vérifier). Considérons, pour chaque k, un intervalle ouvert I_k tel que $L_k \subset I_k$ et $m(I_k) < m(L_k) + \varepsilon/2^{k+1}$. Alors $\cup_{k\geq 1} L_k \subset \cup_{k\geq 1} I_k$ et $\sum_{k\geq 1} m(I_k) \leq \sum_{k\geq 1} m(L_k) + \varepsilon$, d'où (en faisant $\varepsilon \to 0$) $m^*(\sqcup_{k\geq 1} L_k) \leq \sum_{k\geq 1} m(L_k)$.

« $\geq$ » Il suffit de montrer cette inégalité pour un nombre fini d'intervalles compacts dans $]0,1[$. En effet, supposons cette inégalité établie pour les unions finies d'intervalles compacts. Pour chaque intervalle L et chaque $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact C avec $L \supset C$ et $m(C) > m(L) - \varepsilon$ (vérifier).[†] Considérons, pour tout k, un intervalle compact C_k avec $L_k \supset C_k$ et $m(C_k) > m(L_k) - \varepsilon/2^{k+1}$.
Pour tout n fini, nous avons alors (grâce à l'inégalité « $\geq$ », supposée vraie pour les C_k)

$$m^*(\sqcup_{k\geq 1} L_k) \geq m^*(\sqcup_{k=1}^n C_k) \geq \sum_{k=1}^n m(C_k) > \sum_{k=1}^n m(L_k) - \varepsilon.$$

En faisant $n \to \infty$ et $\varepsilon \to 0$, nous obtenons « $\geq$ ».

Nous avons donc réduit le lemme à l'inégalité suivante : si $C_1, \ldots, C_n$ sont des intervalles compacts d. d. d., alors (*) $m^*(\sqcup_{k=1}^n C_k) \geq \sum_{k=1}^n m(C_k)$.

Soit $C := C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_n$. Soient I_j, $j \geq 1$, des intervalles ouverts tels que $C \subset \cup_j I_j$. Pour obtenir (*), il suffit de montrer (**) $\sum_{k=1}^n m(C_k) \leq \sum_j m(I_j)$ (justifier).

C étant compact, il existe N tel que $C \subset \cup_{j=1}^N I_j$. Il s'ensuit (vérifier) que

$$\sum_{k=1}^n \chi_{C_k} = \chi_C \leq \sum_{j=1}^N \chi_{I_j}. \tag{5.3}$$

†. Rappelons que nous travaillons dans $]0,1]$, et que L est borné.

Notons que, pour tout intervalle $I \subset]0,1[$ la fonction caractéristique χ_I est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, donc intégrable Riemann sur $[0,1]$. Par ailleurs, nous avons

$$\int_0^1 \chi_I(x)\,dx = m(I). \tag{5.4}$$

En utilisant (5.3), (5.4) et les propriétés de l'intégrale de Riemann, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n m(C_k) &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 \chi_{C_k}(x)\,dx = \int_0^1 \chi_C(x)\,dx \leq \sum_{j=1}^N \int_0^1 \chi_{I_j}(x)\,dx \\ &= \sum_{j=1}^N m(I_j) \leq \sum_{j\geq 1} m(I_j),\end{aligned}$$

d'où (**) et la conclusion du lemme. CQFD

Notons une conséquence immédiate du lemme. Comme tout ouvert U s'écrit comme une union a. p. d. d'intervalles ouverts d. d. d. L_k, nous avons $m^*(U) = \sum_k m(L_k)$.

5.7 Lemme. Soient U_n, U des ouverts avec $U_n \nearrow U$. Alors $m^*(U_n) \nearrow m^*(U)$. ◇

Démonstration. Nous avons clairement $m^*(U_n) \nearrow$ et $m^*(U_n) \leq m^*(U)$, $\forall\, n$ (vérifier), d'où $\lim_n m^*(U_n) \leq m^*(U)$.

Pour l'inégalité opposée, soit $\varepsilon > 0$.

Écrivons $U = \sqcup_j I_j$, avec I_j intervalle ouvert, $\forall\, j$, et $\sum_j m(I_j) = m^*(U) < \infty$ (justifier). Il existe N tel que $\sum_{j>N} m(I_j) < \varepsilon/2$. Il existe également des intervalles compacts $C_j \subset I_j$, $j = 1, \ldots, N$, avec $\sum_{j=1}^N m(C_j) > \sum_{j=1}^N m(I_j) - \varepsilon/2$ (vérifier).

Soit $C := \sqcup_{j=1}^N C_j$, qui est compact. Comme $U_n \nearrow U \supset C$, il existe n_0 avec $C \subset U_{n_0}$ (justifier). Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\lim_n m^*(U_n) &\geq m^*(U_{n_0}) \geq m^*(C) = \sum_{j=1}^N m(C_j) \\ &> \sum_{j=1}^N m(I_j) - \varepsilon/2 > \sum_{j\geq 1} m(I_j) - \varepsilon = m^*(U) - \varepsilon.\end{aligned}$$

CQFD

5.8 Lemme. Soient U, V des ouverts. Nous avons

$$m^*(U \cup V) + m^*(U \cap V) = m^*(U) + m^*(V).$$ ◇

Démonstration. Quitte à rajouter des intervalles vides, nous pouvons écrire $U = \sqcup_{j\geq 1} I_j$ et $V = \sqcup_{j\geq 1} L_j$, avec I_j, L_j intervalles ouverts.

Posons $U_n := \sqcup_{j=1}^n I_j$, $V_n := \sqcup_{j=1}^n L_j$. Alors $U_n \nearrow U$; propriétés analogues de V_n, $U_n \cup V_n$ et $U_n \cap V_n$ (vérifier).

$U_n, V_n, U_n \cup V_n$ et $U_n \cap V_n$ étant des unions finies et d. d. d. d'intervalles, il s'ensuit que l'égalité $m^*(A) = \int_0^1 \chi_A(x)\, dx$ est vraie pour chacun de ces ensembles (justifier, à l'aide du lemme 5.6). En combinant ce fait avec l'identité (à justifier)

$$\chi_{U_n \cup V_n} + \chi_{U_n \cap V_n} = \chi_{U_n} + \chi_{V_n},$$

nous obtenons que

$$m^*(U_n \cup V_n) + m^*(U_n \cap V_n) = m^*(U_n) + m^*(V_n). \tag{5.5}$$

Nous concluons grâce au lemme 5.7, en faisant $n \to \infty$ dans (5.5). CQFD

Une conséquence immédiate des lemmes 5.5 et 5.8 est la suivante.

5.9 Lemme. Si $A, B \subset]0, 1[$, alors

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \le m^*(A) + m^*(B). \qquad \diamond \tag{5.6}$$

Démonstration. Soient U, V ouverts tels que $A \subset U$ et $B \subset V$. Alors $A \cup B \subset U \cup V$ et $A \cap B \subset U \cap V$, d'où (en utilisant les lemme 5.5 et 5.8)

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \le m^*(U \cup V) + m^*(U \cap V) = m^*(U) + m^*(V). \tag{5.7}$$

En prenant, dans (5.7), l'inf sur U et V, et en utilisant à nouveau le lemme 5.5, nous obtenons (5.6). CQFD

Posons, conformément à la discussion heuristique du début du chapitre,

$$\mathscr{T} := \{A \subset]0, 1[\,;\, m^*(A) + m^*(A^c) = 1\}. \tag{5.8}$$

Notons que

$$1 = m^*(]0, 1[) = m^*(A \cup A^c) \le m^*(A) + m^*(A^c)$$

(lemme 5.4 c)), et donc une définition équivalente de $\mathscr{T}$ est

$$\mathscr{T} = \{A \subset]0, 1[\,;\, m^*(A) + m^*(A^c) \le 1\}.$$

Le lemme suivant donne les premiers exemples concrets d'ensembles dans $\mathscr{T}$.

5.10 Lemme. Si U est un ouvert, alors $U \in \mathscr{T}$. $\diamond$

Démonstration. Supposons d'abord que $U = \sqcup_{j=1}^n I_j$, avec I_j intervalles ouverts. Alors U^c est une union finie d'intervalles, et donc (en utilisant le lemme 5.6 et les propriétés de l'intégrale de Riemann) $m^*(U^c) = \int_0^1 \chi_{U^c}(x)\,dx$; de même pour U. Il s'ensuit que

$$m^*(U) + m^*(U^c) = \int_0^1 \chi_U(x)\,dx + \int_0^1 \chi_{U^c}(x)\,dx = \int_0^1 1\,dx = 1.$$

Soit maintenant U un ouvert quelconque. Nous pouvons donc écrire $U = \sqcup_{j\geq 1} I_j$, avec chaque I_j intervalle ouvert. Posons $U_n := \sqcup_{j=1}^n I_j$. De ce qui précède et du lemme 5.7,

$$m^*(U) = \lim_n m^*(U_n) = \lim_n (1 - m^*((U_n)^c)) \leq 1 - m^*(U^c).$$

Il s'ensuit que $m^*(U) + m^*(U^c) \leq 1$, d'où $U \in \mathscr{T}$. CQFD

Le deuxième résultat clé est le suivant.

5.11 Lemme. Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. $A \in \mathscr{T}$.
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U tel que $m^*(A\Delta U) < \varepsilon$. ◇

Démonstration.
« $1 \implies 2$ » Soient V, W des ouverts tels que $A \subset V$, $A^c \subset W$, $m^*(V) < m^*(A) + \varepsilon/2$, $m^*(W) < m^*(A^c) + \varepsilon/2$. Alors $V \cup W =]0,1[$ (vérifier), et donc (lemme 5.8)

$$\begin{aligned} m^*(V \cap W) &= m^*(V) + m^*(W) - m^*(V \cup W) = m^*(V) + m^*(W) - 1 \\ &< m^*(A) + m^*(A^c) + \varepsilon - 1 = \varepsilon. \end{aligned}$$

Prenons $U := V$. Nous avons

$$A\Delta U = V \setminus A = V \cap A^c \subset V \cap W,$$

d'où $m^*(A\Delta U) \leq m^*(V \cap W) < \varepsilon$.

« $2 \implies 1$ » Nous avons $A \subset U \cup (A\Delta U)$ (vérifier), d'où (lemme 5.4 c)) $m^*(A) \leq m^*(U) + \varepsilon$. De même, $A^c \subset U^c \cup (A^c \Delta U^c) = U^c \cup (A\Delta U)$ (vérifier), d'où $m^*(A) \leq m^*(U^c) + \varepsilon$. Grâce au lemme 5.10, il s'ensuit que

$$m^*(A) + m^*(A^c) \leq m^*(U) + m^*(U^c) + 2\varepsilon = 1 + 2\varepsilon.$$

En faisant $\varepsilon \to 0$, nous obtenons $A \in \mathscr{T}$. CQFD

Démonstration du théorème 5.1.
Étape 1. $\mathscr{T}$ est une tribu qui contient la tribu borélienne. Par définition de $\mathscr{T}$, si $A \in \mathscr{T}$ alors $A^c \in \mathscr{T}$.

Par ailleurs, $m^*(\varnothing) = 0$ et $m^*(]0,1[) = 1$ (lemme 5.6), d'où $\varnothing \in \mathscr{T}$.

Considérons maintenant une suite $(A_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{T}$. Pour chaque $n \geq 1$, soit U_n un ouvert tel que $m^*(A_n \Delta U_n) < \varepsilon/2^{n+1}$ (lemme 5.11). Posons $U := \cup_{n\geq 1} U_n$, qui est un ouvert. Nous avons $(\cup_{n\geq 1} A_n)\Delta(\cup_{n\geq 1} U_n) \subset \cup_{n\geq 1}(A_n \Delta U_n)$ (vérifier), d'où (lemme 5.4 c))

$$m^*((\cup_{n\geq 1} A_n)\Delta U) \leq \sum_{n\geq 1} m^*(A_n \Delta U_n) < \varepsilon.$$

Le lemme 5.11 donne $\cup_{n\geq 1} A_n \in \mathscr{T}$.

$\mathscr{T}$ est donc une tribu. Cette tribu contient les ouverts (lemme 5.10), donc la tribu borélienne.

Étape 2. m^* restreinte à $\mathscr{T}$ est une mesure, et restreinte à $\mathscr{B}_{]0,1[}$ est la mesure de Lebesgue. Le fait que m^* restreinte à $\mathscr{B}_{]0,1[}$ soit la mesure de Lebesgue suit du lemme 5.6 et de l'unicité de la mesure de Lebesgue (proposition 4.38 c)).

Pour montrer que m^* est une mesure sur $\mathscr{T}$, notons d'abord que $m^*(\emptyset) = 0$ (lemme 5.6). Il reste à montrer que, si $(A_j)_j \subset \mathscr{T}$ est une suite d. d. d., alors

$$m^*(\sqcup_j A_j) = \sum_j m^*(A_j). \tag{5.9}$$

L'inégalité « $\leq$ » suit du lemme 5.4 c). Pour l'inégalité opposée, il suffit de montrer

$$m^*(A \cup B) + m^*(A \cap B) \geq m^*(A) + m^*(B),\ \forall\, A, B \in \mathscr{T}. \tag{5.10}$$

En effet, admettons (5.10) pour l'instant. En utilisant cette propriété et le lemme 5.9, nous obtenons que

$$m^*(A \sqcup B) = m^*(A) + m^*(B),\ \forall\, A, B \in \mathscr{T} \text{ tels que } A \cap B = \emptyset, \tag{5.11}$$

puis, par récurrence sur n,

$$m^*(\sqcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n m^*(A_j),\ \forall\, n,\ \forall\, (A_j)_{j=1}^n \subset \mathscr{T} \text{ d. d. d.} \tag{5.12}$$

En utilisant (5.12) et la monotonie de m^* (lemme 5.4 b)), nous obtenons

$$m^*(\sqcup_{j\geq 1} A_j) \geq m^*(\sqcup_{j=1}^n A_j) = \sum_{j=1}^n m^*(A_j),\ \forall\, n,\ \forall\, (A_j)_{j\geq 1} \subset \mathscr{T} \text{ d. d. d.}, \tag{5.13}$$

d'où, en faisant $n \to \infty$ dans (5.13),

$$m^*(\sqcup_{j\geq 1} A_j) \geq \sum_{j\geq 1} m^*(A_j),\ \forall\, (A_j)_{j\geq 1} \subset \mathscr{T} \text{ d. d. d.} \tag{5.14}$$

Comme, par ailleurs, l'inégalité opposée à (5.14) est toujours vraie (lemme (5.4) c)), nous obtenons que l'axiome ii) de la mesure est vérifié.

Il reste donc à montrer (5.10). Du lemme 5.9, la définition (5.8) de $\mathscr{T}$ et le fait que $\mathscr{T}$ est une tribu (étape 1), nous obtenons (justifier)

$$\begin{aligned} m^*(A\cup B)+m^*(A\cap B) &= 1-m^*((A\cup B)^c)+1-m^*((A\cap B)^c)\\ &= 2-[m^*(A^c\cap B^c)+m^*(A^c\cup B^c)]\\ &\geq 2-[m^*(A^c)+m^*(B^c)] = m^*(A)+m^*(B). \end{aligned}$$

Étape 3. $\mathscr{T}$ est la complétée de $\mathscr{B}_{]0,1[}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_{]0,1[}$. Montrons dans un premier temps que m^* restreinte à $\mathscr{T}$ est complète. Soit A un ensemble négligeable par rapport à cette mesure. Il existe donc un $B\in\mathscr{T}$ tel que $A\subset B$ et $m^*(B)=0$. Pour tout $\varepsilon>0$, il existe U ouvert tel que $B\subset U$ et $m^*(U)<\varepsilon$ (lemme 5.5). Il s'ensuit que $m^*(A\Delta U)=m^*(U\backslash A)\leq m^*(U)<\varepsilon$. Grâce au lemme 5.11, nous déduisons que $A\in\mathscr{T}$. m^* restreinte à $\mathscr{T}$ est donc une mesure complète.

Enfin, montrons que $\mathscr{T}$ est la complétée de $\mathscr{B}_{]0,1[}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_{]0,1[}$ (donc de m^* sur $\mathscr{B}_{]0,1[}$). Notons $\overline{\mathscr{B}}_{]0,1[}$ cette complétée. De ce qui précède, $\overline{\mathscr{B}}_{]0,1[}\subset\mathscr{T}$ (justifier, en utilisant $\mathscr{B}_{]0,1[}\subset\mathscr{T}$ et la complétude de m^*). Inversement, soit $A\in\mathscr{T}$. Du lemme 5.5, il existe une suite $(U_n)_{n\geq 0}$ d'ouverts telle que $A\subset U_n$, $\forall\, n$, et $m^*(U_n)\to m^*(A)$. De même, il existe une suite $(V_n)_{n\geq 0}$ d'ouverts tells que $A^c\subset V_n$, $\forall\, n$, et $m^*(V_n)\to m^*(A^c)$. Nous avons alors $(V_n)^c\subset A$, $\forall\, n$, et $m^*((V_n)^c)\to m^*(A)$ (justifier). Posons $B:=\cup_n(V_n)^c$, $C:=\cap_n U_n$. Nous avons (justifier)

$$B, C\in\mathscr{B}_{]0,1[} \text{ et } B\subset A\subset C. \tag{5.15}$$

Par ailleurs, nous avons $(V_n)^c\subset B$, $\forall\, n$, d'où (justifier)

$$m^*(B)\geq\lim_n m^*((V_n)^c)=m^*(A). \tag{5.16}$$

De manière similaire, $C\subset U_n$, $\forall\, n$, d'où

$$m^*(C)\leq\lim_n m^*(U_n)=m^*(A). \tag{5.17}$$

De (5.15)–(5.17) et la monotonie de m^* (lemme 5.4 b)), nous avons $m^*(B)=m^*(A)=m^*(C)$. Il s'ensuit (justifier) que $m^*(C\backslash B)=0$, d'où (propositions 4.11 et 4.14) $A\in\overline{\mathscr{B}}_{]0,1[}$ et $m^*(A)$ est la mesure (de Lebesgue complétée) de A. CQFD

5.2 Pour aller plus loin

5.2.1 Mesures de Stieltjes

Soit $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $F(x):=x$, $\forall\, x\in\mathbb{R}$. La mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$ est l'unique mesure borélienne μ telle que $\mu(]a,b[)=F(b)-F(a)$ pour tout intervalle ouvert borné $]a,b[$.

Considérons plus généralement une fonction croissante $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Rappelons que F a des limites latérales $F(x+)$ et $F(x-)$ en tout point. Nous avons la généralisation suivante de la mesure de Lebesgue.

5.12 Théorème. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Alors il existe une unique mesure borélienne μ sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ telle que $\mu(]a,b[) = F(b-) - F(a+)$ pour tout intervalle ouvert borné $]a,b[$.

5.13 Définition (Mesure de Stieltjes)**.** La mesure μ du théorème 5.12 est la *mesure de Stieltjes* associée à F.

Si F est dérivable avec F' Riemann intégrable sur tout intervalle borné (par exemple si $F \in C^1$), alors nous pouvons obtenir ce résultat en copiant la preuve du théorème 5.1. En général, F n'est pas dérivable ; elle peut par exemple être discontinue. Dans ce cas, il est encore possible de suivre la preuve du théorème 5.1, mais il faut éviter l'utilisation de l'intégrale de Riemann dans les preuves des lemmes 5.4, 5.8 et 5.10 ; voir Bogachev [4, section 1.8]. Comme nous l'avons noté, l'utilisation de l'intégrale de Riemann dans la preuve est commode, mais pas indispensable.

5.2.2 La construction de Carathéodory

Commençons par une définition liée au lemme 5.4.

5.14 Définition (Mesure extérieure)**.** Une *mesure extérieure* sur X est une fonction $m^* : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$ telle que :

i) $m^*(\varnothing) = 0$.

ii) $m^*(A) \leq m^*(B)$ si $A \subset B$.

iii) $m^*(\cup_j A_j) \leq \sum_j m^*(A_j)$, pour toute suite $(A_j)_j \subset X$. ◇

Dans l'esprit de la construction de la mesure de Lebesgue, une façon simple de construire des mesures extérieures est la suivante.

5.15 Proposition. Soit $\mathscr{A}$ une famille de parties de X telle que :

i) Il existe une suite $(X_n)_n \subset \mathscr{A}$ avec $\cup_n X_n = X$.

ii) $\varnothing \in \mathscr{A}$.

Soit $m : \mathscr{A} \to [0, \infty]$ telle que $m(\varnothing) = 0$. Posons

$$m^*(A) := \inf \left\{ \sum_j m(A_j) \, ; \, A_j \in \mathscr{A}, \, \forall \, j \text{ et } A \subset \cup_j A_j, \right\}.$$

Alors m^* est une mesure extérieure. ◇

En poursuivant l'analogie avec la mesure de Lebesgue, il est tentant de considérer la classe

$$\mathscr{T} = \{A \subset X\, ;\, m^*(A) + m^*(A^c) = m^*(X)\}$$

et de montrer que m^* restreinte à $\mathscr{T}$ est une mesure. Cette approche marche uniquement si $m^*(X) < \infty$. La clé pour s'attaquer au cas général est indiquée par le résultat suivant (avec m^* et $\mathscr{T}$ comme dans la construction de la mesure de Lebesgue).

5.16 Lemme. Soit $A \subset]0,1[$. Alors

$$A \in \mathscr{T} \iff m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) = m^*(E),\ \forall\, E \subset]0,1[. \qquad \diamond$$

En nous inspirant du lemme 5.16, posons, pour X et m^* généraux,

$$\mathscr{T} := \{A \subset X\, ;\, m^*(A \cap E) + m^*(A^c \cap E) = m^*(E),\ \forall\, E \subset X\}. \tag{5.18}$$

Nous avons alors le résultat suivant.

5.17 Théorème (Théorème de Carathéodory)**.** Soit m^* une mesure extérieure sur X et soit $\mathscr{T}$ comme dans (5.18). Alors

a) $\mathscr{T}$ est une tribu.

b) m^* restreinte à $\mathscr{T}$ est une mesure complète. $\diamond$

L'inconvénient de ce résultat abstrait est qu'il ne donne aucun renseignement sur $\mathscr{T}$; par conséquent, il ne permet pas de décider si un ensemble concret est mesurable. Considérons le cas particulier où X est un espace métrique. Rappelons que dans ce cas les ensembles « usuels » sont boréliens. Il est donc intéressant de décider si $\mathscr{T}$ contient les boréliens. Dans ce contexte, nous avons le complément suivant du théorème précédent.

5.18 Théorème (Théorème de Carathéodory)**.** Soient m^* et $\mathscr{T}$ comme dans le théorème précédent. Si X est un espace métrique et si m^* a la propriété

$$m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B),\ \forall\, A, B \subset X \text{ tels que } \operatorname{dist}(A, B) > 0, \tag{5.19}$$

alors $\mathscr{T}$ contient les boréliens de X. $\diamond$

Pour les résultats dans cette section, voir par exemple Halmos [11, chapitre III], Evans et Gariepy [7, chapitre 1], Bogachev [4, section 1.11].

5.2.3 Les mesures de Hausdorff

Une conséquence importante de la méthode de la Carathéodory concerne les mesures de Hausdorff. Dans ce qui suit, nous nous donnons un $s \in [0, \infty[$. À un tel s, nous associons une constante $\beta(s) \in]0, \infty[$. La formule de $\beta(s)$ est explicite, mais elle ne sera pas utile pour la compréhension de ce qui suit ; voir Evans et Gariepy [7, chapitre 2] et Bogachev [4, section 3. 10 (iii)] pour la valeur de $\beta(s)$ et les résultats présentés dans cette section.

Pour $\delta > 0$, $s \in [0, \infty[$ et $A \subset \mathbb{R}^n$, posons

$$\mathscr{H}^s_\delta(A) := \beta(s) \inf \left\{ \sum_j (\operatorname{diam} A_j)^s \, ; \, \operatorname{diam} A_j \leq \delta, \, \forall \, j, \text{ et } A \subset \cup_j A_j \right\},$$
$$\mathscr{H}^s(A) := \inf_{\delta > 0} \mathscr{H}^s_\delta(A) \text{ (\textit{mesure de Hausdorff s-dimensionnelle})}.$$

Ici, $\operatorname{diam} A$ est le *diamètre* de A, $\operatorname{diam} A := \sup\{\|x - y\|_2 \, ; \, x, y \in A\}$.

Les résultats de la section précédente impliquent facilement le résultat suivant.

5.19 Proposition.

a) $\mathscr{H}^s_\delta$ et $\mathscr{H}^s$ sont des mesures extérieures.

b) Elles satisfont le critère de Carathéodory (5.19).

c) Restreintes aux boréliens, $\mathscr{H}^s_\delta$ et $\mathscr{H}^s$ sont des mesures. ◇

Par abus de notation, désignons encore par $\mathscr{H}^s_\delta$ et $\mathscr{H}^s$ les mesures associées aux mesures extérieures $\mathscr{H}^s_\delta$ et $\mathscr{H}^s$ par la construction de Carathéodory. L'utilité des mesures de Hausdorff vient de leur interprétation géométrique, du moins pour s entier.

5.20 Théorème.

a) Dans $\mathbb{R}^n$, nous avons $\mathscr{H}^n = \lambda_n$ (la mesure de Lebesgue).

b) Si $n \geq 2$ et si C est une courbe lisse paramétrée dans $\mathbb{R}^n$, alors $\mathscr{H}^1(C)$ est la longueur de C.

c) Si $n \geq 3$ et si S est une surface lisse paramétrée dans $\mathbb{R}^3$, alors $\mathscr{H}^2(S)$ est l'aire de S.

d) Etc. ◇

C'est dans ce théorème qu'interviennent les valeurs précises de $\beta(s)$.

Poursuivons l'exemple de la courbe paramétrée $C \subset \mathbb{R}^n$. Il est possible de montrer que $\mathscr{H}^s(C) = \infty$ si $s < 1$ et que $\mathscr{H}^s(C) = 0$ si $s > 1$. Le changement s'opère pour $s = 1$, qui correspond à la dimension (géométrique) de C. De manière générale, nous pouvons considérer le nombre

$$\dim A := \inf \{s > 0\,;\, \mathscr{H}^s(A) = 0\}.$$

Pour une partie A de $\mathbb{R}^n$ de mesure de Lebesgue > 0, nous avons $\dim A = n$. Pour une surface lisse paramétrée S dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, nous avons $\dim S = 2$. En général, $\dim A$ n'est pas un entier, mais il est néanmoins interprété comme la « dimension de A ». Par exemple, l'*ensemble de Cantor maigre* (voir l'exercice 6.58) a la dimension $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ (voir Taylor [21, Proposition 12.17]).

Chapitre 6

Intégrale

6.0 Aperçu

Dans ce chapitre, nous définissons l'*intégrale*[†] d'une *fonction mesurable* f, dans un *espace mesuré* $(X, \mathscr{T}, \mu)$, et donnons ses premières propriétés. Les plus simples fonctions mesurables sont les *fonctions caractéristiques* $f = \chi_A$, avec $A \in \mathscr{T}$, et dans ce cas nous posons naturellement $\displaystyle\int \chi_A := \mu(A)$. Dans le cas des fonctions étagées, la définition se fait « par linéarité », en posant $\displaystyle\int \sum_i a_i \chi_{A_i} := \sum_i a_i\, \mu(A_i)$, mais il y a déjà une première difficulté : pour que la dernière somme soit bien définie, il faut supposer par exemple $a_i \geq 0$, $\forall\, i$. Cette définition permet de définir l'intégrale d'une *fonction étagée positive*. L'étape suivante consiste à définir l'intégrale d'une fonction *mesurable positive* f. La définition 6.5 :

$$\int f := \sup \left\{ \int u \,;\, 0 \leq u \leq f,\ u \text{ étagée} \right\} \tag{6.1}$$

n'est pas très intuitive ; une définition plus naturelle serait

$$\int f := \lim_n \int f_n, \text{ où } f_n \text{ étagée positive, } \forall\, n, \text{ et } f_n \nearrow f\,; \tag{6.2}$$

une telle définition ressemblerait au calcul de l'intégrale de Riemann en utilisant des sommes de Darboux inférieures. Il se trouve que (6.2) est en effet équivalente à la définition 6.5, mais que la preuve de cette équivalence n'est pas immédiate (voir le corollaire 6.19).

---

†. Intégrale *de Lebesgue*, au sens d'intégrale calculée dans le cadre de la théorie de l'intégration que nous présentons ici, due à Lebesgue. Je ne vais pas employer la terminologie *intégrale de Lebesgue* dans le cadre général, la réservant au cas de l'intégrale d'une fonction par rapport à la mesure de Lebesgue ν_n ou λ_n dans $\mathbb{R}^n$.

La définition de l'intégrale d'une fonction mesurable quelconque est l'une des faiblesses de la théorie de l'intégration : en général, une fonction mesurable n'a pas d'intégrale. La définition rigoureuse en est donnée dans la section 6.2.

Dans la section 6.4, nous examinons le lien entre intégrales par rapport à μ et par rapport à la mesure complétée $\overline{\mu}$, la conclusion informelle étant que le passage de μ à $\overline{\mu}$ n'affecte pas l'existence des intégrales et leur valeur.

La section 6.3 nous permet de rencontrer un résultat important d'intégration : le *théorème de convergence monotone* 6.18 (ou *théorème de Beppo Levi*). C'est le premier résultat permettant de *permuter* $\lim$ *et* $\int$. Il affirme que si

$$0 \leq f_n \nearrow f := \lim_n f_n,$$

avec f_n mesurable, $\forall\, n$, alors

$$\int \lim_n f_n = \lim_n \int f_n.$$

Ce résultat a un nombre incalculable de conséquences, dont certaines seront vues dans la section 6.5. L'une d'elles est la linéarité de l'intégrale (proposition 6.30), dont à la fois l'énoncé et la preuve ne sont pas évidentes. † Une autre conséquence est encore un résultat de *permutation*, cette fois-ci *entre somme d'une série et intégrale*, dont la conclusion est (sous des hypothèses appropriées)

$$\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$$

(théorème 6.36).

La section 6.6 fait le lien entre l'intégrale et les intégrales déjà connues, de Riemann et généralisée. Pour simplifier, nous considérons uniquement des fonctions continues (ce qui n'est pas essentiel). Un résultat simple à énoncer (proposition 6.44) est que, *si* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *est continue, alors son intégrale de Riemann et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue* ν_1 *coïncident*. Les propositions 6.44 et 6.45 sont *fondamentales*, dans la mesure où elles permettent de traiter une même intégrale tantôt comme intégrale de Lebesgue, tantôt comme intégrale de Riemann (ou généralisée) et d'utiliser dans les calculs des résultats spécifiques à chacune de ces intégrales.

†. Faut-il vraiment connaître cette preuve ? Lieb et Loss justifient ainsi l'absence de la théorie de l'intégration dans leur livre Analysis [16] : "We all know the tremendously important fact that $\int (f+g) = \int f + \int g$, and we can use it happily without remembering the proof (which actually requires some thought)".

La section 6.7 est inattendue par rapport au schéma « intégrale = généralisation de l'intégrale de Riemann », car elle traite de *séries*, et explique comment celles-ci peuvent être vues comme des intégrales par rapport à la mesure de comptage.

Ainsi, la théorie de l'intégration permet, entre autres, de traiter de manière unitaire l'intégrale de Riemann (et, dans une moindre mesure, l'intégrale généralisée) et les séries.

La section 6.8 présente brièvement quelques triomphes de la théorie de l'intégration. Il s'agit de trois résultats, tous dus à Lebesgue :

a) La caractérisation des fonctions Riemann intégrables (*critère de Lebesgue*, théorème 6.53).

b) Une forme faible du théorème de Leibniz-Newton lorsque l'intégrande [†] n'est plus continue, mais seulement intégrable (*théorème de différentiabilité de Lebesgue* 6.56).

c) Une généralisation du théorème de Leibniz-Newton (théorème 6.57).

Compétences minimales attendues.

a) Comprendre quelles fonctions possèdent une intégrale.

b) Savoir calculer l'intégrale d'une fonction étagée positive.

c) Manipuler les propriétés basiques de l'intégrale (monotonie, inégalité triangulaire, linéarité).

d) Savoir utiliser le théorème de convergence monotone (théorème 6.18) et le théorème sur l'intégrale d'une série (théorème 6.36).

e) Comprendre et utiliser les liens entre intégrale de Lebesgue, de Riemann et généralisée.

f) Comprendre et utiliser le lien entre séries et intégrales par rapport à la mesure de comptage.

g) Maîtriser les arguments liés aux ensembles négligeables. ◇

Dans tout ce chapitre, nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Sauf mention contraire, les fonctions considérées sont *mesurables*. Je ne vérifierai pas toujours la mesurabilité des fonctions *construites* à partir de fonctions données (par exemple, $\lim_n f_n$, avec chaque f_n mesurable). *Le lecteur est encouragé à le faire ; ceci fait partie de l'apprentissage de la théorie de la mesure.*

†. *Intégrande* : fonction que l'on intègre. Exemple : dans l'intégrale $\int_0^1 \cos x\, dx$, l'intégrande est $x \mapsto \cos x$. Mot non reconnu par l'Académie, mais d'usage courant en mathématiques.

6.1 Fonctions étagées positives

Rappelons le cadre général : nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Dans cette section, toutes les fonctions sont supposées *étagées*.

Rappelons qu'une fonction étagée est de la forme (*) $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, avec un nombre arbitraire mais fini, n, de termes, $a_i \in \mathbb{R}$ et $A_i \in \mathscr{T}$, $\forall\, i$. Introduisons des définitions qui ne serviront que dans cette section :

6.1 Définition. La représentation (*) est :

a) *Normale* si les A_i sont d. d. d.

b) *Canonique* si les A_i sont d. d. d. et non vides et si les a_i sont distincts et non nuls.

c) Dans le cas particulier où $f \geq 0$, la représentation (*) est *admissible* si les a_i sont positifs. ◇

Notons qu'à partir d'une représentation normale, nous pouvons obtenir une représentation canonique d'abord en effaçant tous les termes qui correspondent à des a_i nuls ou à des A_i vides, puis en regroupant les termes correspondant à la même valeur de a_i.

6.2 Proposition. Une fonction étagée admet une représentation canonique. Celle-ci est unique modulo une permutation des termes de la somme.

Dans le cas particulier où f est positive, la représentation canonique est admissible. ◇

6.3 Définition (Intégrale d'une fonction étagée positive)**.** Si f est étagée et ≥ 0, de représentation canonique $f = \sum_i a_i \chi_{A_i}$, alors l'*intégrale de f (par rapport à μ)* est

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu = \int f\, d\mu = \int f := \sum_i a_i \mu(A_i).$$

6.4 Proposition. Soient $f, g : X \to [0, \infty[$ étagées positives.

a) Si $f = \sum_{j=1}^{m} b_j \chi_{B_j}$ est une représentation admissible de f, alors

$$\int f = \sum_j b_j \mu(B_j). \tag{6.3}$$

b) Si $\lambda \geq 0$, alors $\displaystyle\int (f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 6.2.
Unicité. Si (**) $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i} = \sum_{j=1}^{m} b_j\chi_{B_j}$, alors f a, comme valeurs non nulles, précisément les $a_1, \ldots, a_n$; de même, ses valeurs non nulles sont $b_1, \ldots, b_m$. Il s'ensuit que $m = n$ et que les b_j s'obtiennent en permutant les a_i. Quitte à faire une permutation dans la deuxième somme, nous avons $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{C_i}$, où les C_i sont les B_j écrits dans un ordre différent. Comme $f^{-1}(a_i) = A_i = C_i$, nous trouvons que la deuxième somme de (**) est une permutation de la première.

Existence. Soient $a_1, \ldots, a_n$ les valeurs distinctes et non nulles prises par f. Si $A_i := f^{-1}(a_i)$, alors $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ est une représentation canonique de f.

Si $f \geq 0$ et si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ est la représentation canonique de f, alors les valeurs de f sont $a_1, \ldots, a_n$, et éventuellement 0. Il s'ensuit que les a_i sont ≥ 0. CQFD

Démonstration de la proposition 6.4.

a) Commençons par le cas où la représentation de f est, de plus, *normale*. Nous pouvons supposer $B_j \neq \emptyset$ et $b_j \neq 0$, $\forall\, j$; sinon, nous effaçons les termes correspondants de la représentation, sans affecter la valeur de $\sum b_j\mu(B_j)$.

Par construction, tous les b_j sont > 0. Soit $A := \{b_1, \ldots, b_j\}$. Alors $A = f(X)\setminus\{0\}$ et, si $f = \sum_{i=1}^{n} a_i\chi_{A_i}$ est la représentation canonique de f, alors nous avons $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$.

Avec $M_i := \{j\ ;\ B_j \subset A_i\}$, nous avons $A_i = f^{-1}(a_i) = \sqcup_{j\in M_i} B_j$, d'où $\mu(A_i) = \sum_{j\in M_i}\mu(B_j)$. Il s'ensuit que

$$\int f = \sum_i a_i\mu(A_i) = \sum_i a_i \sum_{j\in M_i}\mu(B_j) = \sum_i\sum_{j\in M_i} b_j\mu(B_j) = \sum_j b_j\mu(B_j).$$

Conclusion : (6.3) est vraie si la représentation est normale.

Soit maintenant $f = \sum_{j=1}^{m} b_j\mu(B_j)$ une représentation *admissible*. Nous allons prouver (6.3) par récurrence sur m.

Pour $m = 0$ c'est clair. Passage de $m-1$ à m : nous pouvons représenter canoniquement $\sum_{j=1}^{m-1} b_j\chi_{B_j} = \sum_i a_i\chi_{A_i}$, et nous avons (par hypothèse de récurrence)

$$\int \sum_{j=1}^{m-1} b_j\chi_{B_j} = \sum_{j=1}^{m-1} b_j\mu(B_j) = \sum_i a_i\mu(A_i).$$

Par ailleurs,

$$f = \sum_i a_i\chi_{A_i\setminus B_m} + \sum_i (a_i + b_m)\chi_{A_i\cap B_m} + b_m\chi_{B_m\setminus\cup_i A_i}$$

est une représentation normale de f (justifier).

Nous avons donc, en utilisant la première partie de la preuve (vérifier)

$$\begin{aligned}\int f &= \sum_i a_i\mu(A_i\backslash B_m) + \sum_i (a_i+b_m)\mu(A_i\cap B_m) + b_m\mu(B_m\backslash \cup_i A_i)\\ &= \sum_i a_i(\underbrace{\mu(A_i\backslash B_m)+\mu(B_m\cap A_i)}_{=\mu(A_i)}) + b_m\underbrace{\sum_i(\mu(A_i\cap B_m)+\mu(B_m\backslash \sqcup_i A_i))}_{=\mu(B_m)}\end{aligned}$$

d'où $\displaystyle\int f = \sum_i a_i\mu(A_i) + b_m\mu(B_m) = \sum_j b_j\mu(B_j)$.

b) Si $f = \sum_i a_i\chi_{A_i}$ et $g = \sum_j b_j\chi_{B_j}$ sont des représentations canoniques, alors la représentation $f+\lambda g = \sum_i a_i\chi_{A_i} + \sum_j \lambda b_j\chi_{B_j}$ est admissible. Il s'ensuit que

$$\int(f+\lambda g) = \sum_i a_i\mu(A_i) + \sum_j \lambda b_j\mu(B_j) = \int f + \lambda\int g.$$

CQFD

6.2 Fonctions mesurables

Rappelons le cadre général : nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Dans cette section, toutes les fonctions sont supposées *mesurables*.

6.5 Définition (Intégrale d'une fonction mesurable positive)**.** Si $f : X \to [0,\infty]$, alors l'intégrale de f est

$$\begin{aligned}\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_X f\,d\mu = \int f\,d\mu = \int f\\ := \sup\left\{\int u\ ;\ u \text{ étagée et positive et } u\leq f\right\}.\end{aligned}$$

f est *intégrable* si son intégrale est finie.

6.6 Remarque. Une généralisation doit être « rétro-compatible ».

Dans notre cas : nous avons d'abord défini l'intégrale des fonctions étagées positives (définition 6.3), puis celle des fonctions mesurables positives (définition 6.5).

Les fonctions étagées positives étant des cas particuliers de fonctions mesurables positives, il faut vérifier que, pour une fonction étagée positive, l'intégrale donnée par la définition 6.5 est la même que celle donnée par la définition 6.3.

Nous allons effectuer une démarche similaire pour chaque généralisation.

6.7 Proposition. Si f est étagée positive, les définitions 6.3 et 6.5 donnent la même intégrale. $\diamond$

La définition de l'intégrale d'une fonction *mesurable* (pas nécessairement positive) repose sur l'identité

$$f = f_+ - f_-.^\dagger \tag{6.4}$$

6.8 Définition (Intégrale d'une fonction mesurable). $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *a une intégrale* si $\displaystyle\int f_+ - \int f_-$ a un sens, et dans ce cas son *intégrale (de Lebesgue)* est

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_X f\, d\mu = \int f\, d\mu = \int f := \int f_+ - \int f_-.$$

Si f_+ et f_- sont intégrables, alors f est *intégrable*. Donc

$$\begin{aligned} f \textit{ intégrable} &\iff f \text{ a une intégrale } \textit{finie} \\ &\iff \left[\int f_+ < \infty \textit{ et } \int f_- < \infty\right] \iff \int |f| < \infty.^\ddagger \end{aligned}$$

6.9 Remarque. L'hypothèse « $\displaystyle\int f_+ - \int f_-$ a un sens » équivaut à « $\displaystyle\int f_+$ et $\displaystyle\int f_-$ ne valent pas en même temps ∞ ».

En particulier, cette hypothèse est satisfaite lorsque $f \geq 0$, car dans ce cas nous avons $f_- = 0$, et donc $\displaystyle\int f_- = 0$.

6.10 Remarque (Rétro-compatibilité). Dans le cas où $f \geq 0$, nous avons $f_+ = f$ et $f_- = 0$; la « nouvelle » intégrale vaut donc

$$\int f_+ - \int f_- = \int f - \int 0 = \int f,$$

et nous retrouvons l'« ancienne » intégrale. $\diamond$

6.11 Définition (Intégrale d'une fonction vectorielle). Soit $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ mesurable. L'intégrale de f est définie uniquement si chaque f_j est

†. Rappelons (voir la notation 3.30) que $f_+ := \max(f, 0)$ et $f_- := -\min(f, 0)$.
‡. La dernière équivalence sera justifiée dans la section 6.5.

intégrable, et si tel est le cas

$$\int f := \left(\int f_j\right)_{j=1,\dots,n} = \left(\int f_1, \dots, \int f_n\right).$$

Si $f : X \to \mathbb{C}$, nous identifions $\displaystyle\int f$ avec $\displaystyle\int \operatorname{Re} f + \imath \int \operatorname{Im} f$.

Par analogie avec l'intégrale de Riemann, la première propriété attendue de l'intégrale de Lebesgue est sa linéarité. Ceci est vrai (proposition 6.30), mais pas immédiat. Pour l'instant, montrons la partie facile de la linéarité.

6.12 Proposition. Si f a une intégrale et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors λf a une intégrale et nous avons $\displaystyle\int \lambda f = \lambda \int f$. $\diamond$

Une autre propriété attendue est la monotonie.

6.13 Proposition. Si $f \le g$ et si f, g ont une intégrale, alors $\displaystyle\int f \le \int g$. $\diamond$

Si f est définie sur une partie A *mesurable* de X, la définition de $\displaystyle\int_A f$ est la suivante.

6.14 Définition. Si $A \in \mathscr{T}$ et $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable, alors f a une intégrale si et seulement si $f\chi_A$ en a une,† et dans ce cas nous posons

$$\int_A f\,d\mu = \int_A f := \int_X f\chi_A = \int_X f\chi_A\,d\mu.$$

Le résultat (très utile) qui suit explique en quoi les ensembles négligeables le sont.

6.15 Proposition.

a) Si $A \in \mathscr{T}$ est négligeable, alors pour toute fonction mesurable $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ nous avons $\displaystyle\int_A f = 0$.

b) Si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable et $f = 0$ p. p., alors f est intégrable et $\displaystyle\int f = 0$. $\diamond$

---

†. Rappelons que, si $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $f\chi_A := \begin{cases} f, & \text{dans } A \\ 0, & \text{dans } A^c \end{cases}.$

Exercices

Même cadre que ci-dessus : nous travaillons dans $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et toutes les fonctions sont mesurables.

6.16 Exercice. Si $0 \leq f \leq g$, alors $\displaystyle\int f \leq \int g$. ◇

6.17 Exercice. Soient $A \in \mathscr{T}$ et $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que la définition 6.14 de $\displaystyle\int_A f$ est équivalente à :

$\displaystyle\int_A f$ est (si elle existe) l'intégrale de f par rapport à l'espace mesuré $(A, \mathscr{T}_A, \mu_A)$, où $\mathscr{T}_A := \{B \in \mathscr{T}\,;\, B \subset A\}$ et $\mu_A(B) := \mu(B)$, $\forall\, B \in \mathscr{T}_A$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 6.7. Notons $\displaystyle\int f$ l'ancienne intégrale et I la nouvelle. Nous avons $f \leq f$, d'où (justifier) $\displaystyle\int f \leq I$.

Par ailleurs, si $0 \leq u \leq f$ est étagée, alors $f = u + (f - u)$, avec $f - u$ étagée positive. Nous avons donc (proposition 6.4 b))

$$\int f = \int u + \int (f-u) \geq \int u. \tag{6.5}$$

En prenant, dans (6.5), le $\sup$ sur u, nous trouvons $\displaystyle\int f \geq I$. CQFD

Démonstration de la proposition 6.12. Si $\lambda = 0$, c'est clair. Si $\lambda = -1$, il suffit de remarquer que $(-f)_+ = f_-$ et $(-f)_- = f_+$ (vérifier ces identités).

Pour compléter la preuve, il suffit de montrer l'égalité pour $\lambda > 0$ (justifier). Or, pour $\lambda > 0$ nous avons :

a) $(\lambda f)_\pm = \lambda f_\pm$.

b) u est étagée et $0 \leq u \leq f_\pm \iff \lambda u$ est étagée et $0 \leq \lambda u \leq \lambda f_\pm$ (justifier).

En utilisant la proposition 6.4 et l'item b) ci-dessus, nous obtenons

$$\begin{aligned}\lambda \int f_\pm &= \lambda \sup\left\{\int u\,;\, u \text{ étagée et positive, } u \leq f_\pm\right\}\\ &= \sup\left\{\int \lambda u\,;\, \lambda u \text{ étagée et positive, } \lambda u \leq \lambda f_\pm\right\}\\ &= \sup\left\{\int v\,;\, v \text{ étagée et positive, } v \leq \lambda f_\pm\right\} = \int \lambda f_\pm,\end{aligned}$$

ce qui implique (détailler) l'égalité $\displaystyle\lambda \int f = \int \lambda f$. CQFD

Démonstration de la proposition 6.13. Si f, g sont ≥ 0, l'inégalité s'obtient à partir de la définition 6.5 (exercice 6.16).

Pour f, g quelconques, notons l'implication

$$f \leq g \implies [f_+ \leq g_+ \text{ et } f_- \geq g_-],$$

qui implique à son tour

$$f \leq g \implies \left[\int f_+ \leq \int g_+ \text{ et } \int f_- \geq \int g_-\right]; \tag{6.6}$$

pour conclure, il suffit de soustraire ces deux dernières inégalités. CQFD

Démonstration de la proposition 6.15.

a) Posons $\widetilde{f} := f\chi_A$. Nous devons montrer que $\displaystyle\int_X \widetilde{f} = 0$.

Nous avons (justifier la dernière égalité)

$$\widetilde{f} = f\chi_A = f_+\chi_A - f_-\chi_A = \widetilde{f_+} - \widetilde{f_-}.$$

Il suffit donc de montrer le résultat pour $f_\pm$, qui sont des fonctions mesurables positives.

Soit $f : A \to [0, \infty]$ une fonction mesurable positive. Par définition de l'intégrale de $\widetilde{f}$, il suffit de montrer que, si $g : X \to [0, \infty[$ est une fonction étagée telle que $g \leq \widetilde{f}$, alors $\displaystyle\int_X g = 0$.

Si $g = \sum_i a_i\chi_{A_i}$ est une représentation admissible de g, alors

$$g = (\text{justifier}) = g\chi_A = \sum_i a_i\chi_{A_i}\chi_A = \sum_i a_i\chi_{A_i \cap A}$$

est une autre représentation admissible de g. Comme $\mu(A_i \cap A) \leq \mu(A) = 0$, nous obtenons (proposition 6.4 a))

$$\int_X g = \sum_i a_i\mu(A_i \cap A) = 0.$$

b) se montre en notant qu'il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $f = 0$ en dehors de A et donc $f = f\chi_A$ (justifier) et en utilisant la première partie. CQFD

6.3 Théorème de convergence monotone

Le cadre général est celui d'un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Toutes les fonctions de cette partie sont *mesurables*.

6.18 Théorème (Théorème de convergence monotone). [†] Soit $(f_n)_n$ une suite *croissante* de *fonctions mesurables positives*. Si $f_n \to f$,[‡] alors $\displaystyle\int f_n \to \int f$.

Ou encore : $\displaystyle\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$.

6.19 Corollaire. Soit $f \geq 0$. Pour toute suite croissante $(f_n)_n$ de fonctions étagées positives telle que $f_n \to f$, nous avons $\displaystyle\int f = \lim_n \int f_n$. ◇

Démonstrations

La preuve du théorème de convergence monotone repose sur un lemme facile.

6.20 Lemme. Soit u une fonction étagée positive. L'application

$$\nu : \mathscr{T} \to [0, \infty],\ \nu(A) := \int_A u = \int_X u\chi_A,\ \forall\, A \in \mathscr{T},$$

est une mesure. ◇

Démonstration. Notons que ν est bien définie, car $u\chi_A$ est étagée et positive.

Si $u = \sum_i a_i\chi_{A_i}$ est une représentation admissible de u, alors $u\chi_A = \sum_i a_i\chi_{A_i\cap A}$ est une représentation admissible de $u\chi_A$ (voir la preuve de la proposition 6.15 a)), d'où

$$\nu(A) = \int u\chi_A = \int \sum_i a_i\chi_{A_i\cap A} = \sum_i a_i\mu(A_i \cap A).$$

À partir de cette formule, l'exercice 4.5 a) montre que ν est une mesure (vérifier). CQFD

Démonstration du théorème 6.18. f est mesurable (proposition 3.20) et positive ; de plus, nous avons $0 \leq f_n \leq f$ pour tout n.

L'exercice 6.16 donne $\displaystyle\int f_n \leq \int f$, $\forall\, n$, et implique que la suite $\displaystyle\left(\int f_n\right)_n$ est croissante. En particulier, cette suite à une limite et nous avons $\displaystyle\lim_n \int f_n \leq \int f$.

Il reste à montrer l'inégalité opposée

$$\lim_n \int f_n \geq \int f. \tag{6.7}$$

†. Ou encore *théorème de Beppo Levi*.

‡. La convergence $f_n \to f$ est *simple*. Dans les théorèmes les plus importants en théorie de l'intégration, il s'agit de convergence *simple*, soit *partout*, soit *presque partout*.

Notons qu'il suffit de montrer l'inégalité

$$\lim_n \int f_n \geq (1-\varepsilon) \int u, \ \forall\, 0 < \varepsilon < 1, \ \forall\, u \text{ étagée telle que } 0 \leq u \leq f. \tag{6.8}$$

En effet, si (6.8) est vraie, alors, en faisant $\varepsilon \to 0+$, nous obtenons (en utilisant le fait que l'intégrale de u est positive)

$$\lim_n \int f_n \geq \int u, \quad \forall\, u \text{ étagée telle que } 0 \leq u \leq f. \tag{6.9}$$

De (6.9) et la définition 6.5, nous obtenons (6.7).

Montrons (6.8). Soit $B_n := \{x\,;\, f_n(x) \geq (1-\varepsilon)u(x)\}$. Comme $\lim_n f_n = f \geq u$, nous avons $\cup_n B_n = X$ (vérifiez que $x \in \cup_n B_n$, $\forall\, x \in X$, en considérant respectivement les cas $u(x) = 0$ et $u(x) > 0$).

Par ailleurs, nous avons $B_n = (f_n - (1-\varepsilon)u)^{-1}([0,\infty])$, d'où $B_n \in \mathscr{T}$, et la suite $(B_n)_n$ est croissante (justifier, en utilisant la monotonie de la suite $(f_n)_n$).

Avec ν la mesure du lemme précédent, nous trouvons, grâce au théorème de la suite croissante, que $\nu(B_n) \to \nu(X) = \displaystyle\int u$.

Par ailleurs, nous avons (en utilisant à nouveau l'exercice 6.16)

$$\int f_n \geq \int f_n \chi_{B_n} \geq \int (1-\varepsilon) u \chi_{B_n} = (1-\varepsilon)\nu(B_n),$$

d'où $\displaystyle\lim_n \int f_n \geq (1-\varepsilon)\int u.$ CQFD

6.4 P. p. et passage à la mesure complétée

Le cadre général est celui d'un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et de son espace complété $(X, \overline{\mathscr{T}}, \overline{\mu})$.

Dans un premier temps, nous examinons le lien entre intégrale par rapport à la mesure μ et celle par rapport à $\overline{\mu}$. La philosophie générale des résultats est que les intégrales par rapport à μ et $\overline{\mu}$ sont égales, et qu'en modifiant une fonction sur un ensemble négligeable, la nature de son intégrale (n'existe pas, existe, existe et est finie) ne change pas.

Dans une direction voisine, nous montrons qu'un théorème « partout pour μ » a des compagnon naturels « presque partout » et/ou « pour $\overline{\mu}$ ». *Il est important de retenir le principe de preuve associé*; nous n'allons pas y revenir dans les autres chapitres, où *un énoncé presque partout et/ou pour $\overline{\mu}$ sera suivi d'une preuve partout et pour μ.*

6.21 Proposition. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{T}$-mesurable.

$$\int f\,d\mu \text{ existe si et seulement si } \int f\,d\overline{\mu} \text{ existe, et dans ce cas } \int f\,d\overline{\mu} = \int f\,d\mu.$$

6.22 Proposition. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable.

Rappelons qu'il existe $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{T}$-mesurable telle que $f = g$ μ-p. p. (proposition 4.19).

$$\int f\,d\overline{\mu} \text{ existe si et seulement si } \int g\,d\mu \text{ existe, et dans ce cas } \int f\,d\overline{\mu} = \int g\,d\mu.$$

Cas particulier : f est $\overline{\mu}$-intégrable si et seulement si g est μ-intégrable. ◇

6.23 Corollaire. Si $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ sont $\mathscr{T}$-mesurables et $f = g$ μ-p. p., alors $\int f$ existe si et seulement si $\int g$ existe, et dans ce cas $\int f = \int g$. ◇

En combinant les propositions 6.15, 6.21, 6.22 et le corollaire 6.23, nous obtenons les règles suivantes de calcul, très utiles dans la pratique.

6.24 Corollaire. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ et $A, B \subset X$. Supposons :

(i) f est $\mathscr{T}$-mesurable et g est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable. (En particulier, g peut être $\mathscr{T}$-mesurable.)

(ii) $A \in \mathscr{T}$ et $\mu(A) = 0$.

(iii) $B \in \overline{\mathscr{T}}$ et $\overline{\mu}(B) = 0$.

(iv) $f = g$ dans $X \backslash (A \cup B)$.

Considérons les quatre intégrales suivantes : $\int_X f\,d\mu$, $\int_{X\backslash A} f\,d\mu$, $\int_X g\,d\overline{\mu}$, $\int_{X\backslash B} g\,d\overline{\mu}$. Si l'une d'entre elle existe, alors les trois autres existent également, et nous avons

$$\int_X f\,d\mu = \int_{X\backslash A} f\,d\mu = \int_X g\,d\overline{\mu} = \int_{X\backslash B} g\,d\overline{\mu}, \tag{6.10}$$

$$\int_X |f - g|\,d\overline{\mu} = 0. \tag{6.11}$$

6.25 Remarque. La proposition 6.26, qui suit, montre que, donnée une fonction intégrable f, nous pouvons changer sa définition sur un ensemble négligeable de sorte que son intégrale ne change pas et que la nouvelle fonction ne prenne que des valeurs finies.

Pour cette raison, pour montrer certaines propriétés des fonctions intégrables nous pouvons parfois remplacer f par g et supposer ainsi que f est finie en tout point. ◇

6.26 Proposition. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-intégrable. Soient $A := f^{-1}(\infty)$, $B := f^{-1}(-\infty)$.

a) Nous avons $\mu(A) = \mu(B) = 0$.

b) Si nous posons $g : X \to \mathbb{R}$, $g(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } f(x) \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{si } f(x) = \pm\infty \end{cases}$,[†] alors $\displaystyle\int |f - g| = 0$ et $\displaystyle\int f = \int g$. ◇

6.27 Remarque. Revenons à la définition 6.11. Nous aurions pu considérer la situation plus générale où $f_j : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (au lieu de $f_j : X \to \mathbb{R}$). La proposition 6.26 montre qu'on peut remplacer les f_j par des fonctions $g_j : X \to \mathbb{R}$, sans changer l'intégrale. ◇

Nous concluons cette section par une illustration concrète du principe *chaque théorème « partout pour μ » a des analogues « p. p. pour μ ou $\overline{\mu}$ »*.

6.28 Théorème (Théorème de convergence monotone, variante p. p.)**.** Soit $(f_n)_n$ une suite croissante p. p. de fonctions positives p. p. convergeant p. p. vers f.

Alors $\displaystyle\lim_n \int f_n \, d\mu = \int f \, d\overline{\mu}$. ◇

Démonstrations

Dans les démonstrations de cette section, nous aurons besoin du corollaire 6.19 et de la proposition 6.30, qui seront démontrés ultérieurement.

Démonstration de la proposition 6.21. Notons que f est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable. Il suffit de montrer l'égalité des deux intégrales si $f \geq 0$ (justifier). Cette égalité est claire si f est $\mathscr{T}$-étagée. Le cas général s'obtient en considérant une suite $(f_n)_n$ de fonctions $\mathscr{T}$-étagées positives telle que $f_n \nearrow f$ (suite dont l'existence découle du corollaire 3.7) et le corollaire 6.19 (vérifier). CQFD

Démonstration de la proposition 6.22. Nous avons $f_\pm = g_\pm$ μ-p. p. (vérifier). Il suffit donc de montrer que $\displaystyle\int f_\pm \, d\overline{\mu} = \int g_\pm \, d\mu$. Comme $f_\pm, g_\pm$ sont mesurables *et positives*, il suffit donc de montrer la proposition pour des fonctions positives.

Soient $f, g \geq 0$ comme dans l'énoncé. Alors $\displaystyle\int f \, d\overline{\mu}$ et $\displaystyle\int g \, d\mu$ existent. Soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $f = g$ en dehors de A. Soit $B := X \backslash A \in \mathscr{T}$, de sorte que $X = A \sqcup B$. Comme $\mu(A) = \overline{\mu}(A) = 0$, nous avons (proposition 6.15) $\displaystyle\int_A f \, d\overline{\mu} = 0$ et $\displaystyle\int_A g \, d\mu = 0$. Par ailleurs, $f\chi_B = g\chi_B$ et donc (proposition 6.21)

$$\int_B f \, d\overline{\mu} = \int_B f \, d\mu = \int_B g \, d\mu.$$

†. De manière équivalente, $g := f\chi_{(A \cup B)^c}$.

Nous obtenons (en utilisant la linéarité de l'intégrale, voir la proposition 6.30)

$$\int f\,d\overline{\mu} = \int (f\,\chi_A + f\,\chi_B)\,d\overline{\mu} = \int f\,\chi_A\,d\overline{\mu} + \int f\,\chi_B\,d\overline{\mu} = \int_A f\,d\overline{\mu} + \int_B f\,d\overline{\mu}$$
$$= \int_B f\,d\mu = \int_B g\,d\mu = \int_A g\,d\mu + \int_B g\,d\mu = \int g\,d\mu,$$

d'où la conclusion de la proposition. CQFD

Démonstration de la proposition 6.26. Rappelons que $A, B \in \mathscr{T}$ (théorème 3.5).

a) Montrons, par exemple, la première égalité. Nous avons $f_+ \geq n\chi_A$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, d'où

$$n\,\mu(A) = \int n\,\chi_A \leq \int f_+ < \infty. \tag{6.12}$$

En faisant $n \to \infty$ dans (6.12), nous trouvons $\mu(A) = 0$.

b) Nous avons $|f - g| = \infty\,\chi_{A\cup B}$. $A \cup B \in \mathscr{T}$ étant négligeable, nous obtenons que $\int |f - g| = 0$ (proposition 6.15).

L'égalité $\int f = \int g$ suit du corollaire 6.23. CQFD

Démonstration du théorème 6.28. La fonction f est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable (proposition 4.20). Soient $A_n, A \in \mathscr{T}$ négligeables tels que $f_n(x) \geq 0$, $\forall\, x \notin A_n$, et $f_n(x) \nearrow f(x)$, $\forall\, x \notin A$. Soit $B := A \cup \cup_n A_n \in \mathscr{T}$, qui est négligeable. Le corollaire 6.24 et le théorème de convergence monotone donnent

$$\int_X f\,d\overline{\mu} = \int_{X\setminus B} f\,d\overline{\mu} = \lim_n \int_{X\setminus B} f_n\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu.$$ CQFD

6.29 Remarque. Retenir le principe de preuve du théorème 6.28, qui permet de remplacer des hypothèses satisfaites partout par des hypothèses satisfaites presque partout : (i) on se place d'abord dans le complémentaire d'un ensemble négligeable, où nous sommes dans le cadre du théorème « partout » ; (ii) nous concluons grâce au corollaire 6.24.

6.5 Conséquences du théorème de convergence monotone

Le cadre général est celui d'un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Toutes les fonctions de cette partie sont *mesurables*.

Grâce au théorème de convergence monotone, nous pouvons (enfin !) montrer la *linéarité de l'intégrale*.

6.30 Proposition. Si f, g ont une intégrale, $\lambda \in \mathbb{R}$, et si les sommes $f + \lambda g$ et $\displaystyle\int f + \lambda \int g$ sont bien définies, alors $f + \lambda g$ a une intégrale et $\displaystyle\int (f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$.

En particulier, si l'une des fonctions f, g prend uniquement des valeurs finies, si f est intégrable et g a une intégrale (ou l'inverse), alors $\displaystyle\int (f + \lambda g) = \int f + \lambda \int g$.

6.31 Remarque. Expliquons les hypothèses de la proposition.

$f + \lambda g$ est bien définie si et seulement si il n'existe pas de point $x \in X$ tel que $f(x) = \pm\infty$ et $\lambda g(x) = -f(x)$. En particulier, cette hypothèse est satisfaite si f (ou g) est finie en tout point.

Si f et g ont une intégrale, alors $\displaystyle\int f + \lambda \int g$ est bien définie si et seulement si nous n'avons pas en même temps $\displaystyle\int f = \pm\infty$ et $\displaystyle\lambda \int g = -\int f$. En particulier, cette hypothèse est satisfaite si f (ou g) est intégrable. ◇

Le résultat suivant donne plusieurs formes de l'*inégalité triangulaire*, qui dans le cas des intégrales prend la forme $\displaystyle\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

6.32 Proposition.

a) Si f a une intégrale, alors $\displaystyle\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

b) Si $|f| \leq g$ et g est intégrable, alors f est intégrable.

c) Si $f + g$ a une intégrale, alors $\displaystyle\left|\int (f + g)\right| \leq \int |f| + \int |g|$.

Avant d'énoncer la très utile *inégalité de Markov*, introduisons une notation pratique.

6.33 Notation. L'ensemble des points x satisfaisant une propriété $P(x)$ sera noté $[P]$. Exemples :

$$[f \geq 0] := \{x \in X\,;\, f(x) \geq 0\},\ [|f| > t] := \{x \in X\,;\, |f(x)| > t\},$$
$$[f \in A] := \{x \in X\,;\, f(x) \in A\},\ [f \leq t] := \{x \in X\,;\, f(x) \leq t\},\ \text{etc.}$$ ◇

6.34 Proposition (Inégalité de Markov). † Si $t > 0$, alors

$$\mu([|f| > t]) \leq \frac{1}{t} \int |f|. \tag{6.13}$$

Plus généralement, si $1 \leq p < \infty$ et $t > 0$, alors

$$\mu([|f| > t]) \leq \frac{1}{t^p}\int |f|^p. \qquad \diamond \ (6.14)$$

La proposition 6.35, qui suit, est une variante du résultat suivant, bien connu :

$$\left[f \text{ continue et positive sur } [0,1],\ \int_0^1 f(x)\,dx = 0\right] \implies f = 0.$$

6.35 Proposition.

a) Si $f \geq 0$ et $\displaystyle\int f = 0$, alors $f = 0$ p. p.

b) Si $\displaystyle\int |f| = 0$, alors $f = 0$ p. p.

c) Plus généralement, si g, h sont intégrables, $g \leq h$ et $\displaystyle\int g = \int h$, alors $g = h$ p. p.

Le résultat suivant permet de permuter série et intégrale.

6.36 Théorème (Intégrale d'une série)**.** Si f_n, $n \geq 0$, sont positives, alors

$$\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n.^{\ddagger} \qquad (6.15)$$

Les résultats suivants sont des variantes de la *relation de Chasles*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Le lien de la proposition 6.37 b) avec la relation de Chasles pourra être compris une fois établis les résultats de la section 6.6.

6.37 Proposition. On suppose que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ a une intégrale.

a) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $f_{|A}$ a une intégrale.

b) Si $X = A \sqcup B$, où $A, B \in \mathscr{T}$, alors $\displaystyle\int f = \int_A f + \int_B f.^{\dagger}$

c) Plus généralement, si $X = \sqcup_n A_n$, avec $A_n \in \mathscr{T}$, $\forall\, n$, alors $\displaystyle\int f = \sum_n \int_{A_n} f$.

†. Dans la littérature anglophone, connue plutôt comme l'*inégalité de Tchebychev*.

‡. Rappelons que les fonctions f_n sont implicitement supposées mesurables. Pas la fonction $f := \sum_n f_n$. Le théorème affirme donc : que f est mesurable, que f a une intégrale, que chaque f_n a une intégrale, et que l'égalité (6.15) est vraie.

d) Si $A_n \in \mathscr{T}$, $\forall\, n$, et $A_n \nearrow X$, alors $\displaystyle\int f = \lim_n \int_{A_n} f$.

Exercices

Le théorème de la suite croissante pour les ensembles s'accompagne du théorème de la suite décroissante (voir la proposition 4.2). Voici le compagnon décroissant du théorème de convergence monotone 6.18 (qui, rappelons-le, porte sur une suite croissante).

6.38 Exercice (Théorème de convergence décroissante)**.** Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables et positives sur X telle que $f_n \searrow f$.

a) Si $\displaystyle\int f_0 < \infty$, montrer que $\displaystyle\int f_n \to \int f$.

b) Montrer que, si $\displaystyle\int f_0 = \infty$, alors nous n'avons pas nécessairement $\displaystyle\int f_n \to \int f$. ◇

Voici un exercice facile une fois montrée la proposition 6.30. Il est instructif d'essayer de le prouver (même pour $n = 2$) sans faire appel à cette proposition.

6.39 Exercice. Soit f une fonction étagée, de représentation $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$. Si $\mu(A_i) < \infty$ pour tout i, alors f a une intégrale et dans ce cas nous avons $\displaystyle\int f = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$. ◇

L'exercice suivant est fondamental en théorie des probabilités. C'est une conséquence facile de la proposition 6.37.

6.40 Exercice (Mesure à densité)**.** Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to [0, \infty]$ une fonction *mesurable positive*.

Soit

$$\nu(A) := \int_A f\, d\mu,\ \forall\, A \in \mathscr{T}. \tag{6.16}$$

Montrer que ν est une mesure sur $\mathscr{T}$. ◇

6.41 Définition (Mesure à densité)**.** La mesure ν définie par (6.16) est une mesure *à densité* f par rapport à μ. ◇

†. Chacune des intégrales $\displaystyle\int_A f$, $\displaystyle\int_B f$ existe, d'après l'item a). Entre autres, l'item b) affirme que la somme $\displaystyle\int_A f + \int_B f$ existe. Remarque analogue concernant l'item c).

Démonstrations

Là où cela n'est pas fait, vérifier, grâce aux outils des sections 3.2 et 3.3, la mesurabilité de toutes les fonctions qui interviennent dans les preuves qui suivent.

Démonstration de la proposition 6.30. Prenons $\lambda = 1$. Le cas où λ est quelconque s'obtient en combinant le cas $\lambda = 1$ avec la proposition 6.12 (vérifier).

Commençons par le cas $f, g \geq 0$. Soient $(f_n)_n$, $(g_n)_n$ deux suites de fonctions étagées positives telles que $f_n \nearrow f$ et $g_n \nearrow g$. Alors $f_n + g_n \nearrow f + g$ et donc (en utilisant la proposition 6.4 b) et le corollaire 6.23)

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \lim_n \int (f_n + g_n) = \lim_n \left(\int f_n + \int g_n \right) = \lim_n \int f_n + \lim_n \int g_n \\ &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

Dans le cas général, nous avons

$$(f+g)_+ - (f+g)_- = f + g = f_+ - f_- + g_+ - g_-,$$

d'où

$$(f+g)_+ + f_- + g_- = (f+g)_- + f_+ + g_+.$$

Il s'ensuit que

$$\int (f+g)_+ + \int f_- + \int g_- = \int (f+g)_- + \int f_+ + \int g_+. \tag{6.17}$$

Si $\int f$, $\int g$ et $\int f + \int g$ ont un sens, alors $\int (f+g)_+ - \int (f+g)_-$ a un sens (vérifier, en examinant par exemple le cas où $\int f_+ = \infty$) et (6.17) donne

$$\int (f+g)_+ - \int (f+g)_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_-, \tag{6.18}$$

d'où

$$\begin{aligned}\int (f+g) &= \int (f+g)_+ - \int (f+g)_- = \int f_+ - \int f_- + \int g_+ - \int g_- \\ &= \int f + \int g.\end{aligned}$$

CQFD

Il est important de retenir le principe de la preuve de la proposition 6.30, que nous résumons dans la remarque suivante.

6.42 Remarque. Pour montrer une propriété des fonctions intégrables (ou qui ont une intégrale) f, g, etc. :

1. Nous commençons par les fonctions positives $f_\pm$, $g_\pm$, etc.
2. Les hypothèses sur f, g, etc., permettent de retrancher les formules obtenues.
3. Si nécessaire, pour montrer, dans le cas des fonctions positives, les propriétés demandées, il faut commencer par considérer des fonctions étagées et de passer à la limite en utilisant le théorème de convergence monotone ou sa conséquence, le corollaire 6.19.
4. Dans le cas des fonctions étagées, les propriétés demandées sont évidentes ou relativement simples à montrer.

Ainsi, ce schéma permet de ramener la preuve au *cas* plus *facile des fonctions étagées positives* et de la *compléter de manière automatique* en utilisant les étapes 1–3.

Démonstration de la proposition 6.32.

a) découle, via la proposition 6.30, de

$$\left|\int f\right| = \left|\int f_+ - \int f_-\right| \leq \int f_+ + \int f_- = \int (f_+ + f_-) = \int |f|.$$

b) Nous avons $0 \leq f_\pm \leq |f| = f_+ + f_- \leq g$, d'où $\displaystyle\int f_\pm < \infty$. (Conclure !)

c) En utilisant l'inégalité $|f+g| \leq |f| + |g|$ et l'item a) (pour $f+g$), nous obtenons

$$\left|\int (f+g)\right| \leq \int |f+g| \leq \int (|f| + |g|) = \int |f| + \int |g|.$$ CQFD

Démonstration de la proposition 6.34. Soit $A := [|f| > t] = \{x \in X\ ;\ |f(x)| > t\}$. Alors $|f|^p \geq t^p \chi_A$, d'où $\displaystyle\int |f|^p \geq \int t^p \chi_A = t^p \mu(A)$. CQFD

Démonstration de la proposition 6.35. Montrons d'abord que c) implique a) et b).

« c) $\Longrightarrow$ a) ». Il suffit de prendre $g := 0$ et $h := f$.

« c) $\Longrightarrow$ b) ». En prenant $g := 0$ et $h := |f|$, nous obtenons $|f| = 0$ p. p. Soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) = 0$ et $|f| = 0$ sur $X \setminus A$. Alors $f = 0$ sur $X \setminus A$, et donc $f = 0$ p. p.

c) Soient $A := [|f| = \infty]$, $B := [|g| = \infty]$, $C := A \cup B$. Grâce à la proposition 6.26, nous avons $A, B, C \in \mathscr{T}$ et $\mu(A) = \mu(B) = \mu(C) = 0$ (justifier).

Posons $\widetilde{g} := g\chi_{X\setminus C}$, $\widetilde{h} := h\chi_{X\setminus C}$, de sorte que $\widetilde{g}$ et $\widetilde{h}$ sont finies en tout point et $\widetilde{g} \leq \widetilde{h}$.

Le corollaire 6.24 donne

$$\int \widetilde{g} = \int g = \int h = \int \widetilde{h}. \tag{6.19}$$

En combinant (6.19) avec la proposition 6.30, nous obtenons

$$\int (\widetilde{h} - \widetilde{g}) = 0. \tag{6.20}$$

Posons $k := \widetilde{h} - \widetilde{g} \geq 0$. L'inégalité de Markov (6.13) combinée avec (6.20) donne $\mu([k > t]) = 0$, $\forall\, t > 0$. Soit $D := [k \neq 0] \in \mathscr{T}$. Comme $D = \cup_n [k > 2^{-n}]$ (justifier), nous obtenons $\mu(D) = 0$ (justifier).

Enfin, notons que, sur $X \backslash (C \cup D)$, nous avons $g = \widetilde{g} = \widetilde{h} = h$ (vérifier). Comme $C \cup D$ est négligeable (justifier), nous obtenons que $g = h$ p. p. CQFD

Démonstration du théorème 6.36. Posons $g_n := f_0 + f_1 + \ldots + f_n \geq 0$. Nous avons $0 \leq g_n \nearrow \sum_n f_n$, d'où $\sum_n f_n$ est mesurable. Par convergence monotone, nous trouvons

$$\int \sum_n f_n = \int \lim_n g_n = \lim_n \int g_n = \lim_n \left(\int f_0 + \int f_1 + \ldots \int f_n \right) = \sum_n \int f_n.$$ CQFD

Démonstration de la proposition 6.37. f ayant une intégrale, nous avons soit $\int f_+ < \infty$, soit $\int f_- < \infty$. Supposons, par exemple, que $\int f_- < \infty$.

Si $A \in \mathscr{T}$, posons $f_A := f \chi_A$.

a) Nous avons f_A mesurable et $0 \leq (f_A)_\pm \leq f_\pm$. Nous trouvons que $\int (f_A)_- < \infty$ (justifier), et donc $\int f_A = \int_A f$ a un sens (justifier).

b) Nous avons $(f_A)_\pm + (f_B)_\pm = f_\pm$, d'où (justifier)

$$\int f_\pm = \int (f_A)_\pm + \int (f_B)_\pm = \int_A f_\pm + \int_B f_\pm;$$

nous obtenons la conclusion en retranchant les deux égalités ainsi obtenues.

c) Il suffit de prouver l'égalité pour $f_\pm$ à la place de f (justifier) ; ainsi, nous pouvons supposer $f \geq 0$.

Posons $B_n := A_0 \sqcup A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_n$. Alors $B_n \nearrow X$, $B_n \in \mathscr{T}$ et $0 \leq f_{B_n} \nearrow f$. Nous trouvons (justifier, en particulier en utilisant le théorème de convergence monotone 6.18)

$$\begin{aligned} \int f &= \int \lim_n f_{B_n} = \lim_n \int f_{B_n} = \lim_n \int (f_{A_0} + f_{A_1} + \ldots + f_{A_n}) \\ &= \lim_n \left(\int f_{A_0} + \int f_{A_1} + \ldots + \int f_{A_n} \right) = \sum_n \int_{A_n} f. \end{aligned}$$

d) C'est compris dans le calcul précédent. CQFD

6.6 Lien avec les intégrales habituelles

Comme expliqué dans l'introduction générale de ce texte, l'*intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue dans* $\mathbb{R}$ a été construite pour généraliser l'*intégrale de Riemann*. Dans cette section, nous allons nous convaincre qu'il s'agit bien d'une généralisation, du moins lorsque la fonction à intégrer est continue.

6.43 Définition (Fonction Lebesgue intégrable)**.** Une fonction $f : A \to \overline{\mathbb{R}}$ est *Lebesgue intégrable* si :

i) $A \subset \mathbb{R}^n$ est *Lebesgue mesurable*, c'est-à-dire $A \in \mathscr{L}_n$.

ii) f est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue λ_n.

Définition analogue pour « f a une intégrale de Lebesgue ».

Dans cette section, nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$, avec des fonctions *continues sur un intervalle I*. Une fonction continue étant borélienne, nous avons

$$\int_I f\,d\lambda_1 = \int_I f\,d\nu_1,$$

au sens où l'une des intégrales existent si et seulement si l'autre existe, et dans ce cas elles sont égales (ceci découle de l'exercice 3.18 a) et de la proposition 6.21).

6.44 Proposition (Intégrale de Riemann et intégrale de Lebesgue)**.** Si $[a, b]$ est un *intervalle compact* et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction continue*, alors f est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$ et

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda_1 = \int_{[a,b]} f\,d\nu_1 = \int_a^b f(x)\,dx, \tag{6.21}$$

la dernière intégrale étant l'intégrale usuelle (de Riemann).

Une autre intégrale couramment utilisée est l'*intégrale généralisée*. Le cas le plus simple, que nous considérons ici, est celui d'une fonction continue sur un intervalle non compact I. Dans ce cas, l'intégrale généralisée se définit en approchant I par des intervalles compacts. Exemple typique : si $f :]0, 1] \to \mathbb{R}$ est continue, alors

$$\int_0^1 f(x)\,dx := \lim_{\varepsilon \to 0+} \int_\varepsilon^1 f(x)\,dx \text{ (sous réserve d'existence de la limite).}$$

Le résultat suivant fait le lien entre intégrales généralisées et de Lebesgue.

6.45 Proposition (Intégrale généralisée et intégrale de Lebesgue)**.** Soit I un *intervalle non compact* d'extrémités a et b. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une *fonction continue*. Nous avons :

a) Si f est positive, alors $\displaystyle\int_I f\, d\nu_1 = \int_a^b f(x)\, dx$.[†]

b) f est Lebesgue intégrable sur I si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ converge absolument, et dans ce cas $\displaystyle\int_I f\, d\nu_1 = \int_a^b f(x)\, dx$.

c) Si l'intégrale de Lebesgue $\displaystyle\int_I f\, d\nu_1$ existe, alors l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)$ dx existe et est égale à $\displaystyle\int_I f\, d\nu_1$.

d) Si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ existe, alors l'intégrale de Lebesgue $\displaystyle\int_I f\, d\nu_1$ n'existe pas nécessairement.

6.46 Convention (Abus de notation pour l'intégrale de Lebesgue)**.** Si $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, si $f : I \to \mathbb{R}$ a une intégrale de Lebesgue et s'il n'y a pas de risque de confusion, nous écrivons $\displaystyle\int_I f(x)\, dx$ *à la place de* $\displaystyle\int_I f\, d\nu_1$ ou $\displaystyle\int_I f\, d\lambda_1$.

Exercices

6.47 Exercice. Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := -(x+n)_-$. Montrer que :

a) $\displaystyle\int f_n\, d\nu_1$ existe, $\forall\, n$.

b) $f_n \nearrow 0$.

c) $\displaystyle\int f_n\, d\nu_1 \not\to \int 0\, d\nu_1$.

d) Comparer cet exemple aux hypothèses et à la conclusion du théorème de convergence monotone. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 6.44. Quitte à remplacer f par $f_\pm$, nous pouvons supposer $f \geq 0$ (justifier).

†. Cette égalité comprend l'existence des deux intégrales.

Soit σ une division de $[a, b]$, déterminée par les points $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Nous associons à cette division la *somme de Darboux inférieure*

$$s_\sigma := \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f.$$

Si nous définissons

$$f_\sigma : [a, b] \to \mathbb{R},\ f_\sigma := \sum_{j=1}^{n-1} \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f\chi_{[x_{j-1}, x_j[} + \inf_{[x_{n-1}, x_n]} f\chi_{[x_{n-1}, x_n]},$$

alors clairement f_σ est étagée et

$$s_\sigma = \int_{[a,b]} f_\sigma\, d\nu_1 = \int_{\mathbb{R}} f_\sigma\, \chi_{[a,b]}\, d\nu_1.$$

Rappelons les résultats suivants, rencontrés dans la construction de l'intégrale de Riemann :

a) Si τ est « plus fine » que σ,† alors $s_\sigma \leq s_\tau$ et $f_\sigma \leq f_\tau$.

b) Si nous prenons une suite $(\sigma_n)_n$ de divisions de plus en plus fines et telles que les *normes des divisions*,‡ $\|\sigma_n\|$, tendent vers 0, alors $f_{\sigma_n} \to f$ uniformément sur $[a, b]$.

c) Nous avons

$$\lim_n s_{\sigma_n} = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Si nous posons $g_n := f_{\sigma_n} \chi_{[a,b]}$, alors les g_n sont des fonctions étagée positives telles que $0 \leq g_n \nearrow f\chi_{[a,b]}$. Nous en déduisons (justifier) que

$$\int_{[a,b]} f\, d\nu_1 = \int \lim_n g_n\, d\nu_1 = \lim_n \int g_n\, d\nu_1 = \lim_n s_{\sigma_n} = \int_a^b f(x)\, dx. \qquad \text{CQFD}$$

Démonstration de la proposition 6.45. Nous prenons $I := [0, \infty[$; les arguments ci-dessous s'adaptent facilement à tous les autres types d'intervalles non compacts.

a) Posons $f_n := f\chi_{[0,n]}$, de sorte que $f_n \nearrow f$ (sur I). Avec la notation $\widetilde{g} := g\chi_I$, nous avons aussi $\widetilde{f_n} \nearrow \widetilde{f}$ (sur $\mathbb{R}$). Nous trouvons, en combinant le théorème de convergence monotone, la proposition 6.44 et la définition de l'intégrale généralisée,

$$\int_I f\, d\nu_1 = \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f}\, d\nu_1 = \int_{\mathbb{R}} \lim_n \widetilde{f_n}\, d\nu_1 = \lim_n \int_{\mathbb{R}} \widetilde{f_n}\, d\nu_1 = \lim_n \int_{[0,n]} f\, d\nu_1$$
$$= \lim_n \int_0^n f(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

†. τ est plus fine que σ si les points qui déterminent τ contiennent ceux qui déterminent σ.

‡. La norme d'une division σ déterminée par les points $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ est la longueur du plus grand intervalle $[x_{j-1}, x_j]$: $\|\sigma\| = \max_{j=1,\ldots,n}(x_j - x_{j-1})$.

b) Nous avons (justifier, en utilisant l'item a) et les propriétés des intégrales généralisées)

$$f \text{ Lebesgue intégrable sur } I \iff \int_I f_+ \, d\nu_1 < \infty \text{ et } \int_I f_- \, d\nu_1 < \infty \iff$$
$$\int_0^\infty f_+(x)\, dx < \infty \text{ et } \int_0^\infty f_-(x)\, dx < \infty \iff \int_0^\infty (f_+(x) + f_-(x))\, dx < \infty$$
$$\int_0^\infty |f(x)|\, dx < \infty \iff \int_0^\infty f(x)\, dx \text{ converge absolument.}$$

Si ces conditions équivalentes sont satisfaites, alors (justifier)

$$\int_I f\, d\nu_1 = \int_I f_+\, d\nu_1 - \int_I f_-\, d\nu_1 = \int_0^\infty f_+(x)\, dx - \int_0^\infty f_-(x)\, dx$$
$$= \int_0^\infty (f_+(x) - f_-(x))\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx.$$

c) Si f a une intégrale, alors $\int_I f_+\, d\nu_1 - \int_I f_-\, d\nu_1$ a un sens. Il s'ensuit que $\int_0^\infty f_+(x)\, dx - \int_0^\infty f_-(x)\, dx$ a également un sens. Nous obtenons l'égalité des deux intégrales comme dans l'item b).

d) Il suffit de trouver un contre-exemple. Nous définissons $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ de la manière suivante. Pour $k \in \mathbb{N}$, $f(4k) := 0$, $f(4k+1) := 1/(k+1)$, $f(4k+2) := 0$, $f(4k+3) := -1/(k+1)$. Ceci définit f sur $\mathbb{N}$. Nous définissons f sur $[0, \infty[\subset \mathbb{N}$ en exigeant qu'elle soit affine sur chaque intervalle $[n, n+1]$ avec $n \in \mathbb{N}$.[†]
Soit $E(x)$ la partie entière de x. Nous vérifions aisément que[‡]

$$0 \leq \int_0^x f(t)\, dt \leq \frac{1}{E(x/4)+1},\ \forall\, x \geq 0,$$

et donc f a une intégrale généralisée, qui vaut $\int_0^\infty f(x)\, dx = 0$.

Par ailleurs, nous avons

$$\int_{[0,4k]} f_+(x)\, dx = 1 + 1/2 + \ldots + 1/k,\ \forall\, k \in \mathbb{N}^*,$$

d'où (justifier)

$$\int_I f_+\, d\nu_1 = \int_0^\infty f_+(x)\, dx = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,4k]} f_+(x)\, dx$$
$$= \lim_{k\to\infty} (1 + 1/2 + \ldots + 1/k) = \infty.$$

De même, $\int_I f_-\, d\nu_1 = \infty$. Il s'ensuit que f n'a pas d'intégrale (de Lebesgue). CQFD

†. Tracer le graphe de f sur $[0, 8]$, pour avoir l'intuition de son allure.

‡. Indication. Écrire $x = 4k + r$, avec $k \in N$ et $0 \leq r < 4$, et montrer que $\int_0^{4k} f(t)\, dt = 0$ et que $J_k(r) := \int_{4k}^{4k+r} f(t)\, dt \leq \frac{1}{k+1}$. Cette deuxième propriété se vérifie graphiquement en notant que la plus grande valeur de $J_k(r)$ s'obtient pour $r = 1$, et vaut $\frac{1}{k+1}$.

6.7 Lien avec les séries

Le thème général de cette section est que la somme d'une série peut être interprétée comme une intégrale par rapport à la mesure de comptage.

Soit X un ensemble quelconque. Nous considérons sur X la *tribu* $\mathscr{P}(X)$ et, sur $\mathscr{P}(X)$, la *mesure de comptage* μ. Dans ce cadre, toute fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est mesurable, et toute partie de X est mesurable. Nous n'allons donc pas nous intéresser à la mesurabilité dans ce qui suit.

6.7.1 X est fini

Dans ce cas, toute fonction est une fonction étagée. Nous avons donc :

a) Si $f \geq 0$, alors $f = \sum_{x\in X} f(x)\chi_{\{x\}}$ est une représentation admissible. Il s'ensuit que $\displaystyle\int f = \sum_{x\in X} f(x)$.

b) Si f est de signe quelconque, alors f a une intégrale si et seulement si f ne prend pas en même temps les valeurs $\pm\infty$, et dans ce cas $\displaystyle\int f = \sum_{x\in X} f(x)$ (justifier, en partant de $f = f_+ - f_-$).

c) f est intégrable si et seulement si f n'a que des valeurs finies (justifier).

6.7.2 $X = \mathbb{N}$

Dans ce cas, nous pouvons identifier une fonction $f : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ à une suite $(a_n)_{n\geq 0}$.

Le résultat qui suit fait echo à la proposition 6.45.

6.48 Proposition.

a) Si $f \geq 0$, alors $\displaystyle\int f = \sum_n a_n$.

b) f est intégrable si et seulement si $\sum_n a_n$ est absolument convergente, et dans ce cas $\displaystyle\int f = \sum_n a_n$.

c) Si f a une intégrale, alors $\sum_n a_n$ existe et $\displaystyle\int f = \sum_n a_n$.

d) Si $\sum_n a_n$ existe, alors f n'a pas nécessairement une intégrale.

Démonstrations

Démonstration de la proposition 6.48.

a) Soit $A_n := \{0, \dots, n\} \nearrow \mathbb{N}$. Nous avons (justifier, en utilisant la proposition 6.37 d) et la section 6.7.1)

$$\int f = \lim_n \int_{A_n} f = \lim_n \sum_{j=0}^{n} a_j = \sum_n a_n.$$

b) Nous avons

$$f \text{ est intégrable} \Longleftrightarrow \text{les intégrales de } f_\pm \text{ sont finies} \Longleftrightarrow \text{les séries } \sum_n (a_n)_\pm$$

$$\text{sont convergentes} \Longleftrightarrow \text{ la série } \sum_n |a_n| = \sum_n ((a_n)_+ + (a_n)_-) \text{ est convergente.}$$

Si tel est le cas, alors

$$\int f = \int f_+ - \int f_- = \sum_n (a_n)_+ - \sum_n (a_n)_- = \sum_n [(a_n)_+ - (a_n)_-] = \sum_n a_n.$$

c) Si f a une intégrale, alors l'une des intégrales $\displaystyle\int f_\pm$ est finie. Supposons par exemple $\displaystyle\int f_- < \infty$. Alors $\sum_n (a_n)_- < \infty$, ce qui justifie l'égalité

$$\sum_n a_n = \sum_n (a_n)_+ - \sum_n (a_n)_- = \int f_+ - \int f_- = \int f.$$

d) Posons $a_n := (-1)^n/(n+1)$. Alors $\sum_n a_n$ converge (série alternée), alors que

$$\sum_n (a_n)_+ = \sum_n (a_n)_- = \infty$$

(vérifier). Par conséquent, f n'a pas d'intégrale (justifier). CQFD

6.7.3 X est dénombrable

Dans ce cas, il existe une bijection $\Phi : \mathbb{N} \to X$. Posons $g := f \circ \Phi : \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$.

6.49 Proposition. L'intégrale $\displaystyle\int_X f$ existe si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} g$ existe. En cas d'existence, nous avons $\displaystyle\int_X f = \int_{\mathbb{N}} g = \sum_n f(\Phi(n))$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 6.49. Il suffit de montrer l'égalité des intégrales dans le cas où $f \geq 0$ (justifier).

Soient $A_n := \{0, \ldots, n\}$, $B_n := \Phi(A_n)$. Alors $A_n \nearrow \mathbb{N}$ et, de plus, $B_n \nearrow X$ (vérifier), d'où (justifier, comme dans la proposition 6.48)

$$\int_X f = \lim_n \int_{B_n} f = \lim_n \sum_{x \in B_n} f(x) = \lim_n \sum_{k \in A_n} f(\Phi(k)) = \lim_n \int_{A_n} g = \int_{\mathbb{N}} g.$$

La deuxième égalité de l'énoncé découle de la proposition 6.48 c). CQFD

6.7.4 Sommation par paquets et convergence commutative

Dans cette partie, X est *dénombrable* et $\Phi : \mathbb{N} \to X$ est une bijection. Nous supposons toujours que $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *a une intégrale*.

Nous considérons une partition de X, $X = \sqcup_n A_n$, avec les A_n d. d. d. (chaque A_n est un « paquet »).

6.50 Proposition (Sommation par paquets)**.**

a) Nous avons $\displaystyle\int_X f = \sum_n \int_{A_n} f$.

b) Si chaque A_n est fini, nous avons $\displaystyle\int_X f = \sum_n \sum_{x \in A_n} f(x)$.†

c) Dans le cas particulier $X = \mathbb{N}^2$, nous avons

$$\int_{\mathbb{N}^2} f(m,n)\, d\mu(m,n) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(m,n) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(m,n) \right). \qquad \diamond$$

6.51 Définition (Série commutativement convergente)**.** Une série $\sum_n a_n$ est *commutativement convergente* si, pour toute bijection $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la somme de la série $\sum_n a_{\varphi(n)}$ existe et est égale à $\sum_n a_n$.‡ ◇

6.52 Proposition (Série commutativement convergente)**.**

a) Une série à termes positifs est commutativement convergente.

b) Une série absolument convergente est commutativement convergente. ◇

†. Cette égalité implique que « la somme de sommes » $\sum_n \sum_{x \in A_n} f(x)$ existe.
‡. Il n'est pas demandé que la série soit convergente.

Démonstrations

Démonstration de la proposition 6.50. Il suffit de considérer le cas où $f \geq 0$ (justifier).

a) est un cas particulier de la proposition 6.37 c).

b) découle de la section 6.7.1.

c) Justifions, par exemple, la première égalité.
Soit $A_n := \{(m,n)\ ;\ m \in \mathbb{N}\}$. Alors $\mathbb{N}^2 = \sqcup_n A_n$. Nous trouvons (proposition 6.50 a))

$$\int_{\mathbb{N}^2} f(m,n)\, d\mu(m,n) = \sum_n \int_{A_n} f. \tag{6.22}$$

À n fixé, soit $B_m := \{(j,n)\ ;\ 0 \leq j \leq m\}$. Alors $B_m \nearrow A_n$ et $f_{|A_n}$ a une intégrale, d'où (proposition 6.37 d))

$$\int_{A_n} f = \lim_m \int_{B_m} f = \lim \sum_{j=0}^{m} f(j,n) = \sum_m f(m,n). \tag{6.23}$$

Nous concluons en combinant (6.22) et (6.23). CQFD

Démonstration de la proposition 6.52.

a) La proposition 6.49 donne $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f = \int_{\mathbb{N}} f \circ \varphi$. Nous concluons grâce à la proposition 6.48.

b) découle de a) (justifier). CQFD

6.8 Pour aller plus loin

6.8.1 Caractérisation des fonctions Riemann intégrables

Nous avons investigué dans la section 6.6 le lien entre l'intégrale de Riemann ou généralisée d'une fonction continue et son intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue ν_1.

L'intégrale de Riemann est définie pour des fonctions qui ne sont pas nécessairement continues. Dans ce cadre, nous avons le résultat suivant.

6.53 Théorème (Critère de Lebesgue)**.** Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Nous avons :

a) f est Riemann intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si :
   1. f est bornée.
   2. L'ensemble de points de discontinuité de f est ν_1-négligeable.

b) Si f est Riemann intégrable, alors f est λ_1-intégrable sur $[a,b]$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 = \int_a^b f(x)\, dx$. (Donc, en particulier, une fonction Riemann-intégrable est Lebesgue-mesurable.) ◇

Rappelons que λ_1 est la complétée de la mesure de Lebesgue ν_1.

Pour la preuve complète de ce théorème, voir Natanson [17, section V.4] ; voir également Taylor [21, Proposition 3.10]. Nous montrons ici une partie de celui-ci :

6.54 Proposition. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction Riemann intégrable*, alors f est Lebesgue intégrable et $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 = \int_a^b f(x)\, dx$. $\diamond$

Démonstration. Nous pouvons supposer $f \geq 0$. En effet, si f est Riemann intégrable, alors f est bornée et il suffit de montrer l'égalité des deux intégrales pour la fonction $f - m \geq 0$, avec m minorant de f (justifier).

Nous utilisons les notations de la preuve de la proposition 6.44. Soit σ une division de $[a, b]$ et soit s^σ la *somme de Darboux supérieure*

$$s^\sigma := \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j-1}) \sup_{[x_{j-1},x_j]} f.$$

Nous associons à s^σ la fonction

$$f^\sigma : [a, b] \to \mathbb{R},\ f^\sigma := \sum_{j=1}^{n-1} \sup_{[x_{j-1},x_j]} f\chi_{[x_{j-1},x_j[} + \sup_{[x_{n-1},x_n]} f\chi_{[x_{n-1},x_n]},$$

de sorte que

$$s^\sigma = \int_{[a,b]} f^\sigma\, d\nu_1 = \int_{\mathbb{R}} f^\sigma\, \chi_{[a,b]}\, d\nu_1 = \int_{\mathbb{R}} f^\sigma\, \chi_{[a,b]}\, d\lambda_1.$$

Par ailleurs, nous avons alors $0 \leq f_\sigma \leq f \leq f^\sigma$.

Rappelons que, si $(\sigma_n)_n$ est une suite de divisions de plus en plus fines et telles que $\|\sigma_n\| \to 0$, alors :

a) $s_{\sigma_n} \nearrow \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$ et $s^{\sigma_n} \searrow \displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$.

b) $f_{\sigma_n} \nearrow$ et $f^{\sigma_n} \searrow$.

Posons $g := \lim_n f_{\sigma_n}$ et $h := \lim_n f^{\sigma_n}$. De ce qui précède, g et h sont boréliennes, $0 \leq g \leq f \leq h$ et (en utilisant le théorème de convergence monotone et l'exercice 6.38) $\displaystyle\int f_{\sigma_n}\, d\lambda_1 \nearrow \int g\, d\lambda_1$, $\displaystyle\int f^{\sigma_n}\, d\lambda_1 \searrow \int h\, d\lambda_1$. Il s'ensuit que

$$\int_{[a,b]} g\, d\lambda_1 = \int_{[a,b]} h\, d\lambda_1 = \int_a^b f(x)\, dx < \infty. \tag{6.24}$$

Comme $g \leq h$ et $\displaystyle\int_{[a,b]} (h - g)\, d\lambda_1 = 0$, nous obtenons que $g = h$ λ_1-p. p. sur $[a, b]$ (proposition 6.35). Soit $A \in \mathscr{L}_1$, $A \subset [a, b]$, tel que $\lambda_1(A) = 0$ et $g = h$ sur $[a, b]\backslash A$. Comme $g \leq f \leq h$, nous obtenons que $f = g = h$ sur $[a, b]\backslash A$ et en particulier $f = g$ λ_1-p. p. Il s'ensuit que f est λ_1-mesurable (proposition 4.19 a)).

Par ailleurs, comme $f = g$ λ_1-p. p. et l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} g\, d\lambda_1$ existe, il s'ensuit que l'intégrale $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda_1$ existe et que $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda_1 = \int_{[a,b]} g\, d\lambda_1$ (proposition 6.22 c)).

Finalement, en utilisant ce qui précède et (6.24), nous obtenons que $\displaystyle\int_{[a,b]} f\, d\lambda_1$ est finie et est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx$. CQFD

La réciproque de cette proposition est fausse : même pour une fonction bornée, l'intégrabilité au sens de Lebesgue n'entraîne pas celle au sens de Riemann ; voir l'exercice, classique, qui suit.

6.55 Exercice. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $f := \chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]}$.

a) Montrer que f est bornée et intégrable par rapport à ν_1 (et donc λ_1).

b) Soit σ une division de $[0, 1]$. Montrer que $s_\sigma = 0$ et $s^\sigma = 1$.

c) En déduire que f n'est pas intégrable au sens de Riemann. $\diamond$

6.8.2 De l'intégrale vers la dérivée

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est continue et si nous posons $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, $\forall\, x \in [a, b]$ (intégrale de Riemann ou Lebesgue), alors, d'après le théorème de Leibniz-Newton, F est dérivable et $F' = f$. Si f n'est plus continue, nous avons le résultat suivant.

6.56 Théorème (Théorème de différentiation de Lebesgue)**.** Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *Lebesgue intégrable*. Posons $F(x) := \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, $\forall\, x \in [a, b]$ (intégrale de Lebesgue). Nous avons :

a) F est dérivable ν_1-p. p.

b) En ν_1-presque tout point de dérivabilité nous avons $F'(x) = f(x)$. $\diamond$

Voir par exemple Stein et Shakarchi [20, section 3.1].

6.8.3 De la dérivée vers l'intégrale

Un corollaire du théorème de Leibniz-Newton est que si F est dérivable avec $f := F'$ continue, alors (*) $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x f(t)\, dt$, $\forall\, x \in [a, b]$.

Pour généraliser (*), nous pouvons affaiblir la condition sur f en demandant que F soit dérivable p. p. (par rapport à la mesure de Lebesgue) et que sa dérivée f soit Lebesgue intégrable.

Sous ces hypothèses, (*) n'est pas nécessairement vraie. Prenons, par exemple, $F(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2 \\ 1, & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$. Alors F est dérivable sauf en $1/2$ et sa dérivée vaut 0 p. p., mais (*) n'est pas satisfaite (vérifier). Plus généralement, (*) est fausse si F n'est pas continue (car le membre de droite de (*) l'est).

Même en ajoutant la condition de continuité de F, les hypothèses sur F' sont trop faibles. En effet, il existe une fonction continue $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ et $F'(x) = 0$ pour presque tout x. Pour l'existence d'une telle fonction F (« l'escalier du diable » ou « escalier de Cantor »), voir l'exercice 6.58.

En revanche, si nous imposons la condition plus forte de dérivabilité *partout*, alors nous avons le résultat suivant, dû à Lebesgue.

6.57 Théorème (Théorème de Leibniz-Newton généralisée)**.** Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable *en tout point* de $]a,b[$. Si F' est Lebesgue intégrable, alors $F(x) = F(a) + \displaystyle\int_a^x F'(t)\,dt$, $\forall\, x \in [a,b]$. ◇

Rappelons que, si F est dérivable, alors F' est borélienne et donc Lebesgue mesurable. Pour la preuve du théorème 6.57, voir Natanson [17, section IX.7] et Rudin [19, Theorem 7.21].

6.58 Exercice (Ensemble de Cantor maigre et escalier du diable)**.** Si $I = [a,b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors nous notons $\widetilde{I}$ l'union des deux intervalles obtenus en enlevant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I. Exemple : si $I = [-3,3]$ (de centre 0), alors $\widetilde{I} = [-3,-1] \cup [1,3]$.

De manière équivalente, si $I = [a,b]$ alors $\widetilde{I} := [a, a + (b-a)/3] \sqcup [a + 2(b-a)/3, b]$.

Nous construisons par récurrence une suite $(C_j)_{j\geq 0}$ décroissante d'ensembles comme suit :

1. $C_0 := [0,1]$.
2. Si C_j s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés d. d. d. : $C_j = \sqcup_{\ell=1}^m I_\ell$, alors C_{j+1} est défini comme $C_{j+1} := \sqcup_{\ell=1}^m \widetilde{I}_\ell$.

   Notons que, par construction, $C_j \subset [0,1]$ est un compact non vide et que $C_{j+1} \subset C_j$.

a) Posons $U_j := [0,1] \setminus C_j$. Montrer que C_j est une union de 2^j intervalles compacts d. d. d. et que U_j est union de $2^j - 1$ intervalles ouverts d. d. d.

b) Calculer $\nu_1(C_j)$, $j \in \mathbb{N}$.

c) Posons $C := \cap_{j\geq 0} C_j$. Montrer que C est non vide et calculer $\nu_1(C)$.
Pour $j \geq 1$ fixé, notons, dans l'ordre de gauche à droite, les intervalles compacts de la question a) qui donnent C_j : $C_j = [a_1, b_1] \sqcup \ldots \sqcup [a_{2^j}, b_{2^j}]$. Nous avons donc

$U_j =]b_1, a_2[\sqcup \ldots \sqcup]b_{2^j-1}, a_{2^j}[$. Nous définissons $F_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ par récurrence sur j, comme suit :

(i) $F_0(x) := x$, $\forall\, x \in [0,1]$.

(ii) $F_j(x) := (F_{j-1}(b_\ell) + F_{j-1}(a_{\ell+1}))/2$ si $x \in [b_\ell, a_{\ell+1}]$, $\forall\, \ell = 1, \ldots, 2^j - 1$.

(iii) $F_j(0) = 0$ et $F_j(1) = 1$.

(iv) F_j est affine sur $[a_\ell, b_\ell]$, $\forall\, \ell = 1, \ldots, 2^j - 1$.

d) Montrer que $|F_{j+1}(x) - F_j(x)| \leq 1/(3 \cdot 2^{j+1})$, $\forall\, x \in [0,1]$, $\forall\, j \geq 0$. En déduire qu'il existe $F : [0,1] \to [0,1]$ telle que $F_j \to F$ uniformément.

e) Montrer que $F(0) = 0$ et $F(1) = 1$.

f) Posons $U := [0,1] \backslash C$. Si $I \subset U$ est un intervalle ouvert, montrer que F est constante sur I.

g) En déduire :

i) Que F est continue sur $[0,1]$ et dérivable sur U.

ii) Que F n'est pas constante, mais que $F'(x) = 0$ pour ν_1-presque tout $x \in [0,1]$. $\diamond$

Chapitre 7

Les grands théorèmes

7.0 Aperçu

Nous travaillons dans un *espace mesuré*, avec des *fonctions mesurables*.

Le thème général de ce chapitre est la *permutation* de $\lim$ et $\int$ sous des hypothèses plus faibles que celles du théorème de convergence monotone, qui sont $0 \leq f_n \nearrow f$. Le but ultime étant de ne supposer ni la positivité, ni la monotonie.

En ne supposant plus la convergence monotone, donc uniquement sous les hypothèses $f_n \geq 0$ et $f_n \to f$, nous n'avons plus l'*égalité* $\lim\limits_n \int f_n = \int \lim\limits_n f_n$, mais uniquement l'*inégalité*

$$\int \lim_n f_n \leq \liminf_n \int f_n.^{\dagger} \tag{7.1}$$

C'est inégalité est un cas particulier du *lemme de Fatou*, théorème 7.1. L'importance de ce résultat est en premier lieu théorique : il permet d'obtenir sans effort les principaux résultats de permutation entre $\lim$ et $\int$, dont le plus célèbre est le *théorème de convergence dominée (de Lebesgue)* 7.2.

À son tour, le théorème de convergence dominée permet d'étudier les propriétés des *intégrales à paramètre(s)*. Pour prendre un exemple concret, soit

$$F(t) := \int_0^{\infty} \frac{\sin(tx)}{1+x^2}\, dx.$$

†. La limite $\lim\limits_n \int f_n$ n'existe pas, en général ; c'est la raison de l'apparition de la $\liminf$ dans (7.1).

C'est une intégrale dont t est le *paramètre*. Les questions basiques sont si F est continue ou dérivable ; elles seront étudiées dans les sections 7.2, respectivement 7.3.

Dans la section 7.4, nous reprenons l'étude de l'égalité $\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$, cette fois-ci sans hypothèse de positivité (théorème 7.18).

Comme cela a été vu avec le théorème 6.28 et sa preuve, et avec la remarque 6.29, *si les résultats qui suivent ont des hypothèses satisfaites p. p., nous pouvons traiter dans la preuve directement le cas où les hypothèses sont satisfaites partout.*

Compétences minimales attendues.

a) Savoir utiliser le théorème de convergence dominée 7.2.

b) Savoir étudier les intégrales à paramètre, via les théorèmes 7.10, 7.14, le corollaire 7.15.

c) La compétence principale à acquérir est de savoir majorer convenablement une fonction à paramètre. Typiquement, pour pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée il faut trouver une *bonne* majoration de la forme

$$|f_n(x)| \leq g(x), \ \forall\, n \in \mathbb{N}, \ \forall\, x \in X,$$

avec g *indépendante de* n et *aussi petite que possible*. Y arriver sera l'une des difficultés pratiques majeures de l'apprentissage. *En partie, l'analyse est l'art d'obtenir de bonnes inégalités.* $\diamond$

Dans tout ce chapitre, nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Sauf mention contraire, les fonctions considérées sont *mesurables*. Je ne vérifierai pas toujours la mesurabilité des fonctions *construites* à partir de fonctions données (par exemple, $\lim_n f_n$, avec chaque f_n mesurable). *Le lecteur est encouragé à le faire ; ceci fait partie de l'apprentissage de la théorie de la mesure.*

7.1 Lemme de Fatou, théorème de convergence dominée

7.1 Théorème (Lemme de Fatou)**.** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions positives p. p., et soit $f := \liminf_n f_n$. Alors $\displaystyle\int f \leq \liminf_n \int f_n$.

Ou encore :

$$\int \liminf_n f_n \leq \liminf_n \int f_n. \tag{7.2}$$

Même en ajoutant au lemme de Fatou l'hypothèse $f_n \to f$, l'inégalité (7.2) ne se transforme pas, en général, en égalité (voir l'exercice 7.8). Le résultat suivant donne une condition raisonnable et relativement facile à vérifier pour permuter $\lim$ et $\displaystyle\int$.

7.2 Théorème (Théorème de convergence dominée (de Lebesgue))**.** Soient f_n, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telles que :

(i) Il existe une fonction intégrable g telle que, pour tout n, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p. p.

(ii) $f_n(x) \to f(x)$ p. p.

Nous avons :

a) f est intégrable.

b) $\displaystyle\int |f_n - f| \to 0$.

c) $\displaystyle\int f_n \to \int f$, ou encore $\displaystyle\lim_n \int f_n = \int \lim_n f_n$.

7.3 Remarque. Comme énoncé, le théorème *a comme hypothèse la mesurabilité de f, en plus de celle des f_n.*

1. Si l'hypothèse (ii) est satisfaite *partout* et si chaque f_n est mesurable, alors f l'est ; dans ce cas particulier, la mesurabilité de f n'a donc pas à figurer parmi les hypothèses.
2. Un autre cas où la mesurabilité de f découle de celle des f_n est celui des mesures complètes ; ceci est une conséquence de la proposition 4.20.
3. Néanmoins, dans le cas général, la mesurabilité de f ne suit pas des autres hypothèses. En revanche, f est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable (proposition 4.20) et nous avons les conclusions suivantes, qui font echo aux conclusions a)–c) ci-dessus : a') f est $\overline{\mu}$-intégrable ; b') $\displaystyle\int |f_n - f|\, d\overline{\mu} \to 0$; c') $\displaystyle\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\overline{\mu}$. ◇

7.4 Remarque. La plus petite fonction g vérifiant (i) est $g := \sup_n |f_n|$. Donc nous pouvons remplacer (i) par la condition, plus faible, que $\sup_n |f_n|$ est intégrable.

Ceci donne le schéma suivant pour appliquer le théorème :

1. Vérifier que $(f_n)_n$ converge p. p.
2. Calculer $g := \sup_n |f_n|$.
3. Vérifier que g est $\overline{\mu}$-intégrable. [†]

Dans la pratique, $\sup_n |f_n|$ peut être difficile à calculer, et la formulation ci-dessus du théorème est plus convenable. ◇

Le résultat suivant a une grande importance théorique. Conceptuellement, il affirme que *les hypothèses du théorème de convergence dominée sont nécessaires*, du moins le long d'une sous-suite.

†. C'est-à-dire que son intégrale, qui existe car g est mesurable et positive, est finie.

7.5 Théorème (Réciproque du théorème de convergence dominée)**.** Soient f_n, f intégrables telles que $\displaystyle\int |f_n - f| \to 0$. Alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction intégrable g telles que :

(i') $|f_{n_k}| \leq g$, $\forall\, k$.

(ii') $f_{n_k} \to f$ p. p. ◇

Exercices

Les exercices qui suivent ont pour but d'illustrer la nécessité des hypothèses ou l'optimalité des conclusions des théorèmes de cette section.

7.6 Exercice. En considérant les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := -(x+n)_-$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, montrer que l'hypothèse $f_n \geq 0$ est essentielle pour avoir la conclusion du lemme de Fatou. ◇

7.7 Exercice. À l'aide de $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n := \chi_{[n,n+1[}$, montrer que l'hypothèse (i) du théorème de convergence dominée 7.2 est nécessaire. ◇

7.8 Exercice. Si $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $m^2 < n \leq (m+1)^2$, posons

$$A_n := [(n-m^2)/(2m+1), (n+1-m^2)/(2m+1)]$$

et $f_n := \chi_{A_n} + 1/(n+1)\chi_{[n+1,n+2]}$. Montrer que :

a) $\displaystyle\int |f_n|\, d\nu_1 \to 0$.

b) Il n'existe pas g intégrable telle que $|f_n| \leq g$, $\forall\, n$.

c) Pour tout $x \in [0,1]$, nous avons $f_n(x) \not\to 0$.

En déduire qu'en général, dans la réciproque du théorème de convergence dominée 7.5, il faut passer à une sous-suite afin d'avoir (i') et (ii'). ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 7.1. Nous pouvons supposer que $f_n \geq 0$ et $f_n \nearrow$ partout (voir la preuve du théorème 6.28 et la remarque 6.29).

Soit $g_n := \inf_{m \geq n} f_m$, qui est mesurable, positive et $\leq f_n$. Nous avons $0 \leq g_n \nearrow f$, d'où $\displaystyle\int f = \lim_n \int g_n \leq \liminf_n \int f_n$ (justifier, en utilisant le théorème de convergence monotone 6.18 et la monotonie de l'intégrale). CQFD

Démonstration du théorème 7.2. Soit $A_n \in \mathscr{T}$ négligeable tel que $|f_n(x)| \leq g(x)$ si $x \notin A_n$. Soit $B \in \mathscr{T}$ négligeable tel que $f_n(x) \to f(x)$ si $x \notin B$. Soit $A := B \cup \cup_n A_n \in \mathscr{T}$, qui est négligeable. En remplaçant les intégrales sur X par des intégrales sur $X \backslash A$ (grâce au corollaire 6.24), nous pouvons travailler dans $X \backslash A$ au lieu de X et supposer, ainsi, que les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites *partout au lieu de presque partout* (détailler).

Nous avons f mesurable et $|f| \leq g$, ce qui montre que f est intégrable (justifier).

Soit $B := g^{-1}(-\infty) \cup g^{-1}(\infty)$, qui est négligeable (justifier). Si $\widetilde{h} := h\chi_{B^c}$, il suffit de prouver la conclusion avec $\widetilde{f_n}$, $\widetilde{f}$, $\widetilde{g}$ à la place de f_n, f, g (justifier, en utilisant la proposition 6.26). Ainsi, nous pouvons supposer f_n, f, g finies.

Posons $g_n := 2g - |f - f_n|$, qui est mesurable et positive (vérifier). Nous avons $\lim_n g_n = 2g$, ce qui entraîne, via le lemme de Fatou,

$$2\int g = \int 2g \leq \liminf_n \int g_n = \liminf_n \int (2g - |f - f_n|) = 2\int g - \limsup_n \int |f - f_n|,$$

d'où $\limsup \int |f - f_n| \leq 0$. Ceci implique (justifier) $\lim_n \int |f - f_n| = 0$.

Pour la deuxième partie, nous utilisons l'inégalité triangulaire

$$\left| \int f - \int f_n \right| \leq \int |f - f_n| \to 0$$

(justifier, via les propositions 6.30 et 6.32). CQFD

Démonstration du théorème 7.5. Posons, pour g, h intégrables, $d(g, h) := \int |g - h|$, qui vérifie l'inégalité triangulaire et est donc une « pseudométrique ».† L'hypothèse est $d(f_n, f) \to 0$, et elle implique que $(f_n)_n$ est une suite de Cauchy pour la pseudométrique d.

Il existe donc une sous-suite $(f_{n_k})_k$ telle que $d(f_{n_k}, f_{n_\ell}) \leq 1/2^{k+1}$ si $k < \ell$.‡

Posons

$$g := |f_{n_0}| + \sum_{k \geq 0} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}|. \tag{7.3}$$

Alors g est mesurable, $|f_{n_0}| \leq g$ et

$$|f_{n_k}| = \left| f_{n_0} + \sum_{\ell=0}^{k-1} (f_{n_{\ell+1}} - f_{n_\ell}) \right| \leq |f_{n_0}| + \sum_{\ell=0}^{k-1} |f_{n_{\ell+1}} - f_{n_\ell}| \leq g, \ \forall\, k \geq 1.$$

Par ailleurs, nous avons (justifier)

$$\begin{aligned} \int g &= \int |f_{n_0}| + \sum_{k \geq 0} \int |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq \int |f_{n_0}| + \sum_{k \geq 0} 1/2^{k+1} \\ &= \int |f_{n_0}| + 1 < \infty. \end{aligned} \tag{7.4}$$

†. Une pseudométrique vérifie toutes les propriétés de la métrique (distance) sauf $d(x, y) = 0 \implies x = y$.

‡. Rappelons que, si $(x_n)_n$ est une suite de Cauchy pour une distance (ou pseudométrique) d, et si $(\alpha_k)_k$ est une suite de nombres strictement positifs, alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ telle que $d(x_{n_k}, x_{n_\ell}) < \alpha_k$, $\forall\, k < \ell$.

Soit $B := g^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$, qui vérifie $\mu(B) = 0$ (justifier). Pout tout $x \in B^c$, la série

$$f_{n_0}(x) + \sum_{k\geq 0} (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x))$$

est absolument convergente (ceci découle de (7.3) et de la définition de l'ensemble B), donc convergente. Notons $h(x)$ la somme de cette série, de sorte que $h(x) = \lim_k f_{n_k}(x)$ (pourquoi ?).

Posons, pour toute fonction u, $\widetilde{u} := u\chi_{B^c}$. Nous avons $\widetilde{f}_{n_k} \to \widetilde{h}$ et $|\widetilde{f}_{n_k}| \leq g$. Nous trouvons, par convergence dominée, $\displaystyle\int |\widetilde{f}_{n_k} - \widetilde{h}| \to 0$ (justifier, en utilisant (7.4)). Le corollaire 6.24 implique

$$\begin{aligned}\int |f - \widetilde{h}| &= \int |\widetilde{f} - \widetilde{h}| \leq \int |\widetilde{f} - \widetilde{f}_{n_k}| + \int |\widetilde{f}_{n_k} - \widetilde{h}| \\ &= \int |f - f_{n_k}| + \int |\widetilde{f}_{n_k} - \widetilde{h}| \to 0,\end{aligned}$$

d'où $f = \widetilde{h}$ p. p., ou encore $f_{n_k} \to f$ p. p. (justifier). CQFD

7.2 Intégrales dépendant d'un paramètre : continuité

Soit Λ une partie d'un espace métrique (Y, d).

7.9 Notation. Soit $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $f = f(x, \lambda)$.

a) La notation $f(\cdot, \lambda)$ désigne la *fonction partielle*

$$f(\cdot, \lambda) : X \to \mathbb{R},\ X \ni x \mapsto f(x, \lambda), \text{ de variable } x, \text{ obtenue en fixant } \lambda.$$

b) De même, $f(x, \cdot)$ désigne la *fonction partielle*

$$f(x, \cdot) : \Lambda \to \mathbb{R},\ \Lambda \ni \lambda \mapsto f(x, \lambda), \text{ de variable } \lambda, \text{ obtenue en fixant } x.$$ ◇

7.10 Théorème (Continuité des intégrales à paramètre)**.** Soit

$$f : X \times \Lambda \to \mathbb{R},\ f = f(x, \lambda).$$

Supposons :

(i) La fonction $f(\cdot, \lambda)$ est *mesurable* pour *tout* $\lambda \in \Lambda$.

(ii) La fonction $f(x, \cdot)$ est *continue* pour *presque tout* $x \in X$.

(iii) Pour tout $\lambda_0 \in \Lambda$, il existe $r > 0$ et une fonction intégrable $g = g(x)$: $X \to [0, \infty]$ telle que, pour *tout* $\lambda \in \overline{B}(\lambda_0, r) \cap \Lambda$,

$$|f(x, \lambda)| \leq g(x), \textit{ pour presque tout } x \in X.$$

Alors la fonction

$$F : \Lambda \to \mathbb{R},\, F(\lambda) := \int_X f(\cdot, \lambda)\, d\mu = \int_X f(x, \lambda)\, d\mu(x),$$

est continue.

7.11 Remarque.

1. Comme pour le théorème de convergence dominée, l'hypothèse clé dans le théorème 7.10 est l'existence de la fonction g vérifiant (iii).
2. Dans le théorème 7.10, ainsi que dans le théorème 7.14 et le corollaire 7.15, la fonction g dépend, en principe, de la boule $\overline{B}(\lambda_0, r)$, mais pas de λ.
3. Dans de nombreuses applications, Λ est un ouvert, et tout $r > 0$ tel que $\overline{B}(\lambda_0, r) \subset \Lambda$ convient.
4. Si $r = \infty$ convient,[†] la majorante g est la même pour tout λ. Néanmoins, cette situation « idéale » est rarement rencontrée dans la pratique ; le plus souvent, la fonction g dépend effectivement de λ_0 et r. ◇

Exercices

7.12 Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrable. Montrer que la *transformée de Fourier* de f, définie par

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x t} f(x)\, d\lambda_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\imath x t} f(x)\, dx,\, \forall\, t \in \mathbb{R},$$

est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. ◇

7.13 Exercice. Si $s > 1$, soit $\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} 1/n^s$ la *fonction zêta de Riemann*. Montrer que $\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 7.10. Soient $(\lambda_n)_{n \geq 1} \subset \Lambda$, $\lambda_0 \in \Lambda$ tels que $\lambda_n \to \lambda_0$. Soit n_0 tel que $\lambda_n \in \overline{B}(\lambda_0, r)$, $\forall\, n \geq n_0$. Posons $h_n(x) := f(x, \lambda_n)$, $h(x) := f(x, \lambda)$. Alors $|h_n| \leq g$ p. p. si $n \geq n_0$ (grâce à l'hypothèse (iii)) et $h_n \to h$ p. p. (grâce à l'hypothèse (ii)). En utilisant le théorème 7.2, nous obtenons $F(\lambda_n) = \displaystyle\int h_n \to \int h = F(\lambda)$. CQFD

†. C'est, par exemple, le cas dans exercice 7.12.

7.3 Intégrales dépendant d'un paramètre : dérivabilité

Dans cette partie, Λ *est un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *muni d'une norme*. Nous notons $\partial_j := \dfrac{\partial}{\partial \lambda_j}$. Plus généralement, ∂^α désigne une dérivée partielle par rapport à λ.

7.14 Théorème (Dérivabilité d'une intégrale à paramètre)**.** Soit

$$f : X \times \Lambda \to \mathbb{R},\, f = f(x, \lambda).$$

Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$. Supposons :

(i) La fonction $f(\cdot, \lambda)$ est intégrable *pour tout* $\lambda \in \Lambda$. (La fonction $F(\lambda) := \int f(\cdot, \lambda)\, d\mu$ est alors bien définie.)

(ii) Il existe $\partial_j f(x, \cdot)$ pour *presque tout* $x \in X$.

(iii) Pour toute boule $\overline{B}(\lambda_0, r) \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable $g = g(x)$ sur X telle que *pour tout* $\lambda \in \overline{B}(\lambda_0, r)$ on ait $|\partial_j f(x, \lambda)| \leq g(x)$ pour *presque tout* $x \in X$.

Alors :

a) La dérivée partielle $\partial_j F$ existe et est donnée par

$$\partial_j F(\lambda) = \int \partial_j f(x, \lambda)\, d\mu(x) = \int \frac{\partial f}{\partial \lambda_j} f(x, \lambda)\, d\mu(x).$$

Ou encore : *la dérivée de l'intégrale est l'intégrale de la dérivée.*

b) Si, de plus, $\partial_j f(x, \cdot)$ est continue pour presque tout x, alors $\partial_j F$ est continue.

Une récurrence basée sur le théorème 7.14 donne le résultat suivant pour les dérivées partielles d'ordre supérieur.

7.15 Corollaire. Soit $f : X \times \Lambda \to \mathbb{R}$, $f = f(x, \lambda)$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons :

(i) *Pour tout* $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot, \lambda)$ est intégrable (donc $F(\lambda) = \int f(\cdot, \lambda)\, d\mu$ est bien définie).

(ii) La fonction $f(x, \cdot)$ est de classe C^k pour *presque tout* $x \in X$.

(iii) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$ et pour toute boule $\overline{B}(\lambda_0, r) \subset \Lambda$, il existe une fonction intégrable $g = g(x)$ sur X telle que pour tout $\lambda \in \overline{B}(\lambda_0, r)$ on ait $|\partial^\alpha f(x, \lambda)| \leq g(x)$ pour *presque tout* $x \in X$.

Alors $F \in C^k$ et, pour tout α d'ordre $\leq k$, nous avons

$$\partial^\alpha F(\lambda) = \int \partial^\alpha f(x, \lambda)\, d\mu(x).$$

Exercices

7.16 Exercice. Montrer que la fonction zêta de Riemann de l'exercice 7.13 est de classe C^∞. ◇

7.17 Exercice (Difficile)**.** Supposons Λ connexe. Montrer nous pouvons, dans le théorème 7.14, remplacer l'hypothèse (i) par l'hypothèse plus faible
(i′) pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot, \lambda)$ est mesurable et il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $f(\cdot, \lambda_0)$ soit intégrable. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 7.14. Nous pouvons supposer les hypothèses (ii) et (iii) satisfaites pour tout $x \in X$ (voir la remarque 6.29).

a) Fixons $\lambda \in \Lambda$. Soit $r > 0$ tel que $\overline{B}(\lambda, r) \subset \Lambda$. Pour $t \in \mathbb{R}$ tel que $|t| < r$, posons

$$h(x, t) := \begin{cases} (f(x, \lambda + te_j) - f(x, \lambda))/t, & \text{si } t \neq 0 \\ \partial_j f(x, \lambda), & \text{si } t = 0 \end{cases},$$

de sorte que :

(j) À x fixé, $h(x, \cdot)$ est continue.

(jj) À t fixé, $h(\cdot, t)$ est mesurable (justifier, en considérant d'abord le cas $t \neq 0$, puis en faisant $t \to 0$).

(jjj) $|h(\cdot, t)| \leq g$ (justifier, en utilisant le théorème des accroissements finis).

Il s'ensuit que

$$\lim_{t \to 0} \frac{F(\lambda + te_j) - F(t)}{t} = \lim_{t \to 0} \int h(\cdot, t)\, d\mu = \int h(\cdot, 0)\, d\mu = \int \partial_j f(\cdot, \lambda)\, d\mu,$$

d'où la conclusion.

b) Dans le cas particulier où $\partial_j f(x, \cdot)$ est continue pour presque tout $x \in X$, le théorème 7.10 assure la continuité de $\partial_j F$. CQFD

7.4 Intégrale d'une série

Cette section fait écho au théorème 6.36. Rappelons la philosophie générale de ce chapitre : donner des versions des théorèmes du chapitre 6 (basés sur la convergence monotone des fonctions positives) sans supposer la monotonie ou la positivité.

Commençons par rappeler que, si $(f_n)_n$ est une suite de fonctions mesurables, alors la fonction donnée par $f(x) = \begin{cases} \lim_n f_n(x), & \text{si } \lim_n f_n(x) \text{ existe} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, est mesurable (proposition 3.34).

7.18 Théorème (Intégrale d'une série)**.** Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions mesurables telle que $\sum_n \int |f_n| < \infty$. Nous avons :

a) Pour presque tout x, la série $\sum_n f_n(x)$ converge.

b) Si nous posons $f(x) := \begin{cases} \sum_n f_n(x), & \text{si } \sum_n f_n(x) \text{ existe} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, alors f est intégrable et $\int f = \sum_n \int f_n$.

Ou encore (si $\sum_n f_n$ existe en tout point) :

$$\int \sum_n f_n = \sum_n \int f_n$$

(*l'intégrale de la somme est la somme des intégrales*).

Démonstrations

Démonstration du théorème 7.18.

a) Soit $g := \sum_n |f_n|$, qui est positive et mesurable. Nous avons (justifier)

$$\int g = \int \sum_n |f_n| = \sum_n \int |f_n| < \infty,$$

d'où g est intégrable.
Il s'ensuit que l'ensemble $A := g^{-1}(\infty) \in \mathscr{T}$ est négligeable (justifier). Pour $x \in A^c$, la série $\sum_n f_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente. Ceci donne a).

b) Soit $B := \{x \in X \, ; \, \sum_n f_n(x) \text{ n'existe pas}\}$, de sorte que $B \in \mathscr{T}$, $B \subset A$. (Justifier pourquoi $B \in \mathscr{T}$, par exemple en montrant que $B^c \in \mathscr{T}$.) Soit $g_n := \sum_{k \leq n} f_k \chi_{B^c}$. Alors $g_n \to f$, g_n est mesurable et $|g_n| \leq \sum_k |f_k| \leq g$. Le théorème de convergence dominée donne $\int g_n \to \int f$. Par ailleurs, nous avons $g_n = \sum_{k \leq n} f_k$ p. p., d'où $\int g_n = \sum_{k \leq n} \int f_k$ (justifier). Nous obtenons

$$\int f = \lim_n \int g_n = \lim_n \sum_{k \leq n} \int f_k = \sum_k \int f_k.$$

CQFD

Chapitre 8

Mesures produit

8.0 Aperçu

Le volume $\mathrm{vol}\,(C)$ d'un cylindre (plein) droit C est le produit de sa hauteur h et de l'aire $\mathrm{aire}\,(B)$ de sa base B. De manière équivalente, si $C = [a, b] \times B$,

$$\mathrm{vol}\,([a, b] \times B) = (b - a) \times \mathrm{aire}\,(B) = \nu_1([a, b]) \times \mathrm{aire}\,(B). \tag{8.1}$$

À travers cette formule, nous voyons qu'à partir de la mesure $\mu(A)$ d'un ensemble A et de la mesure $\nu(B)$ d'un ensemble B, nous pouvons « naturellement » définir la mesure de l'ensemble $A \times B$ comme le produit $\mu(A) \times \nu(B)$.

Dans ce chapitre, nous allons généraliser cette approche, en construisant la *mesure produit* $\mu \otimes \nu$ de deux mesures μ et ν (section 8.2). Le *principe* de la construction est celui *de Cavalieri* [†] : pour calculer le volume $\mathrm{vol}(S)$ d'un solide S, nous calculons l'aire $\mathrm{aire}(S^h)$ de sa section, à chaque hauteur h, et nous obtenons

$$\mathrm{vol}\,(S) = \int \mathrm{aire}\,(S^h)\, dh,$$

ce qui peut également s'écrire comme

$$\nu_3(S) = \int \left(\int_{S^h} d\nu_2 \right) d\nu_1(h). \tag{8.2}$$

Au préalable, il faudra construire la tribu que mesure $\mu \otimes \nu$: il s'agit de la *tribu produit* $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ de deux tribus $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}$, dont nous donnons la définition et quelques propriétés fondamentales dans la section 8.1.

†. Cavalieri était un mathématicien italien du 17e siècle. Mais ce principe est déjà énoncé au 3e siècle par le mathématicien Liu Hui. Voir `https://fr.wikipedia.org/wiki/Liu_Hui`.

L'exemple introductif (les aires et les volumes) est cohérent avec cette démarche générale : le produit de la mesure de longueur ν_1 et de la mesure d'aire ν_2 est bien la mesure de volume ν_3 (corollaire 8.16). Au passage, nous pourrons (enfin) prouver l'existence de la mesure de Lebesgue ν_n, $n \geq 2$, en admettant l'existence de ν_1 (corollaire 8.11).

La section 8.3 traite le cas des produits à plusieurs facteurs, qui repose sur des récurrences immédiates à partir du cas de deux facteurs.

Dans la section 8.4, nous étudions le passage aux mesures complétées dans les produits.

Les sections 8.5 et 8.6 sont dédiées aux intégrales itérées, c'est-à-dire aux égalités du style (8.2)

$$\begin{aligned} \int f(x,y)\, d\mu \otimes \nu(x,y) &= \int \left(\int f(x,y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ &= \int \left(\int f(x,y)\, d\nu(y) \right) d\mu(x). \end{aligned} \tag{8.3}$$

Le prototype de cette égalité est la sommation des éléments d'un tableau. En sommant

1. tous les éléments du tableau ;
2. les éléments de chaque colonne, puis en sommant les résultats obtenus ;
3. les éléments de chaque ligne, puis en sommant les résultats obtenus,

nous obtenons à chaque fois le même résultat, *si le tableau est fini*.

Pour les *tableaux infinis*, et plus généralement, pours les intégrales, la validité de (8.3) est plus délicate. (8.3) est vraie *si f est positive* (*théorème de Tonelli*) ou *si f est intégrable* (*théorème de Fubini*).

Compétences minimales attendues.

a) Savoir déterminer les coupes des ensembles et utiliser leurs propriétés de mesurabilité.
b) Savoir utiliser le théorème de Tonelli.
c) Savoir utiliser le théorème de Fubini, notamment *vérifier l'intégrabilité de l'intégrande.* † ◇

Dans ce chapitre, nous travaillons dans deux espaces mesurés, $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$.

†. L'application correcte du théorème de Fubini sera un défi majeur.

8.1 Tribu produit

Dans cette section, nous définissons la *tribu produit* $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ des tribus $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}$. A posteriori, les éléments de $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ seront mesurés par la *mesure produit*. Cependant, la définition de la tribu produit n'exige pas l'existence des mesures.

8.1 Définition (Pavé, ensemble élémentaire)**.**

a) Un *pavé* de $X \times Y$ est un ensemble de la forme $A \times B$, avec $A \in \mathscr{T}$ et $B \in \mathscr{S}$.

b) Un *ensemble élémentaire* est une partie de $X \times Y$ qui s'écrit comme une union *finie* de pavés.

8.2 Définition (Tribu produit)**.** La *tribu produit* (de $\mathscr{T}$ et $\mathscr{S}$) est la tribu (sur $X \times Y$) engendrée par les pavés de $X \times Y$.

Elle est notée $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.

Le résultat suivant donne un exemple *fondamental* et *explicite* de tribu produit.

8.3 Proposition. Nous avons $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

Les deux résultats suivants « se voient » facilement sur un dessin et joueront un rôle important dans la preuve de l'existence et de l'unicité de la mesure produit.

8.4 Lemme. Soit $\mathscr{C}$ la collection des ensembles élémentaires.

a) $\mathscr{C}$ est un clan sur $X \times Y$.

b) Nous avons $\mathscr{T}(\mathscr{C}) = \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. $\diamond$

8.5 Lemme. Tout ensemble $E \in \mathscr{C}$ s'écrit comme une union finie de la forme $E = \sqcup_j A_j \times B_j$, avec :

(i) $A_j \in \mathscr{T}$ et $B_j \in \mathscr{S}$, $\forall\, j$.

(ii) Si $j \neq \ell$, alors soit $A_j \cap A_\ell = \emptyset$, soit $B_j \cap B_\ell = \emptyset$. $\diamond$

Exercices

Voici un autre exemple *explicite* de tribu produit.

8.6 Exercice. Si X et Y sont a. p. d., alors $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 8.3.

« $\supset$ » Si $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_{n+m}$, avec I_j intervalle ouvert, $\forall\, j$, est un pavé ouvert de $\mathbb{R}^{n+m}$, alors $P = P_1 \times P_2$, où $P_1 := I_1 \times \cdots \times I_n$, respectivement $P_2 := I_{n+1} \times \cdots \times I_{n+m}$ sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$, respectivement $\mathbb{R}^m$.[†] P appartient donc à $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$ (et d'autant plus à $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$). Il s'ensuit que la tribu engendrée par ces pavés (c'est-à-dire $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$, voir la proposition 2.16 c)) est contenue dans $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$.

« $\subset$ » Soit $\mathscr{A} := \{A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}\ ;\ A \times \mathbb{R}^m \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}\}$. Alors $\mathscr{A}$ contient les pavés ouverts (car, dans ce cas, $A \times \mathbb{R}^m$ est un pavé ouvert). Par ailleurs, comme $(A \times \mathbb{R}^m)^c = A^c \times \mathbb{R}^m$ et $(\cup_j A_j) \times \mathbb{R}^m = \cup_j A_j \times \mathbb{R}^m$, nous obtenons que $\mathscr{A}$ est une tribu.

Il s'ensuit que $\mathscr{A}$ contient la tribu engendrée par les pavés ouverts, c'est-à-dire $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Conclusion : nous avons $A \times \mathbb{R}^m \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$ pour tout $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. De même, $\mathbb{R}^n \times B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$ pour tout $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Si $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$, alors $A \times B = (A \times \mathbb{R}^m) \cap (\mathbb{R}^n \times B) \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$. Il s'ensuit que $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$ contient la tribu engendrée par les $A \times B$, avec $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$, c'est-à-dire $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$. CQFD

Démonstration du lemme 8.4.

a) Clairement, $\mathscr{C}$ est stable par union finie et contient $\emptyset$.

En notant que $(A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$, nous obtenons facilement que $\mathscr{C}$ est stable par intersection (vérifier).

Soit $E = \cup_{k=1}^n A_k \times B_k \in \mathscr{C}$, avec $A_k \in \mathscr{T}$, $B_k \in \mathscr{S}$, $\forall\, 1 \leq k \leq n$. Alors

$$E^c = \bigcap_{k=1}^n (A_k \times B_k)^c = \bigcap_{k=1}^n \left([(A_k)^c \times Y] \cup [X \times (B_k)^c]\right).$$

Ainsi, E^c est intersection finie d'éléments de $\mathscr{C}$, donc appartient à $\mathscr{C}$.

Il s'ensuit que $\mathscr{C}$ est un clan.

b) Nous avons clairement $\mathscr{C} \subset \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, d'où $\mathscr{T}(\mathscr{C}) \subset \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.

Par ailleurs, les pavés sont dans $\mathscr{C}$, et donc la tribu engendrée par les pavés est contenue dans celle engendrée par $\mathscr{C}$, ou encore $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S} \subset \mathscr{T}(\mathscr{C})$.

Finalement, nous avons, par double inclusion, $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S} = \mathscr{T}(\mathscr{C})$. CQFD

Démonstration du lemme 8.5. Soit $E = \cup_{k=1}^n C_k \times D_k$, avec $C_k \in \mathscr{T}$, $D_k \in \mathscr{S}$, $\forall\, k$. Nous prouvons le lemme par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant clair.

Supposons le lemme vrai pour $n - 1$ et soit E comme ci-dessus.

Nous avons $X \times Y = E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3 \sqcup E_4$, où $E_1 := C_n \times D_n$, $E_2 := (C_n)^c \times D_n$, $E_3 := C_n \times (D_n)^c$, $E_4 := (C_n)^c \times (D_n)^c$ (vérifier).

†. Ne pas confondre *pavé de* $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ (définition 8.1) et *pavé de* $\mathbb{R}^{n+m}$ (définition 4.34).

Il s'ensuit que $E = \sqcup_{i=1}^{4}(E \cap E_i)$. En posant $F_i := E \cap E_i$, $i = 1, \ldots, 4$, les F_i sont d. d. d. et $F_1 = C_n \times D_n$. Par ailleurs, nous avons $E_i \cap (C_n \times D_n) = \emptyset$, $i = 2, 3, 4$, d'où $F_i = \cup_{j=1}^{n-1}[(C_j \times D_j) \cap E_i]$, $i = 2, 3, 4$. Chaque ensemble $(C_j \times D_j) \cap E_i$ étant de la forme $A \times B$, avec $A \in \mathscr{T}$, $B \in \mathscr{S}$, l'hypothèse de récurrence appliquée aux F_i, $i = 2, 3, 4$, permet d'écrire chaque F_i, $i = 1, 2, 3, 4$, comme une union finie de produits $A_j^i \times B_j^i$ satisfaisant (i) et (ii) (à i fixé). Si $i \neq k$, alors pour tout j et ℓ nous avons soit $A_j^i \cap A_\ell^k = \emptyset$, soit $B_j^i \cap B_\ell^k = \emptyset$ (vérifier, en utilisant le fait que $A_j^i \subset E_i$ et la définition explicite des E_i). Il s'ensuit que la collection de tous les pavés $A_j^i \times B_j^i$ (indexés sur j et i) satisfait (i) et (ii). Par ailleurs, son union est E. CQFD

8.2 Mesure produit

Cette section est consacrée à la construction de la *mesure produit*. Ce sera l'occasion d'apprécier l'utilité du théorème de la classe monotone 2.9.

8.7 Définition (Coupe)**.** Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. La *coupe* de E en $x \in X$ est

$$E_x := \{y \in Y \ ; \ z = (x, y) \in E\}.$$

De même, la *coupe* de E en $y \in Y$ est

$$E^y := \{x \in X \ ; \ z = (x, y) \in E\}.$$

Une propriété *fondamentale* des éléments E de $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ est que leurs *coupes* sont mesurables. Cette propriété permet la mise en œuvre du principe de Cavalieri et la construction de la mesure produit.

8.8 Proposition. Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.

Pour tout $x \in X$, nous avons $E_x \in \mathscr{S}$.

De même, pour tout $y \in Y$, nous avons $E^y \in \mathscr{T}$. ◇

Une autre propriété indispensable à la mise en pratique du principe de Cavalieri est la suivante.

8.9 Théorème. Supposons ν σ-finie.

Pour tout $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, l'application $X \ni x \mapsto \nu(E_x)$ est $\mathscr{T}$-mesurable.

De même, si μ est σ-finie, l'application $Y \ni y \mapsto \mu(E^y)$ est $\mathscr{S}$-mesurable. ◇

La proposition 8.8 et le théorème 8.9 donnent un sens à l'application

$$\mathscr{T} \otimes \mathscr{S} \ni E \mapsto \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x) \in [0, \infty],$$

qui, selon le principe de Cavalieri, doit permettre de calculer le « volume » de E. Ceci est formalisé dans le résultat central de cette section :

8.10 Théorème (Définition de la mesure produit)**.**

a) Supposons μ *ou* ν σ-finie. Il existe sur $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ une mesure ξ telle que

$$\xi(A \times B) = \mu(A)\,\nu(B),\ \forall\, A \in \mathscr{T},\ B \in \mathscr{S}. \tag{*}$$

b) Supposons μ *et* ν σ-finies. La mesure ξ ci-dessus est unique. Elle est notée $\mu \otimes \nu$ et est la *mesure produit* de μ et ν.

Nous pouvons maintenant (enfin !) justifier l'existence de la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

8.11 Corollaire (Existence et unicité de la mesure de Lebesgue ν_n)**.** Il existe une unique mesure borélienne ν_n dans $\mathbb{R}^n$ telle que, pour chaque pavé†

$$P = I_1 \times \cdots \times I_n$$

de $\mathbb{R}^n$ on a

$$\nu_n(P) = m(P) = \nu_1(I_1) \times \cdots \times \nu_1(I_n).$$

Exercices

En plus de la mesure de Lebesgue, voici un autre exemple de mesure produit.

8.12 Exercice. Si X, Y sont a. p. d. et si μ, ν sont les mesures de comptage sur X, Y, alors $\mu \otimes \nu$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 8.8. Faisons la preuve pour E_x. Soit $x \in X$ arbitraire, fixé.

Notons $\mathscr{A} := \{E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}\ ;\ E_x \in \mathscr{S}\}$. Alors $\mathscr{A}$ contient les pavés $A \times B$, avec $A \in \mathscr{T}$, $B \in \mathscr{S}$, car dans ce cas E_x est soit B (si $x \in A$), soit $\varnothing$ (si $x \notin A$).

De plus, $\mathscr{A}$ contient $\mathscr{C}$, car si $E = \cup_{k=1}^n A_k \times B_k \in \mathscr{C}$, alors $E_x = \cup_{k=1}^n (A_k \times B_k)_x \in \mathscr{S}$ (détailler).

Par ailleurs, $\mathscr{A}$ est une classe monotone : si $(E_n)_n \subset \mathscr{A}$ et $E_n \nearrow E$, alors $E_x = (\cup_n E_n)_x = \cup_n (E_n)_x \in \mathscr{S}$. De même, si $E_n \searrow E$, alors $E_x = \cap_n (E_n)_x \in \mathscr{S}$ (justifier, en combinant le lemme 8.4 a) et le théorème de la classe monotone 2.9).

†. Rappelons (définition 4.34) qu'un *pavé de* $\mathbb{R}^n$ est un produit de la forme $P = I_1 \times \cdots \times I_n$, avec chaque I_j intervalle.

Il s'ensuit que $\mathscr{A}$ contient la classe monotone engendrée par $\mathscr{C}$, qui est $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.

Conclusion : pour tout $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, nous avons $E \in \mathscr{A}$, et donc $E_x \in \mathscr{S}$ (pour tout $x \in X$). CQFD

Démonstration du théorème 8.9. Nous faisons la preuve lorsque ν est σ-finie.

Soit, pour $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$,

$$f = f_E : X \to [0, \infty],\ f(x) := \nu(E_x),\ \forall\, x \in X.$$

Soit

$$\mathscr{A} := \{E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}\ ;\ f \text{ est } \mathscr{T} - \text{mesurable}\}.$$

Nous voulons montrer que $\mathscr{A} = \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$.

Étape 1. Preuve du théorème si ν est finie. Soit d'abord $E \in \mathscr{C}$. Nous écrivons $E = \sqcup_j A_j \times B_j$, comme dans le lemme 8.5. Nous avons alors (justifier)

$$E_x = \cup_{x \in A_j} B_j = \sqcup_{x \in A_j} B_j,$$

d'où

$$f(x) = \sum_{x \in A_j} \nu(B_j) = \sum_j \chi_{A_j}(x)\, \nu(B_j).$$

De manière équivalente, nous avons $f = \sum_j \nu(B_j)\, \chi_{A_j}$, d'où f est mesurable. Ainsi, $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$.

Pour conclure, il suffit de montrer que $\mathscr{A}$ est une classe monotone (et d'invoquer le lemme 8.4 a) et le théorème de la classe monotone 2.9).

Soit d'abord $(E_n)_n \subset \mathscr{A}$ une suite croissant vers E. Le théorème de la suite croissante donne $\nu(E_x) = \lim_n \nu((E_n)_x)$ (vérifier). Ainsi, f est une limite de fonctions $\mathscr{T}$-mesurables, donc $\mathscr{T}$-mesurable.

Dans le cas d'une suite décroissante, nous pouvons appliquer le théorème de la suite décroissante (car ν est supposée finie) pour obtenir à nouveau f mesurable (détailler).

Étape 2. Preuve du théorème si ν est σ-finie. Soit $(Y_n)_n \subset \mathscr{S}$ une suite telle que $Y_n \nearrow Y$ et $\nu(Y_n) < \infty$, $\forall\, n$. Si nous posons $\nu_n(B) := \nu(B \cap Y_n)$, $\forall\, B \in \mathscr{S}$, alors ν_n est une mesure finie (car $\nu_n(B) \leq \nu(Y_n) < \infty$) et $\nu(B) = \lim_n \nu_n(B)$ (théorème de la suite croissante). Nous avons

$$f(x) = \nu(E_x) = \lim_n \nu_n(E_x),\ \forall\, E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S},\ \forall\, x \in X.$$

Chaque fonction $x \mapsto \nu_n(E_x)$ étant $\mathscr{T}$-mesurable (étape 1), f l'est également. CQFD

Démonstration du théorème 8.10.

a) Supposons, par exemple, ν σ-finie. Pour $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, posons, avec $f = f_E$ comme dans la preuve du théorème 8.9,

$$\xi(E) := \int_X f\, d\mu = \int_X f_E\, d\mu = \int_X \nu(E_x)\, d\mu(x),\ \forall\, E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}. \tag{8.4}$$

Alors ξ satisfait (*) (vérifier). En particulier, $\xi(\varnothing) = 0$.

Il reste à vérifier l'axiome ii) d'une mesure. Soit $(E_n)_n \subset \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ une suite d. d. d. Soit $E := \sqcup_n E_n$. Si nous posons $f_n(x) := \mu((E_n)_x)$, $\forall\, n$, alors $f = \sum_n f_n$, car $E_x = \sqcup(E_n)_x$ (vérifier). Nous obtenons (justifier)

$$\xi(E) = \int f\, d\mu = \int \sum_n f_n\, d\mu = \sum_n \int f_n\, d\mu = \sum \xi(E_n).$$

ξ est donc une mesure satisfaisant (*).

b) Soit λ une mesure avec les mêmes propriétés que ξ. Soient $(C_n)_n \subset \mathscr{T}$, $(D_n)_n \subset \mathscr{S}$ des suites telles que $\cup_n C_n = X$, $\cup_n D_n = Y$, $\mu(C_n) < \infty$, $\nu(D_n) < \infty$, $\forall\, n$. Alors $\xi(C_n \times D_n) < \infty$ et $X \times Y = \cup_n C_n \times D_n$.

Par ailleurs, nous avons $\lambda(E) = \xi(E)$, $\forall\, E \in \mathscr{C}$. En effet, nous pouvons écrire, comme dans le lemme 8.5, $E = \sqcup_j A_j \times B_j$, avec $A_j \in \mathscr{T}$, $B_j \in \mathscr{S}$, $\forall\, j$. Nous obtenons

$$\lambda(E) = \lambda(\sqcup_j A_j \times B_j) = \sum_j \mu(A_j)\nu(B_j) = \xi(\sqcup_j A_j \times B_j) = \xi(E). \tag{8.5}$$

La proposition 4.24 combinée avec (8.5) donne $\lambda = \xi$. CQFD

Si μ *et* ν sont σ-finies, nous pouvons également définir la mesure

$$\eta(E) := \int_Y \mu(E^y)\, d\nu(y),\ \forall\, E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S},$$

qui, par symétrie, a les mêmes propriétés que ξ. L'unicité prouvée dans l'item b) a alors la conséquence suivante.

8.13 Corollaire. Si ν et μ sont σ-finies, alors nous avons

$$\mu \otimes \nu(E) = \int \nu(E_x)\, d\mu(x) = \int \mu(E^y)\, d\nu(y),\ \forall\, E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}. \tag{8.6}$$

Démonstration du corollaire 8.11. L'unicité a été montrée dans la proposition 4.38 c).

Pour l'existence, faisons la preuve par récurrence sur n. Le cas $n = 1$ a été traité dans le chapitre 5 (théorème 5.1). Soit $n \geq 2$. Supposons l'existence de ν_{n-1} acquise. ν_1 et ν_{n-1} étant σ-finies (justifier), nous pouvons définir $\nu_1 \otimes \nu_{n-1}$, qui a la propriété requise (justifier, en utilisant la proposition 8.3 et le théorème 8.10). CQFD

8.3 Produits itérés

Plus généralement, nous pouvons considérer des espaces mesurés $(X_j, \mathscr{T}_j, \mu_j)$, $j = 1, \ldots, k$, avec $k = 3, 4, \ldots$, et construire (a priori) plusieurs tribus et mesures sur $X_1 \times \cdots \times X_k$. Par exemple, si $k = 3$, nous pouvons considérer les tribus $(\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2) \otimes \mathscr{T}_3$ ou $\mathscr{T}_1 \otimes (\mathscr{T}_2 \otimes \mathscr{T}_3)$ et les mesures $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3$ ou $\mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$. Le résultat est le même, quel que soit l'ordre des opérations. Nous en donnons la preuve pour $k = 3$; le cas général s'obtient par récurrence.

8.14 Proposition. Nous avons $(\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2) \otimes \mathscr{T}_3 = \mathscr{T}_1 \otimes (\mathscr{T}_2 \otimes \mathscr{T}_3)$ =la tribu engendrée par les produits de la forme $A_1 \times A_2 \times A_3$, avec $A_j \in \mathscr{T}_j$, $j = 1, 2, 3$. ◇

8.15 Proposition. Si les mesures μ_j sont σ-finies, $j = 1, 2, 3$, alors $(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$=l'unique mesure λ telle que $\lambda(A_1 \times A_2 \times A_3) = \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2)\, \mu_3(A_3)$ pour $A_j \in \mathscr{T}_j$, $j = 1, 2, 3$. ◇

Grâce à l'associativité du produit, nous pouvons définir sans ambiguité les produits $\mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2 \otimes \ldots \otimes \mathscr{T}_n$ et $\mu_1 \otimes \mu_2 \otimes \ldots \otimes \mu_n$. Nous noterons ces produits $\otimes_1^n \mathscr{T}_i$, respectivement $\otimes_1^n \mu_i$.

Une conséquence immédiate des propositions 8.14 et 8.15 est la propriété suivante de la mesure de Lebesgue.

8.16 Corollaire. Si ν_n est la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, alors $\nu_n \otimes \nu_m = \nu_{n+m}$ et, plus généralement, $\otimes_1^k \nu_{n_j} = \nu_{\sum_{j=1}^k n_j}$. ◇

Les résultats des sections suivantes seront prouvés pour $k = 2$. Néanmoins, ils ont des variantes pour $k \geq 3$, que nous allons énoncer sans preuve. Les preuves de ces variantes sont dans l'esprit de celles des propositions 8.14 et 8.15.

Démonstrations

Démonstration de la proposition 8.14. Notons $\mathscr{S}_j$, $j = 1, 2, 3$, les trois tribus de l'énoncé. Montrons par exemple que $\mathscr{S}_1 = \mathscr{S}_3$.

« $\supset$ » Si $A_j \in \mathscr{T}_j$, $j = 1, 2, 3$, alors $A_1 \times A_2 \times A_3 = (A_1 \times A_2) \times A_3 \in \mathscr{S}_1$ (justifier), d'où $\mathscr{S}_3 \subset \mathscr{S}_1$ (justifier).

« $\subset$ » Il suffit de montrer que $E \times A_3 \in \mathscr{S}_3$ si $E \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ et $A_3 \in \mathscr{T}_3$ (justifier). Nous fixons $A_3 \in \mathscr{T}_3$. Soit $\mathscr{A} := \{E \in \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2\,;\, E \times A_3 \in \mathscr{S}_3\}$. Clairement, $\mathscr{A}$ est une classe monotone. De plus, elle contient le clan $\mathscr{C}$ engendré par les produits $A_1 \times A_2$, avec $A_1 \in \mathscr{T}_1$, $A_2 \in \mathscr{T}_2$. Donc $\mathscr{A}$ contient $\mathscr{T}(\mathscr{C}) = \mathscr{T}_1 \otimes \mathscr{T}_2$ (justifier). CQFD

Démonstration de la proposition 8.15. Pour $A_j \in \mathscr{T}_j$, $j = 1, 2, 3$, nous avons

$$\begin{aligned}(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3(A_1 \times A_2 \times A_3) &= (\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3((A_1 \times A_2) \times A_3)\\ &= \mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2)\, \mu_3(A_3)\\ &= \mu_1(A_1)\, \mu_2(A_2)\, \mu_3(A_3)\\ &= \mu_1(A_1)\, (\mu_2 \otimes \mu_3)(A_2 \times A_3) \qquad (8.7)\\ &= \mu_1(A_1) \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)(A_2 \otimes A_3)\\ &= \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)(A_1 \times (A_2 \times A_3))\\ &= \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)(A_1 \times A_2 \times A_3).\end{aligned}$$

Comme dans la preuve du théorème 8.10 b), nous concluons grâce à (8.7) et à la proposition 4.24. CQFD

Démonstration du corollaire 8.16. Soit $n := \sum_{j=1}^{k} n_j$.

Notons d'abord que les produits sont bien définis, car la mesure de Lebesgue ν_{n_j} est σ-finie (proposition 4.38). Par ailleurs, en utilisant la proposition 8.3, nous obtenons, par récurrence sur k, l'égalité $\otimes_1^k \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n_j}} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Il s'ensuit que les mesures $\otimes_1^k \nu_{n_j}$ et ν_n sont définies sur la même tribu, $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

Nous avons $\otimes_1^k \nu_{n_j}(P) = \nu_n(P) = m(P)$ si P est un pavé de $\mathbb{R}^n$ (vérifier). Nous concluons grâce au théorème 4.35. CQFD

8.4 Passage aux mesures complétées

Nous pouvons, à partir de $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$, compléter les tribus et mesures comme suit.

Procédé 1. Compléter $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ par rapport à $\mu \otimes \nu$. Nous obtenons de cette façon la tribu complétée $\overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$ et la mesure complétée $\overline{\mu \otimes \nu}$.

Procédé 2. Compléter d'abord $\mathscr{T}$, $\mathscr{S}$, μ, ν, puis considérer la tribu et la mesure produit. Ceci donne la tribu $\overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}$ et la mesure $\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}$.

Puis compléter la tribu et la mesure ainsi construites. Nous obtenons ainsi la tribu $\overline{\overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}}$ et la mesure $\overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}}$.

Clairement, la tribu du procédé 2 contient celle obtenue par le procédé 1 et la mesure obtenue par le procédé étend celle obtenue par le procédé 1. Il se trouve que le procédé 2 n'apporte rien de plus que le procédé 1.

8.17 Théorème. Si μ, ν sont σ-finies, alors les procédés 1 et 2 donnent les mêmes tribus, respectivement mesures. ◇

Par conséquent, il sufit de compléter les tribus après avoir fait leur produit.

Nous donnons plus bas la preuve du théorème 8.17, mais pas celle, similaire, du théorème 8.18.

8.18 Théorème. Si les mesures μ_i sont σ-finies, $i = 1, \ldots, n$, alors nous avons $\overline{\otimes_1^n \mathscr{T}_i} = \overline{\otimes_1^n \overline{\mathscr{T}}_i}$ et $\overline{\otimes_1^n \mu_i} = \overline{\otimes_1^n \overline{\mu}_i}$. ◇

Pour la mesure de Lebesgue, ces théorèmes se traduisent de la manière suivante.

8.19 Corollaire. Nous avons $\overline{\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_m} = \mathscr{L}_{n+m}$ et $\overline{\lambda_n \otimes \lambda_m} = \lambda_{n+m}$.

De même, nous avons $\overline{\otimes_1^n \mathscr{L}_1} = \mathscr{L}_n$ et $\overline{\otimes_1^n \lambda_1} = \lambda_n$.

Exercices

8.20 Exercice. Nous savons que

$$\mathscr{T} \otimes \mathscr{S} \subset \overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}} \subset \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}.$$

a) Montrer qu'en général les deux inclusions sont strictes. Plus spécifiquement, montrer que, pour le produit de $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$ avec lui-même, nous avons une double inclusion stricte, et que ceci revient à

$$\mathscr{B}_{\mathbb{R}^2} \subsetneq \mathscr{L}_1 \otimes \mathscr{L}_1 \subsetneq \mathscr{L}_2.$$

b) En déduire que $\lambda_1 \otimes \lambda_1 \neq \lambda_2$. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 8.17. Clairement, nous avons $\mathscr{T} \subset \overline{\mathscr{T}}$, $\mathscr{S} \subset \overline{\mathscr{S}}$ et $\mu \otimes \nu = \overline{\mu} \otimes \overline{\nu}$ sur $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, d'où $\overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}} \subset \overline{\overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}}$ et $\overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}}$ est une extension de $\overline{\mu \otimes \nu}$ (justifier).

Il reste à montrer que

$$\overline{\overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}} \subset \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}} \text{ et } \overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}}(E) = \overline{\mu \otimes \nu}(E), \ \forall\, E \in \overline{\overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}}. \tag{8.8}$$

Soit $E \in \overline{\overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}}$. Pour un tel E, il existe $E_1, E_2 \in \overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}$ tels que $E_1 \subset E \subset E_2$ et $\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(E_2 \backslash E_1) = 0$.

De plus, nous avons (pourquoi ?)

$$\overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}}(E) = \overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(E_1) = \overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(E_2).$$

Nous allons montrer la propriété suivante : (*) il existe $F_1, F_2 \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ tels que $F_1 \subset E_1 \subset E \subset E_2 \subset F_2$ et $\mu \otimes \nu(F_2 \backslash F_1) = 0$. Admettons pour l'instant la validité de (*).

De (*), il s'ensuit à la fois que $E \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$ et que (justifier)

$$\begin{aligned}\overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}}(E) = \overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(E_1) \geq \overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(F_1) = \mu \otimes \nu(F_1) = \overline{\mu \otimes \nu}(E) = \mu \otimes \nu(F_2) \\ = \overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(F_2) \geq \overline{\mu} \otimes \overline{\nu}(E_2) = \overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}}(E).\end{aligned}$$

Au passage, nous aurons montré que $E \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$ (première partie de (8.8)) et que $\overline{\overline{\mu} \otimes \overline{\nu}}(E) = \overline{\mu \otimes \nu}(E)$ (deuxième partie de (8.8)).

Il reste à montrer (*). J'affirme qu'il suffit de montrer : (**) pour tout $G \in \overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}$, il existe $G_1, G_2 \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ tels que $G_1 \subset G \subset G_2$ et $\mu \otimes \nu(G_2 \backslash G_1) = 0$.

En effet, si (**) est vraie, alors il existe $H_1, H_2, I_1, I_2 \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ tels que $H_1 \subset E_1 \subset H_2$, $I_1 \subset E_2 \subset I_2$, $\mu \otimes \nu(H_2 \backslash H_1) = 0$, $\mu \otimes \nu(I_2 \backslash I_1) = 0$. Posons alors $F_1 := H_1$, $F_2 := I_2$, de sorte que $F_1 \subset E_1 \subset E_2 \subset F_2$. De plus, nous avons (vérifier)

$$\begin{aligned}\mu \otimes \nu(F_2 \backslash F_1) =& \overline{\mu \otimes \nu}(F_2 \backslash F_1) = \overline{\mu \otimes \nu}((I_2 \backslash E_2) \sqcup (E_2 \backslash E_1) \sqcup (E_1 \backslash H_1)) \\ =& \overline{\mu \otimes \nu}(I_2 \backslash E_2) + \overline{\mu \otimes \nu}(E_2 \backslash E_1) + \overline{\mu \otimes \nu}(E_1 \backslash H_1) \\ \leq& \overline{\mu \otimes \nu}(I_2 \backslash I_1) + \overline{\mu \otimes \nu}(E_2 \backslash E_1) + \overline{\mu \otimes \nu}(H_2 \backslash H_1) \\ =& \mu \otimes \nu(I_2 \backslash I_1) + \overline{\mu \otimes \nu}(E_2 \backslash E_1) + \mu \otimes \nu(H_2 \backslash H_1) = 0,\end{aligned}$$

ce qui donne (*).

Prouvons donc (**). Soit

$$\mathscr{A} := \{G \in \overline{\mathscr{T}} \otimes \overline{\mathscr{S}}\ ;\ (**) \text{ est vraie pour } G\}.$$

Clairement, $\mathscr{A}$ est une classe monotone. En effet, si, par exemple, $G^k \nearrow G$, avec $G^k \in \mathscr{A}$, $\forall\, k$, soient $G_1^k, G_2^k \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ tels que $G_1^k \subset G^k \subset G_2^k$ et $\mu \otimes \nu(G_2^k \backslash G_1^k) = 0$, $\forall\, k$.

Nous avons (justifier)

$$\cup_k G_1^k \subset G \subset \cup_k G_2^k$$

et

$$\mu \otimes \nu(\cup_k G_2^k \backslash \cup_k G_1^k) \leq \mu \otimes \nu(\cup_k (G_2^k \backslash G_1^k)) \leq \sum_k \mu \otimes \nu(G_2^k \backslash G_1^k) = 0.$$

Une inégalité analogue est vraie si $G^k \searrow G$ et si nous remplaçons les unions par des intersections.

Par ailleurs, $\mathscr{A}$ contient le clan $\overline{\mathscr{C}}$ engendré par les produits $A \times B$, avec $A \in \overline{\mathscr{T}}$, $B \in \overline{\mathscr{S}}$. En effet, si $G \in \overline{\mathscr{C}}$, alors nous pouvons écrire $G = \sqcup_j A^j \times B^j$, avec $A^j \in \overline{\mathscr{T}}$, $B^j \in \overline{\mathscr{S}}$, l'union étant d. d. d. et finie (pourquoi ?). Si $A_1^j, A_2^j \in \mathscr{T}$, $B_1^j, B_2^j \in \mathscr{S}$ sont tels que $A_1^j \subset A^j \subset A_2^j$, $B_1^j \subset B^j \subset B_2^j$, $\mu(A_2^j \backslash A_1^j) = 0$, $\nu(B_2^j \backslash B_1^j) = 0$, alors les $A_1^j \times B_1^j$ sont d. d. d. et $\sqcup_j A_1^j \times B_1^j \subset G \subset \cup_j A_2^j \times B_2^j$.

De plus, nous avons

$$(\cup_j A_2^j \times B_2^j) \backslash (\sqcup_j A_1^j \times B_1^j) \subset \cup_j ((A_2^j \backslash A_1^j) \times B_2^j \cup A_2^j \times (B_2^j \backslash B_1^j)),$$

d'où

$$\mu\otimes\nu((\cup_j A_2^j\times B_2^j)\backslash(\cup A_1^j\times B_1^j))\le\sum_j \mu\otimes\nu((A_2^j\backslash A_1^j)\times B_2^j)$$
$$+\sum_j \mu\otimes\nu(A_2^j\times(B_2^j\backslash B_1^j))=0,$$

ce qui montre que $G\in\mathscr{A}$.

Pour résumer, $\mathscr{A}$ est une classe monotone qui contient $\overline{\mathscr{C}}$. Il s'ensuit que $\mathscr{A}=\overline{\mathscr{T}}\otimes\overline{\mathscr{S}}$ (justifier), d'où la conclusion. CQFD

Démonstration du corollaire 8.19. Prouvons par exemple les deux premières propriétés. Par définition, nous avons $\lambda_n:=\overline{\nu_n}$ et $\mathscr{L}_n:=\overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}}$. Compte tenu du fait que $\nu_n\otimes\nu_m=\nu_{n+m}$ (corollaire 8.16), nous obtenons (via la proposition 8.3)

$$\overline{\mathscr{L}_n\otimes\mathscr{L}_m}=\overline{\overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}}\otimes\overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}}}=\overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}\otimes\mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}}=\overline{\mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}}=\mathscr{L}_{n+m}.$$

De plus, $\overline{\lambda_n\otimes\lambda_m}=\overline{\overline{\nu_n}\otimes\overline{\nu_m}}=\overline{\nu_n\otimes\nu_m}=\overline{\nu_{n+m}}=\lambda_{n+m}$. CQFD

8.5 Les grands théorèmes pour $\mu\otimes\nu$

Dans cette section, nous supposons que *μ et ν sont σ-finies* et nous munissons $X\times Y$ de la tribu produit $\mathscr{T}\otimes\mathscr{S}$ et de la mesure produit $\mu\otimes\nu$. Nous étudions la validité de la double égalité

$$\begin{aligned}\int f(x,y)\,d\mu\otimes\nu(x,y)&=\int\left(\int f(x,y)\,d\mu(x)\right)\,d\nu(y)\\&=\int\left(\int f(x,y)\,d\nu(y)\right)\,d\mu(x)\,;\end{aligned}\tag{8.9}$$

l'interprétation intuitive de cette formule a été présentée dans la section 8.0.

Sous des hypothèses de mesurabilité, cette égalité est vraie *si f est positive* (*théorème de Tonelli* 8.24) ou, reformulée correctement, si *f est intégrable* (*théorème de Fubini* 8.27).

8.21 Remarque. L'hypothèse que *μ et ν sont σ-finies* peut-être affaiblie, mais le prix à payer est que nous n'aurons plus que des « demi-énoncés ». Comme observé dans la section 8.2, nous pouvons définir une mesure « type mesure produit » si *μ ou ν sont σ-finies*; mais dans la définition de cette mesure μ et ν ne jouent pas le même rôle. Nous obtenons, sous cette hypothèse plus générale, « la moitié » des énoncés qui suivent. Par exemple, si nous supposons uniquement ν σ-finie (sans hypothèse sur μ), alors la conclusion de la proposition 8.22 ci-dessous devient : f_x est $\mathscr{S}$-mesurable, $\forall\,x\in X$. Lorsque les deux mesures sont σ-finies, les énoncés deviennent plus symétriques et sont souvent plus utiles dans les applications. Nous laissons au lecteur le soin de formuler les variantes « ou » des résultats « et » de cette section. ◇

8.22 Proposition. Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$-mesurable.

Pour tout $x \in X$, la fonction partielle

$$f_x : E_x \to \overline{\mathbb{R}},\ f_x(y) := f(x, y),\ \forall\, y \in E_x,$$

est $\mathscr{S}$-mesurable.

De même, pour tout $y \in Y$, la fonction partielle

$$f^y : E^y \to \overline{\mathbb{R}},\ f^y(x) := f(x, y),\ \forall\, x \in E^y,$$

est $\mathscr{T}$-mesurable.

8.23 Remarque. De même, si nous considérons un produit de plusieurs facteurs, les applications partielles obtenues en figeant une partie des variables d'une fonction mesurable f sont mesurables. Par exemple : si $f : \prod_1^4 X_i \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\otimes_1^4 \mathscr{T}_i$-mesurable, alors l'application $f_{x_1,x_2} := f(x_1, x_2, \cdot, \cdot) : X_3 \times X_4 \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mathscr{T}_3 \otimes \mathscr{T}_4$-mesurable. ◇

8.24 Théorème (Théorème de Tonelli)**.** Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Soit $f : E \to [0, \infty]$ une *fonction $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$-mesurable positive*. Alors :

a) La fonction $Y \ni y \mapsto \displaystyle\int_{E^y} f(x, y)\, d\mu(x)$ est $\mathscr{S}$-mesurable.

b) Nous avons

$$\int_E f\, d\mu \otimes \nu = \int_Y \left(\int_{E^y} f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

c) Soit $\pi_Y(E) := \{y \in Y\,;\ E^y \neq \varnothing\}$. Si $\pi_Y(E) \in \mathscr{S}$, alors

$$\int_E f\, d\mu \otimes \nu = \int_{\pi_Y(E)} \left(\int_{E^y} f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

Énoncé analogue en échangeant les rôles de x et y.

Cas particulier : si $E = X \times Y$, alors

$$\int_{X \times Y} f\, d\mu \otimes \nu = \int_Y \left(\int_X f(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y).$$

8.25 Corollaire. Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Si $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$-mesurable, alors f

est $\mu \otimes \nu$-intégrable si et seulement si

$$\int_Y \left(\int_{E^y} |f(x,y)|\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty$$

ou

$$\int_X \left(\int_{E_x} |f(x,y)|\, d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty.$$

8.26 Remarque. *L'ensemble $\pi_Y(E)$ n'est pas toujours $\mathscr{S}$-mesurable.* Lebesgue avait affirmé en 1905 que $\pi_Y(E)$ était *toujours* mesurable, du moins lorsqu'il s'agit des boréliens de $\mathbb{R}^2$. Cette erreur célèbre a donné naissance à une branche de l'analyse, la *théorie descriptive des ensembles*, sous l'impulsion initiale de Souslin, qui a repéré en 1916 l'erreur de Lebesgue `https://fr.wikipedia.org/wiki/Théorie_descriptive_des_ensembles`.

Néanmoins, dans les cas concrets que nous allons rencontrer, $\pi_Y(E)$ est mesurable. C'est le pendant de la remarque 2.17. $\diamond$

8.27 Théorème (Théorème de Fubini)**.** Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *intégrable*. Alors :

a) Pour ν-presque tout y, la fonction $f^y = f(\cdot, y)$ est μ-intégrable sur E^y.

b) Si nous posons $g(y) := \begin{cases} \displaystyle\int_{E^y} f(x,y)\, d\mu(x), & \text{si cette intégrale existe} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$, alors g est ν-intégrable.

c) Nous avons

$$\int_E f\, d\mu \otimes \nu = \int_Y g(y)\, d\nu(y).$$

d) Soit $\pi_Y(E) := \{y \in Y\,;\, E^y \neq \varnothing\}$. Si $\pi_Y(E) \in \mathscr{S}$, alors

$$\int_E f\, d\mu \otimes \nu = \int_{\pi_Y(E)} g(y)\, d\nu(y).$$

Énoncé analogue en échangeant les rôles de x et y.
Cas particulier : si $E = X \times Y$, alors $E^y = X$, $\forall\, y \in Y$, et

$$\int_{X\times Y} f\, d\mu \otimes \nu = \int_Y g(y)\, d\nu(y).$$

8.28 Remarque. L'hypothèse *fondamentale* du théorème de Fubini est l'*intégrabilité de f* : $\displaystyle\int_E |f(x,y)|\, d\mu \otimes \nu(x,y) < \infty$.

Concrètement, cette condition est souvent vérifiée à l'aide du corollaire 8.25. ◇

8.29 Remarque. Pour comprendre le rôle des hypothèses (et de la nécessité d'introduire la fonction auxiliaire g dans le cas du théorème de Fubini), examinons ces deux théorèmes dans le cas particulier où la mesure ν est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ (et, dans ce cas, l'intégration devient sommation, voir la section 6.7.2).

1. Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage, le théorème de Tonelli 8.24 est un cousin du théorème 6.36. Notons tout de même que le théorème 6.36 garde tout son intérêt, car *μ n'est pas supposée σ-finie* dans ce théorème.[†]
2. Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage, le théorème de Fubini 8.27 est un cousin du théorème 7.18.
   À nouveau, ce théorème est vrai même sans l'hypothèse μ σ-finie.
   (a) Notons que la fonction f dans l'énoncé du théorème 7.18 joue le rôle de g dans le théorème de Fubini.
   (b) Examinons l'hypothèse $\displaystyle\sum_n \int |f_n| < \infty$ dans le théorème 7.18. En utilisant le corollaire 8.25 et l'interprétation de la somme comme intégrale par rapport à la mesure de comptage, nous obtenons que cette condition équivaut (si μ est σ-finie) à $\displaystyle\int_{X\times\mathbb{N}} |f_n(x)|\, d\mu\otimes\nu(x,n) < \infty$, qui est précisément l'hypothèse fondamentale du théorème de Fubini. ◇

8.30 Remarque. Les théorèmes de Tonelli et Fubini ont des variantes relatives à des produits de plusieurs facteurs. Exemple : si $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ est borélienne et positive, alors les fonctions

$$(x_2,\ldots,x_n) \mapsto \int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, d\nu_1(x_1),$$
$$(x_3,\ldots,x_n) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n)\, d\nu_1(x_1)\right) d\nu_1(x_2),$$

etc., sont boréliennes, et nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\nu_n = \int_{\mathbb{R}} \left(\cdots\left(\int_{\mathbb{R}}\left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\, d\nu_1(x_1)\right) d\nu_1(x_2)\right)\cdots\right) d\nu_1(x_n). \quad ◇ \tag{8.10}$$

8.31 Convention (Abus de notation pour l'intégrale de Lebesgue). Si $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ est un borélien, si $f = f(x) : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ a une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue λ_n et s'il n'y a pas de risque de confusion,

la notation $\displaystyle\int_\Omega f(x)\, dx$ *désigne l'intégrale de Lebesgue* $\displaystyle\int_\Omega f\, d\lambda_n$.

†. Comme noté dans la remarque 8.21, le théorème 6.36 est le demi-théorème correspondant au théorème 8.24, dans le contexte où la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est σ-finie, alors que μ ne l'est pas nécessairement.

Avec cette notation, l'égalité (8.10) devient

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \left(\dots \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2, \dots, x_n)\,dx_1 \right) dx_2 \right) \dots \right) dx_n.$$

De même,

la notation $\displaystyle\int_\Omega f(x)\,dx_1dx_2\dots dx_n$ *désigne l'intégrale de Lebesgue* $\displaystyle\int_\Omega f\,d\lambda_n$.

Notation alternative, par exemple pour $n = 2$:

$$\int_\Omega f(x,y)\,d(x,y) \text{ ou } \int_\Omega f(x,y)\,dxdy.$$

Exercices

Ces exercices sont *cruciaux* en vue des applications.

8.32 Exercice. « Traduire » les théorèmes de Tonelli et Fubini lorsque les espaces mesurés sont $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$ et $(\mathbb{R}^m, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}, \nu_m)$. ◇

8.33 Exercice.

a) Soit d une droite du plan. Montrer que $\nu_2(d) = 0$.

b) Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\nu_n(H) = 0$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 8.22. Commençons par le cas où $E = X \times Y$. Il suffit de montrer le résultat quand f est étagée. Le cas général s'obtient par passage à la limite, en utilisant :

a) Le fait que toute fonction mesurable est limite simple de fonctions étagées.

b) Le fait qu'une limite simple de fonctions mesurables est mesurable.

Par linéarité des appplications $f \mapsto f_x$, respectivement $f \mapsto f^y$, il suffit de considérer le cas où $f = \chi_A$, avec $A \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Dans ce cas, nous avons $f_x = \chi_{A_x}$ et $f^y = \chi_{A^y}$ et la conclusion suit de la proposition 8.8.

Le cas général $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ s'obtient en appliquant le cas particulier ci-dessus à la fonction $f\chi_E$ et en utilisant la proposition 8.8 et la définition 3.10 (détailler). CQFD

8.34 Remarque. Le principe de la preuve de la proposition 8.22 est important à retenir.

Pour obtenir des propriétés de mesurabilité ou intégrabilité des fonctions « générales », il est souvent suffisant de raisonner sur des fonctions caractéristiques ; le reste est « automatique ».

Démonstration du théorème 8.24. À nouveau, c'est une preuve « automatique ». On peut supposer $E = X \times Y$. (Raisonner comme dans la preuve de la proposition 8.22.)

Si f est une *fonction caractéristique mesurable*, $f = \chi_A$, avec $A \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$, alors la $\mathscr{S}$-mesurabilité de

$$y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x) = \nu(A^y) \text{ (justifier l'égalité)}$$

suit du théorème 8.9, et l'égalité des intégrales est donnée par le corollaire 8.13.

Par linéarité de l'intégrale *des fonctions positives*, le théorème est vrai si f est étagée et positive (vérifier).

Pour f quelconque, nous considérons une suite $(f_n)_n$ de fonctions étagées telle que $f_n \geq 0$, $f_n \nearrow f$. Par convergence monotone, nous trouvons, pour chaque $y \in Y$:

$$\int_X f_n(x,y)\, d\mu(x) \to \int_X f(x,y)\, d\mu(x),$$

d'où $y \mapsto \int_X f(x,y)\, d\mu(x)$ est $\mathscr{S}$-mesurable (comme limite simple de fonctions $\mathscr{S}$-mesurables).

À nouveau par convergence monotone, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\int_{X\times Y} f\, d\mu\otimes\nu &= \lim_n \int_{X\times Y} f_n\, d\mu\otimes\nu = \lim_n \int_Y \left(\int_X f_n(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y)\\ &= \int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\mu(x)\right) d\nu(y),\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration. CQFD

Démonstration du corollaire 8.25. Nous pouvons supposer que $E = X \times Y$.

Le théorème de Tonelli donne

$$\int_{X\times Y} |f|\, d\mu\otimes\nu = \int_Y \left(\int_X |f(x,y)|\, d\mu(x)\right) d\nu(y).$$

CQFD

Démonstration du théorème 8.27. Nous pouvons supposer que $E = X \times Y$.

Notons que f_+ et f_- sont intégrables (justifier).

Nous appliquons le théorème de Tonelli 8.24 aux fonctions mesurables positives *et intégrables* f_+ et f_-. Nous obtenons que les fonctions $y \mapsto \int_X f_\pm(x,y)\, d\mu(x)$ sont ν-intégrables, donc finies ν-p. p. (justifier). Si

$$B := \left\{ y \in Y\, ;\, \int_X f_+(x,y)\, d\mu(x) = \infty \text{ et } \int_X f_-(x,y)\, d\mu(x) = \infty \right\},$$

alors $B \in \mathscr{S}$, $\nu(B) = 0$ (justifier) et $\displaystyle\int_X f(\cdot, y)\, d\mu$ existe si et seulement si $y \notin B$.

Par ailleurs, nous avons

$$g(y) = \chi_{B^c}(y) \left(\int_X f_+(x, y)\, d\mu(x) - \int_X f_-(x, y)\, d\mu(x) \right)$$

(vérifier), d'où g est mesurable (justifier).

Comme $\mu \otimes \nu(X \times B) = 0$ (pourquoi ?), nous avons (justifier)

$$\begin{aligned} \int_{Y\setminus B} \left(\int_X f_\pm(x, y)\, d\mu(x) \right) d\nu(y) &= \int_{X\times(Y\setminus B)} f_\pm \, d\mu \otimes \nu \\ &= \int_{X\times Y} f_\pm \, d\mu \otimes \nu < \infty. \end{aligned} \tag{8.11}$$

En additionnant les deux égalités (8.11), nous obtenons

$$\int_{Y\setminus B} |g(y)|\, d\nu(y) \leq \int_{Y\setminus B} \left(\int_X (f_+(x, y) + f_-(x, y))\, d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty,$$

d'où g est intégrable sur $Y\setminus B$, donc sur Y (justifier).

En particulier, g est finie ν-presque partout, c'est-à-dire $f(\cdot, y)$ est intégrable pour ν-presque tout y.

Enfin, en retranchant les deux égalités (8.11) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_Y g = \int_{Y\setminus B} g = \int_{Y\setminus B} \left(\int_X (f_+(x, y) - f_-(x, y))\, d\mu(x) \right) d\nu(y) \\ = \int_{X\times(Y\setminus B)} f\, d\mu \otimes \nu = \int_{X\times Y} f\, d\mu \otimes \nu. \end{aligned}$$

CQFD

8.6 Les grands théorèmes pour $\overline{\mu \otimes \nu}$

Les résultats de la section précédente ne s'appliquent pas à la mesure de Lebesgue λ_{n+m}, qui n'est pas le produit de λ_n et de λ_m (exercice 8.20).

Dans cette section, nous allons néanmoins obtenir des résultats du type théorème de Tonelli ou théorème de Fubini pour la mesure $\overline{\mu \otimes \nu}$. Le « prix » à payer est que certaines propriétés, vraies partout dans les sections précédentes, sont valides uniquement presque partout ; comparer par exemple les propositions 8.22 et 8.35.

8.35 Proposition. Soit $E \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$. Soit $f : E \times Y \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$-mesurable.

Pour μ-presque tout $x \in X$, nous avons $E_x \in \overline{\mathscr{S}}$ et la fonction partielle $f_x : E_x \to \overline{\mathbb{R}}$ est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable.

Énoncé analogue en échangeant les rôles de x et y. $\diamond$

La remarque suivante propose des conventions utiles et mène à la définition 8.37.

8.36 Remarque. Si λ est une *mesure complète* sur $(T, \mathscr{A})$ et g une *fonction définie λ-p. p.* sur T, alors nous pouvons donner un sens naturel à la mesurabilité de g (même si elle n'est pas définie en tout point).

En effet, soit h un *prolongement arbitraire* de g à T tout entier (par exemple, le prolongement par la valeur 0). Si h est $\mathscr{A}$-mesurable, alors tout autre prolongement de g est $\mathscr{A}$-mesurable, car égal à h λ-p. p. (proposition 4.19 b)). Ainsi, il y a *équivalence* entre :

1. g a *un prolongement* mesurable.
2. *Tout prolongement* de g est mesurable.

De même, si *un* prolongement h de g a une intégrale, alors *tout autre* prolongement k de g a une intégrale (car dans ce cas nous avons $k = g$ λ-p. p., et nous pouvons appliquer le corollaire 6.23). ◇

Cette remarque montre que les définitions suivantes sont correctes (au sens où elles ne dépendent pas de h).

8.37 Définition (Mesurabilité et intégrale d'une fonction définie p. p.)**.** Soit λ une mesure *complète* sur $(T, \mathscr{A})$. Soit g une fonction réelle *définie λ-presque partout sur T*.

a) (Mesurabilité d'une fonction définie p. p.) *g est $\mathscr{A}$-mesurable* si g admet un prolongement $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\mathscr{A}$-mesurable.

b) (Intégrale d'une fonction définie p. p.) *g a une intégrale* si g admet un prolongement $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$ qui a une intégrale, et dans ce cas nous définissons l'intégrale de g par

$$\int_X g = \int_X g \, d\lambda := \int h.$$

Avec ces conventions, la conclusion du théorème de Fubini 8.27 s'écrit plus simplement

$$\int_E f \, d\mu \otimes \nu = \int_Y \left(\int_{E^y} f(\cdot, y) \, d\mu \right) \, d\overline{\nu}(y) \, ; \tag{8.12}$$

à comparer à la conclusion

$$\int_E f \, d\mu \otimes \nu = \int_Y \left(\int_{E^y} f(\cdot, y) \, d\mu \right) \, d\nu(y) \tag{8.13}$$

du théorème de Tonelli 8.24.

Les formules (8.12)–(8.13) permettent de mieux comprendre le rôle du passage aux mesures complétées, illustré dans les théorèmes 8.38 et 8.39.

8.38 Théorème (Théorème de Tonelli)**.** Soit $E \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$. Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction $\overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$-mesurable.

Alors :

a) L'application $Y \ni y \mapsto \displaystyle\int_{E^y} f(x, y)\, d\overline{\mu}(x)$ est définie ν-p. p. et est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable.

b) Nous avons

$$\int_E f \, d\overline{\mu \otimes \nu} = \int_Y \left(\int_{E^y} f(x, y)\, d\overline{\mu}(x) \right) d\overline{\nu}(y).$$

Énoncé analogue en échangeant les rôles de x et de y. ◇

8.39 Théorème (Théorème de Fubini)**.** Soit $E \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\overline{\mu \otimes \nu}$-intégrable.

Alors :

a) Pour ν-presque tout y, $f^y = f(\cdot, y)$ est $\overline{\mu}$-intégrable sur E^y.

b) Si nous posons $g(y) := \displaystyle\int_{E^y} f(x, y)\, d\overline{\mu}(x)$, alors g (qui est définie ν-p. p.) est $\overline{\nu}$-intégrable.

c) Nous avons

$$\int_E f \, d\overline{\mu \otimes \nu} = \int_Y g(y)\, d\overline{\nu}(y).$$

Énoncé analogue en échangeant les rôles de x et y. ◇

Nous allons démontrer uniquement le théorème 8.38 ; la preuve du théorème 8.39 est similaire et laissée au lecteur.

8.40 Remarque. Ces théorèmes ont des variantes pour des produits à trois facteurs ou plus, que le lecteur énoncera facilement. ◇

Exercices

Les deux exercices suivants permettent de compléter la preuve des théorèmes 8.38 et 8.39. Pour les montrer, on pourra s'inspirer de la preuve de la proposition 8.35.

Le cadre est celui de la définition 8.37. Les p. p. s'entendent par rapport à la mesure λ, et la mesurabilité par rapport à $\mathscr{A}$.

8.41 Exercice. Soient $h_1, \ldots, h_n$ des fonctions réelles positives définies p. p.

a) Montrer que $h := h_1 + \cdots + h_n$ est définie p. p.

b) Si chaque h_k est mesurable, alors :

i) h est mesurable.

ii) $\displaystyle\int h = \sum_{k=1}^{n} \int h_k$. ◇

8.42 Exercice. Soient h_n, h des fonctions réelles définies p. p., telles que :

(i) h_n est mesurable, $\forall\, n$.

(ii) $h_n \to h$ p. p.

a) Montrer que h est mesurable.

b) Si $h_n \geq 0$ p. p., et $h_n \nearrow h$ p. p., alors $\displaystyle\int h_n \to \int h$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 8.35. Montrons par exemple le résultat pour f_x.

Étape 1. Preuve si $E = X \times Y$ et $f = \chi_A$, avec $A \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$. Il existe $A_1, A_2 \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ tels que $A_1 \subset A \subset A_2$ et $\mu \otimes \nu(A_2 \setminus A_1) = 0$. Soit $B := A_2 \setminus A_1$. À x fixé, nous avons

$$(A_1)_x \subset A_x \subset (A_2)_x = (A_1 \sqcup B)_x = (A_1)_x \sqcup B_x,$$

d'où

$$\chi_{(A_1)_x} \leq f_x = \chi_{A_x} \leq \chi_{(A_2)_x} = \chi_{(A_1)_x} + \chi_{B_x}. \tag{8.14}$$

Par ailleurs, le corollaire 8.13 donne

$$0 = \mu \otimes \nu(B) = \int_X \nu(B_x)\, d\mu(x),$$

d'où (proposition 6.35 a)) $\nu(B_x) = 0$ μ-p. p.

Soit $C \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(C) = 0$ et $\nu(B_x) = 0$, $\forall\, x \in C^c$.

Soit $x \in C^c$. Alors il existe $D \subset \mathscr{S}$ tel que $\nu(D) = 0$ et $B_x \subset D$. Nous avons

$$\chi_{B_x}(y) = 0, \ \forall\, y \in D^c. \tag{8.15}$$

De (8.14) et (8.15), nous avons $f_x = \chi_{A_x}$ dans D^c, et donc $f_x = \chi_{A_x}$ ν-p. p. Comme A_x est $\mathscr{S}$-mesurable (proposition 8.8), il s'ensuit que χ_{A_x} l'est également, et donc (justifier) f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable.

Conclusion : pour tout $x \in C^c$, f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, et donc f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable pour μ-presque tout x.

Étape 2. Preuve pour une fonction étagée. Soit $f = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \chi_{A_k}$, avec $a_k \in \mathbb{R}$ et $A_k \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$, $A_k \subset E$, $\forall\, k$. Soit, pour chaque k, $B_k \in \mathscr{T}$ un ensemble μ-négligeable tel que $\chi_{A_k}(x)$ soit $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, $\forall\, x \in (B_k)^c$. (L'existence de B_k découle de la première étape.)

Soit $B := \cup_{k=1}^{n} B_k$ qui appartient à $\mathscr{T}$ est et μ-négligeable (justifier). Alors f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, $\forall\, x \in B^c$ (justifier, en utilisant la définition 3.10), et donc, pour μ-presque tout x, f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable.

Étape 3. Preuve dans le cas général. Soit $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$-mesurable. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions étagées telles que $f_n \to f$. Soit, pour chaque n, $A_n \in \mathscr{T}$ un ensemble μ-négligeable tel que $(f_n)_x$ soit $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, $\forall\, x \in (A_n)^c$. (L'existence de A_n découle de la deuxième étape.)

Soit $A := \cup_n A_k$ qui appartient à $\mathscr{T}$ est et μ-négligeable (justifier). Pour tout x, nous avons $f_x = \lim_n (f_n)_x$. Si $x \in A^c$, alors chaque fonction $(f_n)_x$ est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, et donc f_x l'est (justifier). Par conséquent, pour μ-presque tout x, f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable. CQFD

8.43 Remarque. Lors de la première étape de la preuve de la proposition 8.35, nous avons montré le fait suivant, qui nous servira dans la preuve du théorème 8.38. Si $A \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$, alors il existe $A_1 \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$ tel que :

a) $A_1 \subset A$.

b) $\overline{\mu \otimes \nu}(A) = \mu \otimes \nu(A_1)$.

c) $\overline{\nu}(A_x) = \nu((A_1)_x)$ pour μ-presque tout $x \in X$. ◇

Démonstration du théorème 8.38.

Étape 1. Preuve si $E = X \times Y$ et $f = \chi_A$, avec $A \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$. Nous avons :

i) Pour ν-presque tout $y \in Y$,
$$\int_X f(x,y)\, d\overline{\mu}(x) = \int_X \chi_{A^y}(x)\, d\overline{\mu}(x) = \overline{\nu}(A^y) = \nu((A_1)^y)$$
(via la remarque 8.43 c)).

ii) $y \mapsto \nu((A_1)^y)$ est $\mathscr{S}$-mesurable (théorème 8.9), d'où $y \mapsto \displaystyle\int_X f(x,y)\, d\overline{\mu}(x)$ est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable (item i) et définition 8.37 a)).

iii) Enfin,
$$\begin{aligned}\int_Y \left(\int_X f(x,y)\, d\overline{\mu}(x)\right) d\overline{\nu}(y) &= \int_Y \overline{\mu}(A^y))\, d\overline{\nu}(y) = \int_Y \mu((A_1)^y))\, d\overline{\nu}(y)\\ &= \int_Y \mu((A_1)^y))\, d\nu(y) = \mu \otimes \nu(A_1) = \overline{\mu \otimes \nu}(A)\\ &= \int_{X\times Y} f\, d\overline{\mu \otimes \nu}\end{aligned}$$
(en utilisant successivement l'item i), la remarque 8.43 c), l'item ii) et la définition 8.37 b), le théorème de Tonelli 8.24 appliqué à la fonction χ_{A_1} et la remarque 8.43 b)).

Ceci prouve le théorème si $f = \chi_A$.

Étape 2. Preuve pour une fonction étagée. Soit $f = \sum_{k=1}^{n} a_k\, \chi_{A_k}$, avec $a_k \in [0, \infty[$ et $A_k \in \overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$, $A_k \subset E$, $\forall\, k$. Soit, pour chaque k, $B_k \in \mathscr{T}$ un ensemble μ-négligeable tel que $\chi_{A_k}(x)$ soit $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, $\forall\, x \in (B_k)^c$. (L'existence de B_k découle de la proposition 8.35.)

Soit $B := \cup_{k=1}^n B_k$ qui appartient à $\mathscr{T}$ et est μ-négligeable. Alors f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, $\forall\, x \in B^c$ (justifier), et donc, pour μ-presque tout x, f_x est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable.

La première étape et la linéarité de l'intégrale (proposition 6.30) impliquent (justifier chaque égalité, en utilisant en particulier l'exercice 8.41)

$$\begin{aligned}\int_Y \left(\int_{E^y} f(x,y)\, d\overline{\mu}(x) \right) d\overline{\nu}(y) &= \int_Y \left(\int_X \sum_{k=1}^n a_k\, \chi_{A_k}(x,y)\, d\overline{\mu}(x) \right) d\overline{\nu}(y) \\ &= \int_Y \left(\sum_{k=1}^n a_k \int_X \chi_{A_k}(x,y)\, d\overline{\mu}(x) \right) d\overline{\nu}(y) \\ &= \sum_{k=1}^n a_k\, \overline{\mu \otimes \nu}(A_k) = \int_E f\, d\overline{\mu \otimes \nu}.\end{aligned}$$

Étape 3. Preuve dans le cas général. Soit $f : E \to [0, \infty]$ une fonction $\overline{\mathscr{T} \otimes \mathscr{S}}$-mesurable. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions étagées positives telles que $f_n \nearrow f$. Posons

$$g_n(y) := \int_{E^y} f_n(x,y)\, d\overline{\mu}(y),\ g(y) := \int_{E^y} f(x,y)\, d\overline{\mu}(y).$$

Alors g_n est définie lorsque $(f_n)^y$ est $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable, donc pour ν-presque tout y (proposition 8.35). De même, g est définie ν-p. p.

Soit, pour chaque n, $B_n \in \mathscr{S}$ un ensemble ν-négligeable tel que $(f_n)^y$ soit $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, $\forall\, y \in (B_n)^c$. Soit $C \in \mathscr{S}$ un ensemble ν-négligeable tel que f^y soit $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable, $\forall\, y \in C^c$. Si $B := C \cup \cup_n B_n$, alors (justifier ce qui suit, en utilisant en particulier l'exercice 8.42 b)) B est ν-négligeable, et pour tout $y \in B^c$,

$$0 \le g_n(y) \nearrow g(y). \tag{8.16}$$

En particulier, (8.16) et la définition 8.37 a) impliquent que $y \mapsto \displaystyle\int_{E^y} f(x,y)\, d\overline{\mu}(x)$ est $\overline{\mathscr{S}}$-mesurable.

En utilisant le théorème de convergence monotone 6.18, la deuxième étape, (8.16) et à nouveau l'exercice 8.42 b), nous obtenons (justifier)

$$\begin{aligned}\int_E f\, d\overline{\mu \otimes \nu} &= \lim_n \int_E f_n\, d\overline{\mu \otimes \nu} = \lim_n \int_Y \left(\int_{E^y} f_n(x,y)\, d\overline{\mu}(x) \right) d\overline{\nu}(y) \\ &= \lim_n \int_Y g_n(y)\, d\overline{\nu}(y) = \int_Y g(y)\, d\overline{\nu}(y) = \int_Y \left(\int_{E^y} f(x,y)\, d\overline{\mu}(x) \right) d\overline{\nu}(y),\end{aligned}$$

ce qui donne la conclusion du théorème dans le cas général. CQFD

Chapitre 9

Changements de variables

9.0 Aperçu

L'un des outils les plus utiles pour calculer des intégrales définies est le *théorème du changement de variable* : si $\Phi : [a,b] \to [c,d]$ est une fonction bijective de classe C^1, alors

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_{\Phi^{-1}(c)}^{\Phi^{-1}(d)} f(\Phi(y))\,\Phi'(y)\,dy,\ \forall\, f : [c,d] \to \mathbb{R},\ f \text{ continue.} \tag{9.1}$$

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à des variantes de (9.1) pour des fonctions de plusieurs variables. Incidemment, même pour une fonction d'une seule variable, nous allons donner une formulation du théorème dont *la forme* (mais pas *le fond*) est différente de (9.1).

Le théorème principal est le *théorème du changement de variable(s)* 9.14, qui fait intervenir un *changement de variable(s)*

$$\Phi : U \to V, \text{ avec } U, V \text{ ouverts de } \mathbb{R}^n.$$

L'égalité centrale du théorème 9.14 est

$$\int_V f(x)\,dx = \int_U f(\Phi(y))\,|J_\Phi(y)|\,dy\,;^{\dagger} \tag{9.2}$$

les hypothèses sur f et Φ, ainsi que le sens de cette égalité, seront précisés dans le théorème 9.14.

La preuve du théorème s'étale sur six sections (9.1 à 9.6). Il est possible de faire bien plus court, en utilisant des résultats plus avancés. La preuve donnée

†. J_ϕ est la *matrice jacobienne de* Φ. Par convention, $|J_\Phi|$ est la *valeur absolue du déterminant de* J_Φ.

ici est longue, mais très naturelle ; par ailleurs, les sections 9.1 et 9.3 contiennent des rappels d'algèbre linéaire ou calcul différentiel, et la section 9.6 ne fait qu'assembler les pièces du puzzle. Les sections 9.2, 9.4 et 9.5 constitue le cœur de la preuve.

La structure de ces sections est la suivante :

1. Section 9.1 : rappels d'algèbre linéaire (décomposition d'une matrice en matrices élémentaires).
2. Section 9.2 : preuve du théorème 9.14 lorsque Φ est une application linéaire (ou affine).
3. Section 9.3 : rappels de topologie (recouvrement d'un ensemble avec des cubes).
4. Section 9.4 : argument de « localisation » : lorsque U est un « petit cube », estimation de l'erreur que l'on fait en remplaçant Φ par une application linéaire.
5. Section 9.5 : c'est la section clé de la preuve : preuve de la proposition 9.12, qui donne une inégalité entre deux mesures.
6. Section 9.6 : conclusion.

Malgré son importance en général, le théorème 9.14 ne s'applique pas aux changements de variables les plus courants (passage en coordonnées polaires, sphériques ou cylindriques). Pour inclure ces applications dans la théorie, nous donnons dans la section 9.8 le *théorème du presque changement de variables* 9.21. La section 9.7 donne les résultats préliminaires utilisés dans la preuve du théorème 9.21. Dans la section 9.9, nous montrons comment l'appliquer aux changements mentionnés ci-dessus.

Une fois n'est pas coutume, la section « Pour aller plus loin » 9.11 contient une autre version du théorème du changement de variables, le théorème 9.23, *que nous utiliserons sans l'avoir prouvée*.

Enfin, la section 9.10 contient une liste d'intégrales de référence, qui jouent, pour la mesure de Lebesgue ν_n dans $\mathbb{R}^n$, le rôle des intégrale de Riemann ou de Bertrand pour les intégrales généralisées sur $]0,1]$ et $[1,\infty[$.

Compétences minimales attendues.

a) Utiliser le théorème du changement de variables.

b) Comprendre ce qu'est *une égalité au sens du théorème du changement de variables* et savoir s'en servir.

c) Utiliser de manière justifiée les passages en coordonnées polaires, sphériques, cylindriques, sphériques généralisées.

d) Savoir ramener, par changement de variables, le calcul d'intégrales à une application des théorèmes de Tonelli ou Fubini. $\diamond$

9.1 Un peu d'algèbre linéaire

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible. Nous pouvons ramener A à l'identité par la méthode du pivot de Gauss (en ligne ou colonne). Chaque étape de la méthode de Gauss en ligne est l'une des suivantes :

a) Permutation de deux colonnes de A (à la recherche d'un pivot).

b) L'une des colonnes de A est multipliée par une constante $c \neq 0$, puis est retranchée d'une autre colonne (afin de faire un zéro dans la ligne).

Si nous écrivons ces opérations en termes matriciels, alors :

a) revient à multiplier A à droite par une matrice P_{ij}, qui s'obtient de l'identité en permutant les colonnes i et j.

b) revient à multiplier d'abord A à droite par la matrice $Q_{i,c}$ qui s'obtient de l'identité en multipliant la colonne i par c, puis multiplier le résultat à droite par la matrice R_{ij} qui s'obtient de l'identité en retranchant la colonne i de la colonne j, enfin multiplier ce dernier résultat à droite par $Q_{i,1/c}$.

Ainsi, l'identité s'écrit comme un produit fini de la forme $I = AS_1S_2 \dots S_m$, où chaque S_k est un P_{ij} ou un $Q_{i,c}$ ou un R_{ij}. Ceci donne $A = S_m^{-1} \dots S_1^{-1}$. Notons que :

1. $P_{ij}^{-1} = P_{ij}$.
2. $Q_{i,c}^{-1} = Q_{i,1/c}$.
3. $R_{ij}^{-1} = T_{ij}$, où T_{ij} s'obtient de l'identité en ajoutant la colonne i à la colonne j.

Pour résumer, nous venons de prouver le résultat suivant.

9.1 Proposition. Toute matrice inversible est produit de matrices du type P_{ij}, $Q_{i,c}$ et T_{ij}. ◇

9.2 Changements de variables linéaire

Voici la forme la plus simple du théorème du changement de variables : Φ est linéaire, et f est une fonction caractéristique.

9.2 Théorème. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible.

Nous avons :

a) $E \subset \mathbb{R}^n$ est borélien (respectivement Lebesgue mesurable) si et seulement si $A(E)$ l'est.

b) Si tel est le cas, alors $\lambda_n(A(E)) = |\det A|\, \lambda_n(E)$.

9.3 Remarque. Si A n'est pas inversible, alors pour toute partie E de $\mathbb{R}^n$, $A(E)$ est Lebesgue mesurable, de mesure nulle.

En effet, $A(\mathbb{R}^n)$ est un sous espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension $\leq n-1$, donc contenu dans un hyperplan H. La conclusion suit du fait que $\nu_n(H) = 0$ (exercice 8.33). ◇

9.4 Remarque. La mesure de Lebesgue étant invariante par translations, nous pouvons remplacer dans le théorème 9.2 « linéaire » par « affine ». En effet, si $Bx = Ax + b$, avec A matrice inversible et $b \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\lambda_n(B(E)) = \lambda_n(A(E) + b) = \lambda_n(A(E)) = |\det A|\, \lambda_n(E),$$

pour tout $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mesurable ; raisonnement similaire pour un borélien. ◇

Exercices

Cet exercice sert dans la preuve du théorème 9.2.

9.5 Exercice. Nous nous proposons de montrer que si μ est une mesure borélienne et invariante par translations sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu([0,1[^n) = 1$, alors $\mu = \nu_n$.

a) Montrer que $\mu([0,1/k[^n) = (1/k)^n$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Indication : recouvrir $[0,1[^n$ avec des cubes d. d. d. de taille $1/k$.

b) Soit K_j comme dans le lemme 9.7. Montrer que $\mu(K_j) = \nu_n(K_j)$.

c) En déduire que $\mu(K) = \nu_n(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

d) Conclure. Indication : mesures de Radon. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 9.2.
Étape 1. Preuve dans le cas borélien. L'équivalence E borélien $\Longleftrightarrow$ $\Phi(E)$ borélien découle de l'exercice 2.20.

Soit $C := [0,1[^n$. Soit $k = k_A := \nu_n(A(C))$. C étant d'intérieur non vide et A étant un homéomorphisme, $A(C)$ est d'intérieur non vide. D'où $k > 0$ (justifier). Par ailleurs, $A(C)$ est borné (car C l'est), d'où $k < \infty$.

Posons

$$\mu(E) := \frac{1}{k}\lambda_n(A(E)) = \frac{1}{k}\nu_n(A(E)),\ \forall\, E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

Nous allons montrer que μ est la mesure de Lebesgue ν_n sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$, ce qui implique l'égalité

$$\nu_n(A(E)) = k\nu_n(E),\ \forall\, E \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}. \tag{9.3}$$

Clairement, μ est une mesure, car si $(E_j)_j$ est une suite d. d. d. de boréliens, alors $(A(E_j))_j$ est une suite d. d. d. de boréliens et donc

$$\mu(\sqcup_j E_j) = \frac{1}{k}\nu_n(\sqcup_j A(E_j)) = \frac{1}{k}\sum_j \nu_n(A(E_j)) = \sum_j \mu(E_j).$$

Par construction, nous avons $\mu(C) = 1 = \nu_n(C)$.

Par ailleurs, μ est invariante par translations, car

$$\mu(E+x) = \frac{1}{k}\nu_n(A(E+x)) = \frac{1}{k}\nu_n(A(E)+Ax) = \frac{1}{k}\nu_n(A(E)) = \mu(E).$$

Pour résumer, μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, invariante par translations et telle que $\mu(C) = \nu_n(C)$. Ces propriétés impliquent l'égalité $\mu = \nu_n$ (exercice 9.5), comme annoncé.

Ensuite, montrons l'égalité (*) $k_A = |\det A|$ (qui, au vu de (9.3), permet de compléter la preuve du théorème si E est borélien).

Dans un premier temps, notons l'égalité $k_{AB} = k_A k_B$. En effet, nous avons

$$k_{AB} = \nu_n(AB(C)) = k_A\nu_n(B(C)) = k_A k_B \nu_n(C) = k_A k_B. \tag{9.4}$$

Par ailleurs, nous avons également

$$|\det(AB)| = |\det A|\,|\det B|. \tag{9.5}$$

Compte tenu de de la proposition 9.1 et de (9.4)–(9.5), pour conclure il suffit de montrer (*) quand A est l'une des matrices P_{ij}, $Q_{i,c}$ ou T_{ij} (puis nous multiplions ces égalités pour obtenir (*) pour A quelconque).

Si $A = P_{ij}$, alors $|\det A| = 1$ et $A(C) = C$, d'où $k_A = 1 = |\det A|$.

Si $A = Q_{i,c}$, alors $|\det A| = |c|$ et, selon le signe de c, nous avons

$$A(C) = [0,1[^{i-1}\times[0,c[\times[0,1[^{n-i-1} \text{ ou } A(C) = [0,1[^{i-1}\times]c,0]\times[0,1[^{n-i-1}.$$

Dans les deux cas, nous avons $k_A = |c| = |\det A|$ (justifier).

Enfin, soit $A = T_{ij}$; d'où $|\det A| = 1$. Pour simplifier l'écriture, nous prenons $i = 1$, $j = 2$. Nous avons

$$\begin{aligned} A(C) &= \{(x_1+x_2, x_2, \ldots, x_n)\ ;\ 0 \le x_k < 1,\ k = 1, \ldots, n\} \\ &= \{(y_1, x_2, \ldots, x_n)\ ;\ x_2 \le y_1 < 1 + x_2, 0 \le x_k < 1,\ k = 2, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Nous décomposons $A(C) = B_1 \sqcup B_2$, où B_1 est l'ensemble des points de $A(C)$ tels que $x_2 \le y_1 < 1$ et B_2 celui des points de $A(C)$ tels que $1 \le y_2 < x_2 + 1$. Alors B_1 est intersection finie de fermés et ouverts (il est donné par un nombre fini d'inégalités affines), donc borélien. Il s'ensuit que $B_2 = A(C)\backslash B_1$ l'est aussi. Par ailleurs, nous avons $B_1 \subset C$ et $B_2 = (C\backslash B_1) + e_1$. Donc

$$\begin{aligned} k_A &= \nu_n(A(C)) = \nu_n(B_1 \sqcup B_2) = \nu_n(B_1) + \nu_n(B_2) \\ &= \nu_n(B_1) + \nu_n((C\backslash B_1) + e_1) = \nu_n(B_1) + \nu_n(C\backslash B_1) \\ &= \nu_n(B_1 \sqcup (C\backslash B_1)) = \nu_n(C) = 1 = |\det A|. \end{aligned}$$

Étape 2. Preuve dans le cas Lebesgue mesurable. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ Lebesgue mesurable. Il existe E_1, E_2 boréliens tels que $E_1 \subset E \subset E_2$ et $\nu_n(E_2\backslash E_1) = 0$. Nous trouvons que $A(E_1) \subset A(E) \subset A(E_2)$ et $\nu_n(A(E_2)\backslash A(E_1)) = \nu_n(A(E_2\backslash E_1)) = 0$. Donc $A(E)$ est Lebesgue mesurable. Le même raisonnement appliqué à A^{-1} montre l'implication inverse : si $A(E)$ est Lebesgue mesurable, alors E l'est. Pour conclure, nous notons que

$$\lambda_n(A(E)) = \nu_n(A(E_2)) = |\det A|\, \nu_n(E_2) = |\det A|\, \lambda_n(E).$$ CQFD

9.3 Un peu de topologie

Dans cette section, nous décrivons un procédé de recouvrement d'un ensemble par des cubes, qui permet d'approximer un compact par des unions finies et décroissantes de cubes.

9.6 Définition (Cube)**.** Un *cube* (de $\mathbb{R}^n$) est un produit $C = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$, où les I_j sont des intervalles de même longueur, strictement positive.

La longueur commune de ces intervalles est la *taille* de C.

Si x_j est le milieu de I_j, $\forall\, j$, alors $x := (x_1, \ldots, x_n)$ est le *centre* de C. ◇

Notons que, si x est le centre et r la taille de C, alors

$$B(x, r/2) \subset C \subset \overline{B}(x, r/2) \tag{9.6}$$

(boules pour la norme $\| \ \|_\infty$).

Nous pouvons recouvrir $\mathbb{R}^n$ avec des cubes disjoints de taille $1/2^j$, à l'aide du recouvrement $\mathbb{R}^n = \sqcup_{\ell \in \mathbb{Z}^n} (1/2^j \cdot \ell + [0, 1/2^j[^n)$. Notons $\mathscr{Q}_j$ la collection de ces cubes ; C va désigner un cube appartenant à $\mathscr{Q}_j$.

Si $F \subset \mathbb{R}^n$, posons

$$F_j := \bigcup_{\substack{C \in \mathscr{Q}_j \\ C \cap F \neq \emptyset}} C\,;$$

F_j est le *recouvrement dyadique* (à l'échelle j) de F.

Notons que $F_j \subset F_{j-1}$ si $j \geq 1$. En effet, pour tout cube C de $\mathscr{Q}_j$, il existe un (unique) cube Q de $\mathscr{Q}_{j-1}$ qui le contient. Donc, si C apparaît dans F_j, alors Q apparaît dans F_{j-1}, ce qui implique $F_j \subset F_{j-1}$.

Notons également que $F \subset F_j$. En effet, si $x \in F$, alors il existe un C de $\mathscr{Q}_j$ tel que $x \in C$. C apparaît donc dans F_j, d'où x appartient à F_j.

9.7 Lemme. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact.

Nous avons :

a) $K_j \searrow K$.

b) $\lambda_n(K_j) \to \lambda_n(K)$.

c) K_j est borné, $\forall\, j$. En particulier, K_j est une union *finie* de cubes C_ℓ, avec $C_\ell \subset \mathscr{Q}_j$, $\forall\, \ell$.

d) Si U est un ouvert tel que $U \supset K$, alors, pour j suffisamment grand, nous avons $U \supset \overline{K_j}$. ◇

Démonstrations

Démonstration du lemme 9.7.

a) Nous avons déjà vu que la suite $(K_j)_j$ était décroissante et l'inclusion $K \subset K_j$, $\forall\, j$. Il reste à montrer l'inclusion $\cap_j K_j \subset K$.

Si $x \in K_j$, alors il existe un C de $\mathscr{Q}_j$ tel que $x \in C$ et $C \cap K \neq \emptyset$. Soit $y_j \in K \cap C$. Alors $\|x - y_j\|_\infty < 1/2^j$, d'où $\operatorname{dist}(x, K) < 1/2^j$.

Si $x \in \cap_j K_j$, alors $\operatorname{dist}(x, K) < 1/2^j$, $\forall\, j$, d'où $\operatorname{dist}(x, K) = 0$ et par conséquent $x \in K$ (justifier).

b) Notons que l'ensemble K_j est réunion a. p. d. de cubes (qui sont boréliens), donc un borélien. L'item b) découle du théorème de la suite décroissante si K_0 est borné (donc de mesure de Lebesgue finie).

Soit M tel que $\|x\|_\infty \leq M$, $\forall\, x \in K$. De la première partie de la preuve, nous avons $\operatorname{dist}(y, K) < 1$, $\forall\, y \in K_0$, d'où $\|y\|_\infty \leq M + 1$, $\forall\, y \in K_0$ (justifier). K_0 est donc borné.

c) Il suffit de reprendre, pour j arbitraire, l'argument ci-dessus, qui donne K_0 borné.

La deuxième partie suit du fait que la boule $\overline{B}(0, M+1)$ n'intersecte qu'un nombre fini de cubes de $\mathscr{Q}_j$.

d) Soit $\varepsilon := \operatorname{dist}(K, U^c) > 0$. Si $\dfrac{1}{2^{j_0}} < \varepsilon$ et $j \geq j_0$, alors $\dfrac{1}{2^j} < \varepsilon$. Pour un tel j, montrons que $U \supset \overline{K_j}$.

Soit d'abord $y \in K_j$. Alors il existe $C \in \mathscr{Q}_j$ tel que $y \in C$ et il existe $x \in K \cap C$. Il s'ensuit que $\|x - y\|_\infty < 1/2^j$, d'où

$$\operatorname{dist}(y, U^c) \geq \operatorname{dist}(x, U^c) - \|x - y\|_\infty > \operatorname{dist}(K, U^c) - 1/2^j > 0. \tag{9.7}$$

Soit maintenant $y \in \overline{K_j}$. Alors il existe une suite $(y_k)_k \subset K_j$ telle que $y_k \to y$. En appliquant (9.7) à y_k, nous obtenons

$$\operatorname{dist}(y, U^c) = \lim_k \operatorname{dist}(y_k, U^c) \geq \operatorname{dist}(K, U^c) - 1/2^j > 0.$$

Il s'ensuit que que $y \notin U^c$, ou encore $y \in U$. $y \in \overline{K_j}$ étant arbitraire, nous obtenons l'inclusion $\overline{K_j} \subset U$. CQFD

9.4 Image d'un petit cube par un C^1-difféomorphisme

Dans cette section, nous établissons l'*inégalité fondamentale* (9.9), qui permet de *majorer* la mesure de l'image d'un petit cube par un C^1-difféomorphisme.

Nous munissons $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ de la norme matricielle subordonnée à la norme $\| \ \|_\infty$:

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_\infty \ ; \ \|x\|_\infty \leq 1\}.^\dagger \tag{9.8}$$

Dans la suite, U et V désignent des ouverts de $\mathbb{R}^n$, muni de la norme $\| \ \|_\infty$. Les boules $\overline{B}(x, r)$ considérées dans cette section sont définies par rapport à cette norme.

9.8 Définition (C^1–difféomorphisme)**.** Une application $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n) : U \to V$ est un C^1-*difféomorphisme* si :

i) Φ a des dérivées partielles du premier ordre, qui sont continues.

ii) Le déterminant jacobien de Φ,

$$\det J_\Phi = \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

est *non nul* en tout point de U.

iii) Φ est bijective.‡

†. Les normes matricielles subordonnées sont désignées comme *normes triples* dans la littérature francophone (mais pas en dehors de celle-ci), et notées plutôt $|||A|||$.

‡. Ce n'est pas la définition usuelle d'un C^1-difféomorphisme. Il s'agit plutôt d'une *caractérisation*. J'ai adopté ce point de vue car approprié en vue des applications.

Rappelons que, sous ces hypothèses, le théorème d'inversion locale affirme que Φ^{-1} est encore de classe C^1 (et a donc exactement les mêmes propriétés que Φ).

9.9 Notation. Si $\Phi : U \to V$ est différentiable, alors

$$|J_\Phi| := |\det J_\Phi|. \qquad \diamond$$

Le résultat de cette section est

9.10 Proposition. Soit $\Phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme.

Soient K un compact de U et $\varepsilon > 0$.

Alors il existe $\delta > 0$ tel que : pour cube C de taille $< \delta$ qui intersecte K,[†] on a $C \subset U$ et

$$\nu_n(\Phi(C)) \le (1+\varepsilon)\,|J_\Phi(x)|\,\nu_n(C),\ \forall\, x \in C. \qquad \diamond \quad (9.9)$$

Notons que (9.9) a bien un sens. En effet, C est borélien, et $\Phi(C)$ l'est également (exercice 2.20).

Exercices

L'exercice suivant sera utilisé dans la démonstration de la proposition 9.10. L'item b) est une variante de la continuité uniforme des fonctions continues sur un compact K. La différence avec la continuité uniforme usuelle est que nous permettons aux points x, y de « sortir un peu » de K.

9.11 Exercice. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $K \subset U$ un compact.

Soient (Y, d) un espace métrique et $h \in C(U, Y)$.

Montrer que, pour tout $\tau > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que : si $x, y \in \mathbb{R}^n$ sont tels que $\operatorname{dist}(x, K) \le \delta$ et $\|x - y\|_\infty \le \delta$, alors :

a) $[x, y] \subset U$ (ici, $[x, y]$ est le segment d'extrémités x et y).

b) $d(h(x), h(y)) < \tau$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 9.10. Nous utilisons l'exercice 9.11 avec : $Y := \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ muni de la norme (9.8), $h := J_\Phi$ et τ à fixer ultérieurement.

Soit δ la constante donnée par l'exercice 9.11 et soit C un cube de taille $l \le \delta$ tel que $C \cap K \neq \emptyset$. Soit $z \in C \cap K$ et soit $x \in C$. Alors

$$\operatorname{dist}(x, K) \le \|x - z\|_\infty \le l.$$

†. Autrement dit, tel qu'on ait $C \cap K \neq \emptyset$.

De même, si $y \in C$, alors $\|y - x\|_\infty \leq l$.

Comme $l \leq \delta$, nous sommes en mesure d'utiliser les conclusions a) et b) de l'exercice 9.11. En particulier, si $y \in C$, alors $[x, y] \subset U$ (et en particulier $x, y \in U$), et le théorème des accroissements finis donne :

$$\|\Phi(y) - \Phi(x) - J_\Phi(x)(y - x)\|_\infty \leq \sup_{z \in [x,y]} \|J_\Phi(z) - J_\Phi(x)\| \|y - x\|_\infty \leq \tau\, l. \tag{9.10}$$

Si nous posons $A := D\Phi(x)$ et $b := \Phi(x) - Ax$, alors l'inégalité (9.10) devient

$$\|\Phi(y) - Ay - b\|_\infty \leq \tau\, l,$$

ou encore $\Phi(y) = Ay + \xi$ pour un $\xi \in \overline{B}(b, \tau\, l)$. Il s'ensuit que

$$\Phi(C) \subset A(C) + \overline{B}(b, \tau l) = A(C) + b + \overline{B}(0, \tau l). \tag{9.11}$$

Par ailleurs, A étant inversible et linéaire, nous avons

$$A(C) + b + \overline{B}(0, \tau l) = A(C + A^{-1}b + A^{-1}(\overline{B}(0, \tau\, l))). \tag{9.12}$$

En combinant (9.11), (9.12) avec la monotonie de la mesure et le théorème 9.2, nous obtenons

$$\begin{aligned} \nu_n(\Phi(C)) &\leq \nu_n(A(C + A^{-1}b + A^{-1}(\overline{B}(0, \tau\, l)))) \\ &= |\det A|\, \nu_n(C + A^{-1}b + A^{-1}(\overline{B}(0, \tau\, l))) \\ &= |\det A|\, \nu_n(C + A^{-1}(\overline{B}(0, \tau\, l))). \end{aligned} \tag{9.13}$$

Soit

$$L := \{y \in \mathbb{R}^n\, ;\, \mathrm{dist}(y, K) \leq \delta\}.$$

Alors L est compact (justifier, en montrant qu'il est fermé et borné), et, de l'exercice 9.11 a), nous avons $L \subset U$.

Soit

$$M := \max\{\|(J_\Phi)^{-1}(y)\|\ ;\ y \in L\} < \infty.$$

Nous avons

$$\|A^{-1}\xi\|_\infty = \|(J_\Phi)^{-1}(x)\, \xi\|_\infty \leq \|(J_\Phi)^{-1}(x)\|\, \|\xi\|_\infty \leq M\, \|\xi\|_\infty, \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

d'où (justifier)

$$A^{-1}(\overline{B}(0, \tau\, l)) \subset \overline{B}(0, M\tau\, l). \tag{9.14}$$

Si ξ_0 est le centre de C, alors $C \subset \overline{B}(\xi_0, l/2)$ (voir (9.6)), ce qui implique (au vu de (9.14))

$$C + A^{-1}(\overline{B}(0, \tau\, l)) \subset \overline{B}(\xi_0, (1 + 2M\tau)\, l/2). \tag{9.15}$$

De (9.13) et (9.15), nous obtenons

$$\begin{aligned} \nu_n(\Phi(C)) &\leq |\det A|\, \nu_n(\overline{B}(\xi_0, (1 + 2M\tau)\, l/2)) \\ &= |\det A|\, (1 + 2M\tau)^n l^n = (1 + 2M\tau)^n\, |\det A|\, \nu_n(C). \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de choisir τ tel que $(1 + 2M\tau)^n = 1 + \varepsilon$. CQFD

9.5 L'inégalité clé

Soit $\Phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme (avec U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$). Dans cette section, nous allons « faire le plus dur » dans la preuve du théorème 9.14, qui consiste à prouver la proposition 9.12.

9.12 Proposition. Nous avons

$$\int_K |J_\Phi(y)|\,dy \geq \nu_n(\Phi(K)),\ \forall\, K \subset U \text{ compact.} \tag{9.16}$$

De manière équivalente, nous avons

$$\nu_n(L) \leq \int_{\Phi^{-1}(L)} |J_\Phi(y)|\,dy,\ \forall\, L \subset V \text{ compact.} \qquad \diamond \tag{9.17}$$

Notons que le membre de droite de (9.16) est bien défini, car $\Phi(K)$ est compact, donc borélien. De même, le membre de droite de (9.17) est bien défini, car $\Phi^{-1}(L)$ est compact.

Exercices

Cet exercice sera utilisé dans la preuve de la proposition 9.12.

9.13 Exercice. Soient (X, d), (Y, δ) deux espaces métriques et $\Phi : X \to Y$ un *homéomorphisme.*[†]

a) Soit ξ une mesure borélienne sur Y. Posons

$$\mu(B) := \xi(\Phi(B)),\ \forall\, B \in \mathscr{B}_X.$$

Alors μ est une mesure borélienne sur X.

b) Symétriquement, si μ est une mesure borélienne sur X, alors la formule

$$\xi(C) := \mu(\Phi^{-1}(C)),\ \forall\, C \in \mathscr{B}_Y,$$

définit une mesure borélienne sur Y.

Indication : on pourra utiliser l'exercice 2.20. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 9.12.
Étape 1. Une inégalité approchée. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $\delta > 0$ comme dans la proposition 9.10. Si C est un cube de taille $l \leq \delta$ qui intersecte K, alors nous avons $C \subset U$ et

$$|J_\Phi(y)| \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\,\frac{\nu_n(\Phi(C))}{\nu_n(C)},\ \forall\, y \in C. \tag{9.18}$$

†. Donc Φ est continue, bijective, et Φ^{-1} est continue.

En intégrant (9.18) sur C, nous obtenons (justifier)

$$\int_C |J_\Phi(y)|\,dy \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\,\nu_n(\Phi(C)). \tag{9.19}$$

Soit maintenant j_1 tel que $\dfrac{1}{2^{j_1}} \leq \delta$. Soit $j \geq j_1$ et soit K_j le recouvrement dyadique de K, comme dans la section 9.3. Nous écrivons $K_j = \sqcup_\ell C_\ell$ (union finie), avec $C_\ell \in \mathscr{Q}_j$, $\forall\, j$ (voir le lemme 9.7 c)).

Par construction, chaque C_ℓ intersecte K. Par choix de j, chaque C_ℓ est de taille $\dfrac{1}{2^j} \leq \delta$. Nous pouvons donc appliquer (9.19) à chaque C_ℓ. En sommant sur ℓ, nous obtenons (justifier)

$$\begin{aligned}\int_{K_j} |J_\Phi(y)|\,dy &= \int_{\sqcup_\ell C_\ell} |J_\Phi(y)|\,dy = \sum_\ell \int_{C_\ell} |J_\Phi(y)|\,dy\\ &\geq \frac{1}{1+\varepsilon}\sum_\ell \nu_n(\Phi(C_\ell)) = \frac{1}{1+\varepsilon}\nu_n(\sqcup_\ell \Phi(C_\ell))\\ &= \frac{1}{1+\varepsilon}\nu_n(\Phi(\sqcup_\ell C_\ell)) = \frac{1}{1+\varepsilon}\nu_n(\Phi(K_j)).\end{aligned} \tag{9.20}$$

Étape 2. Preuve de (9.16). Nous allons passer à la limite (sur j) dans (9.20). Expliquons d'abord la démarche.

Posons

$$\nu(B) := \int_B |J_\Phi(y)|\,dy,\ \forall\, B \in \mathscr{B}_U. \tag{9.21}$$

Alors ν est une mesure borélienne (exercice 6.40). De même, si nous posons

$$\mu(B) := \nu_n(\Phi(B)),\ \forall\, B \in \mathscr{B}_U, \tag{9.22}$$

alors μ est une mesure borélienne (exercice 9.13).

Par ailleurs, nous avons

$$K_j \searrow K \tag{9.23}$$

(lemme 9.7 a)).

Ainsi, pour passer à la limite dans dans (9.20), l'idée naturelle est d'utiliser le théorème de la suite décroissante (proposition 4.2 a)) pour les mesures ν et μ. Pour ce faire, il faut trouver un j tel que $\nu(K_j) < \infty$ (ce qui implique, au vu de (9.20), $\mu(K_j) < \infty$).

Grâce à l'exercice 9.11 a) et au choix de j_1, nous avons, pour tout cube C de K_{j_1},

$$x \in \overline{C} \implies \exists\, y \in K \text{ tel que } \|x-y\|_\infty \leq \frac{1}{2^{j_1}} \leq \delta \implies [x,y] \subset U \implies x \in U,$$

et donc $\overline{C} \subset U$. K_{j_1} étant une union finie de cubes C_ℓ, $\ell \in I$, de $\mathscr{Q}_j$ (lemme 9.7 c)), nous obtenons

$$L := \overline{K_{j_1}} = \overline{\cup_{\ell\in I} C_\ell} = \cup_{\ell\in I} \overline{C_\ell} \subset U.$$

L étant compact (lemme 9.7 c)), nous obtenons

$$\nu(K_{j_1}) = \int_{K_{j_1}} |J_\Phi(y)|\, dy \leq \max_{y\in L} |J_\Phi(y)|\, \nu_n(K_{j_1}) < \infty. \tag{9.24}$$

En utilisant (9.24), (9.23), le fait que ν est une mesure, et le théorème de la suite décroissante, nous obtenons

$$\lim_j \int_{K_j} |J_\Phi(y)|\, dy = \lim_j \nu(K_j) = \nu(K) = \int_K |J_\Phi(y)|\, dy. \tag{9.25}$$

De (9.20) et (9.24), nous avons $\mu(K_{j_1}) < \infty$. Comme ci-dessus, (9.23), le fait que μ est une mesure, et le théorème de la suite décroissante, impliquent

$$\lim_j \nu_n(\Phi(K_j)) = \lim_j \mu(K_j) = \mu(K) = \nu_n(\Phi(K)). \tag{9.26}$$

En combinant (9.20), (9.25) et (9.26), nous obtenons, en faisant $j \to \infty$,

$$\int_K |J_\Phi(y)|\, dy \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\, \nu_n(\Phi(K)). \tag{9.27}$$

En faisant $\varepsilon \to 0$ dans (9.27), nous obtenons (9.16).

Étape 3. Équivalence entre (9.16) *et* (9.17). Soit $L \subset V$. Si L est un compact, alors $K := \Phi^{-1}(L)$ est un compact (pourquoi ?), et (9.17) revient à (9.16) appliquée à K. Symétriquement, si $K \subset$ est compact, alors $L := \Phi(K)$ l'est également, et (9.16) revient à (9.17) appliquée à L. CQFD

9.6 Théorème du changement de variables

Nous pouvons enfin compléter la preuve du théorème du changement de variables.

9.14 Théorème (Théorème du changement de variables)**.** Soit $\Phi : U \to V$ un C^1-difféomorphisme, avec U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$.

Soit $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$. Soit $g : U \to \overline{\mathbb{R}}$, $g := f \circ \Phi\, |J_\Phi|$.

Nous avons :

a) f est borélienne si et seulement si g l'est.

b) f est Lebesgue mesurable si et seulement si g l' est.

c) f a une intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue) si et seulement si

g en a une, et dans ce cas

$$\int_V f\, d\lambda_n = \int_U g\, d\lambda_n = \int_U f \circ \Phi\, |J_\Phi|\, d\lambda_n. \tag{9.28}$$

9.15 Remarque. Il est important de comprendre le sens de l'égalité (9.28). Elle affirme :

a) Que les fonctions $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ et $f \circ \Phi\, |J_\Phi| : U \to \overline{\mathbb{R}}$ *sont de même nature*†.

b) Que leurs intégrales de Lebesgue sont *de même nature*‡ et, en cas d'existence, égales.

C'est une *égalité au sens du théorème du changement de variables*.

Démonstrations

Démonstration du théorème 9.14. Commençons par une observation générale concernant les équivalences à montrer. En notant l'identité

$$f = g \circ \Phi^{-1}\, |J_{\Phi^{-1}}|, \tag{9.29}$$

(justifier) il s'ensuit qu'il suffit à chaque fois d'établir une implication (en cas d'équivalence) ou une inégalité (en cas d'égalité) ; l'implication inverse (ou l'inégalité opposée) s'obtient en échangeant U avec V et Φ avec Φ^{-1}.

Pour faciliter la compréhension, la preuve du théorème est découpée en plusieurs étapes simples.

Étape 1. $B \subset V$ est borélien si et seulement si $\Phi^{-1}(B) \subset U$ est borélien. Ceci découle de l'exercice 2.20.

Étape 2. Preuve de a). Supposons par exemple $f : V \to \mathbb{R}$; preuve similaire si f peut prendre les valeurs $\pm\infty$. Soit $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Alors $(f \circ \Phi)^{-1}(B) = \Phi^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathscr{B}_U$, grâce à l'étape 1 (justifier). Il s'ensuit que $f \circ \Phi$ est borélienne, et donc g l'est également (justifier).

Étape 3. Nous avons

$$\nu_n(B) \leq \int_{\Phi^{-1}(B)} |J_\Phi(y)|\, dy,\ \forall\, B \in \mathscr{B}_V. \tag{9.30}$$

Notons que le membre de droite de (9.30) est bien défini (étape 1).

Soit $B \in \mathscr{B}_V$. Soit $(K_j)_j$ une suite de compacts tels que

$$K_j \subset B,\ \forall\, j, \text{ et } \nu_n(K_j) \to \nu_n(B). \tag{9.31}$$

†. *De même nature* : borélienne ou pas, Lebesgue mesurable ou pas, ayant une intégrale de Lebesgue ou pas, Lebesgue intégrable ou pas.

‡. *De même nature* : existe ou n'existe pas.

L'existence d'une telle suite suit du corollaire 4.27 appliqué à la mesure ν_n, qui est *de Radon* (détailler).

L'inégalité clé (9.17) et la monotonie de l'intégrale donnent

$$\nu_n(K_j) \leq \int_{\Phi^{-1}(K_j)} |J_\Phi(y)|\, dy \leq \int_{\Phi^{-1}(B)} |J_\Phi(y)|\, dy,\ \forall\, j. \tag{9.32}$$

En faisant $j \to \infty$ dans (9.32) et en utilisant (9.31), nous obtenons (9.30).

Étape 4. Nous avons

$$\int_V f(x)\, dx \leq \int_U f(\Phi(y))\, |J_\Phi(y)|\, dy = \int_U g(y)\, dy, \\ \forall\, f : V \to [0, \infty] \text{ borélienne positive.} \tag{9.33}$$

Si $f := \chi_B$, alors $f \circ \Phi = \chi_{\Phi^{-1}(B)}$, et (9.33) devient (9.30) (vérifier).

Par linéarité de l'intégrale, (9.33) reste vraie pour une fonction étagée (justifier, en partant du cas $f = \chi_B$ et d'une représentation *admissible*).

Si f est borélienne positive, soit $(f_j)_j$ une suite de fonctions étagées positives telles que $0 \leq f_j \nearrow f$ (voir le corollaire 3.7). En appliquant (9.33) et en faisant $j \to \infty$, nous obtenons (9.33) pour f via le théorème de convergence monotone (vérifier).

Étape 5. Nous avons

$$\int_V f(x)\, dx = \int_U g(y)\, dy,\ \forall\, f : V \to [0, \infty] \text{ borélienne positive.} \tag{9.34}$$

En appliquant (9.33) à Φ^{-1} et à $f \circ \Phi\, |J_\Phi|$, nous obtenons, en utilisant (9.29),

$$\int_V g(y)\, dy \leq \int_U f(x)\, dx. \tag{9.35}$$

Nous concluons grâce à (9.33) et (9.35).

Étape 6. Preuve de (9.28) *si f est borélienne.* Ceci se fait en appliquant (9.34) à $f_\pm$ et en retranchant les deux égalités obtenues.

Étape 7. $B \in \mathscr{B}_V$ est ν_n- négligeable si et seulement si $\Phi^{-1}(B) \subset U$ est ν_n-négligeable. Il suffit de montrer que, si $B \in \mathscr{B}_V$ est négligeable, alors $\Phi^{-1}(B)$ est négligeable.

Pour un tel B, (9.34) appliquée à $f := \chi_B$ donne

$$0 = \nu_n(B) = \int_V \chi_B(y)\, dy = \int_U \chi_{\Phi^{-1}(B)}(y)\, |J_\Phi(y)|\, dy = \int_{\Phi^{-1}(B)} |J_\Phi(y)|\, dy. \tag{9.36}$$

Il s'ensuit que $|J_\Phi(y)| = 0$ ν_n-p. p. sur $\Phi^{-1}(B)$ (proposition 6.35 a)). Comme, par ailleurs $|J_\Phi(y)| > 0$ en tout point, nous obtenons que $\nu_n(\Phi^{-1}(B)) = 0$.

Étape 8. Preuve de b). Supposons $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ Lebesgue mesurable. Soit $\widetilde{f} : V \to \overline{\mathbb{R}}$ borélienne et soit $B \in \mathscr{B}_V$ un borélien négligeable tel que $f = \widetilde{f}$ sur $V \setminus B$. Alors $\widetilde{g} := \widetilde{f} \circ \Phi \, |J_\Phi| = g$ en dehors de l'ensemble $\Phi^{-1}(B)$. Nous concluons grâce à a) et à l'étape 7 (justifier l'existence de $\widetilde{f}$ et B, et la conclusion finale).

Étape 9. Preuve de (9.28) *si f est Lebesgue mesurable.* Avec les notations de l'étape précédente, nous avons, en utilisant (9.28) pour $\widetilde{f}$ et le corollaire 6.24, les égalités au sens du théorème du changement de variables

$$\int_V f(x)\, dx = \int_V \widetilde{f}(x)\, dx = \int_U \widetilde{g}(y)\, dy = \int_U g(y)\, dy.$$ CQFD

9.7 Ensembles Lebesgue négligeables

Cette section prépare à la preuve du *théorème du presque changement de variables* 9.21. Les résultats présentés donnent des exemples utiles d'ensemble Lebesgue négligeables.

9.16 Proposition. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Psi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, avec $m \geq n$. Si $E \subset U$ est ν_n-négligeable, alors $\Psi(E)$ est ν_m-négligeable. $\diamond$

9.17 Corollaire. Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Psi \in C^1(U, \mathbb{R}^m)$, avec $m \geq n$. Si $E \subset U$ est un fermé ν_n-négligeable, alors $\Psi(E)$ est un borélien ν_m-négligeable. $\diamond$

Exercices

9.18 Exercice. Montrer qu'une courbe dans $\mathbb{R}^2$ est Lebesgue négligeable. $\diamond$

Démonstrations

Commençons par établir un résultat classique sur les recouvrements dyadiques.

9.19 Proposition. Tout ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est union a. p. d. de cubes d. d. d. $\diamond$

Démonstration de la proposition 9.19. Reprenons les notations de la section 9.3. Posons

$$M_0 := \{C \in \mathscr{Q}_0 \,;\, C \subset U\}$$

et, par récurrence,

$$M_j := \{C \in \mathscr{Q}_j \,;\, C \subset U \setminus \cup_{C' \in M_0 \cup \ldots \cup M_{j-1}} C'\}.$$

Chaque $\mathscr{Q}_j$ étant dénombrable, M_j est a. p. d., d'où $\cup_j M_j$ est a. p. d. Par construction, les cubes qui apparaissent dans $\cup_j M_j$ sont d. d. d. L'inclusion $\cup_{C \in \cup_j M_j} C \subset U$ étant claire par construction, il reste à montrer que $\cup_{C \in \cup_j M_j} C \supset U$.

Soit $x \in U$. Alors x appartient à exactement un cube $C_j \in \mathscr{Q}_j$, pour tout j. Si $C_j \in M_j$ pour un j, alors $x \in \cup_{C \in \cup_\ell M_\ell} C$. Pour conclure, il suffit de montrer que le contraire mène à une absurdité.

Si, pour chaque j, $C_j \notin M_j$, alors en particulier $C_0 \notin M_0$, d'où $C_0 \cap U^c \neq \emptyset$, ou encore il existe $x_0 \in C_0 \cap U^c$. Il s'ensuit que $\mathrm{dist}(x, U^c) \leq \|x - x_0\|_\infty < 1$.

Montrons, par récurrence sur j, que $\mathrm{dist}(x, U^c) < 1/2^j$, $j \in \mathbb{N}$. (En admettant ce fait, nous obtenons que $\mathrm{dist}(x, U^c) = 0$. U^c étant fermé, ceci donne la contradiction $x \in U^c$.)

Passage de $j-1$ à j : comme $x \in C_\ell \notin M_\ell$, $\ell = 0, \ldots, j-1$, nous avons $x \in U \setminus \cup_{C \in M_0 \cup \ldots \cup M_{j-1}} C$. Par ailleurs, comme $x \in C_j$, nous avons $C_j \subset \mathbb{R}^n \setminus (\cup_{C \in M_0 \cup \ldots \cup M_{j-1}} C)$ (justifier, par exemple sur un dessin). Compte tenu du fait que $C_j \notin M_j$, nous obtenons $C_j \cap U^c \neq \emptyset$. Comme ci-dessus, nous en déduisons que $\mathrm{dist}(x, U^c) < 1/2^j$. CQFD

Le résultat suivant est une variante du théorème 4.35 a) dans le cas particulier des ensembles négligeables.

9.20 Proposition. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. L'ensemble E est Lebesgue négligeable si et seulement si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une famille a. p. d. de cubes $(C_i)_i$ telle que $E \subset \cup_i C_i$ et $\sum_i \nu_n(C_i) < \varepsilon$. ◇

Démonstration de la proposition 9.20.
« $\Longrightarrow$ » Il existe un ouvert U tel que $E \subset U$ et $\nu_n(U) < \varepsilon$ (corollaire 4.27). En utilisant la proposition 9.19, nous écrivons U comme l'union d'une famille a. p. d. $(C_i)_i$ de cubes disjoints. Alors $E \subset \sqcup_i C_i$ et $\sum \nu_n(C_i) = \nu_n(U) < \varepsilon$.

« $\Longleftarrow$ » Avec $\varepsilon := 1/m$, $m \in \mathbb{N}^*$, soit $(C_i^m)_i$ la famille de l'énoncé. Posons $B := \cap_m \cup_i C_i^m$. Alors B est un borélien contenu dans chaque $\cup_i C_i^m$, donc ν_n-négligeable (justifier). Par ailleurs, B contient E, donc E est ν_n-négligeable. CQFD

Démonstration de la proposition 9.16. Soit, pour $\ell \in \mathbb{N}^*$,

$$U_\ell := \{x \in \mathbb{R}^n \; ; \; \|x\|_\infty < \ell, \, \mathrm{dist}(x, U^c) > 1/\ell\},$$

de sorte que $U_\ell \nearrow U$, $\overline{U_\ell} \nearrow U$, $\overline{U_\ell}$ est compact et $\overline{U_\ell} \subset U_{\ell+1}$.

Nous avons $\Psi(E) = \cup_\ell \Psi(E \cap U_\ell)$; il suffit donc de montrer que $\Psi(E \cap U_\ell)$ est ν_n-négligeable, $\forall \, \ell$. Nous pouvons ainsi remplacer E par $E \cap U_\ell$, et donc supposer que $E \subset U_\ell$.

Soit $\varepsilon_\ell := \mathrm{dist}(U_\ell, (U_{\ell+1})^c)$, qui est > 0 (pourquoi ?). Soit $\varepsilon < (\varepsilon_\ell)^n$. Soit $(C_i)_i$ une famille a. p. d. de cubes tels que $E \subset \cup_i C_i$ et $\sum_i \nu_n(C_i) < \varepsilon$. (L'existence des cubes découle de la proposition 9.20.) En particulier, nous avons $\nu_n(C_i) < \varepsilon$ pour tout i, d'où chaque cube est de taille $< \varepsilon^{1/n} < \varepsilon_\ell$.

Quitte à enlever de la suite les cubes « inutiles » (qui n'intersectent pas E), nous pouvons supposer $E \cap C_i \neq \emptyset$, pour tout i. Considérons, à i fixé, un point $y \in E \cap C_i \subset U_\ell$. Si $x \in C_i$, nous avons $\|x - y\|_\infty < \varepsilon_\ell$, d'où $\mathrm{dist}(x, U_\ell) < \varepsilon_\ell$. Il s'ensuit que $\cup_i C_i \subset U_{\ell+1}$.

Soit, pour chaque i, x^i le centre de C_i (voir la définition 9.6). Pour $x \in C_i$, le segment $[x, x^i]$ est contenu dans C_i, donc dans $U_{\ell+1}$. Le théorème des accroissement finis donne (*) $\|\Phi(x) - \Phi(x^i)\|_\infty \leq C\|x - x^i\|_\infty$, $x \in C_i$, où $C := \max\{\|D\Phi(y)\| \, ; \, y \in \overline{U_{\ell+1}}\} < \infty$.

Si δ_i est la taille de C_i, alors (*) équivaut à $\Phi(C_i) \subset \overline{B}(\Phi(x^i), C\delta_i/2)$. Nous trouvons que

$$\Phi(E) \subset \cup_i \overline{B}(\Phi(x^i), C\delta_i/2),$$

d'où

$$\nu_n(\Phi(E)) \leq \sum_i C^m \delta_i^m \leq C^m \varepsilon_\ell^{m-n} \sum_i \nu_n(C_i) < C^m \varepsilon_\ell^{m-n} \varepsilon. \tag{9.37}$$

Nous complétons la preuve en faisant $\varepsilon \to 0$ dans (9.37). CQFD

Démonstration du corollaire 9.17. Au vu de la proposition précédente, il suffit de montrer que $\Psi(E)$ est un borélien. Or, E étant fermé, il existe une suite $(K_j)_j$ de compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que $E = \cup_j K_j$. Comme $\Psi(K_j)$ est compact, donc borélien de $\mathbb{R}^m$, l'ensemble $\Psi(E) = \cup_j \Psi(K_j)$ est un borélien. CQFD

9.8 Théorème du « presque changement de variables »

9.21 Théorème (Théorème du presque changement de variables)**.** Soient U_1, U, E, Φ avec les propriétés suivantes :

i) U_1 est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $\Phi \in C^1(U_1, \mathbb{R}^n)$.

ii) $U \subset U_1$ est un ouvert. Si nous posons $V := \Phi(U)$, alors $\Phi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme.

iii) $E \subset U_1 \backslash U$ est un fermé ν_n-négligeable.

Soit $F := \Phi(E)$.

Si $f : V \cup F \to \overline{\mathbb{R}}$, soit $g : U \sqcup E \to \overline{\mathbb{R}}$, $g := f \circ \Phi \, |J_\Phi|$.

Nous avons :

a) g est borélienne si f l'est.[†]

b) f est Lebesgue mesurable si et seulement si g l' est.

c) f a une intégrale (par rapport à la mesure de Lebesgue) si et seulement si g en a une, et dans ce cas

$$\int_{V \cup F} f \, d\lambda_n = \int_{U \sqcup E} g \, d\lambda_n = \int_{U \sqcup E} f \circ \Phi \, |J_\Phi| \, d\lambda_n = \int_U f \circ \Phi \, |J_\Phi| \, d\lambda_n. \tag{9.38}$$

†. Du corollaire 9.17, $V \cup F$ est borélien.

Démonstrations

Démonstration du théorème 9.21.

a) Supposons par exemple que $f : V \to \mathbb{R}$; le cas où f peut prendre les valeurs $\pm\infty$ est similaire. Si $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, alors $(f \circ \Phi)^{-1}(B) = \Phi^{-1}(f^{-1}(B)) \in \mathscr{B}_Y$ (en utilisant le théorème 3.5 et l'exercice 2.20). Il s'ensuit que g est borélienne (justifier).

b) Les parties E et F étant ν_n-négligeables (E par hypothèse, et F grâce au corollaire 9.17), nous avons f Lebesgue mesurable$\iff$ $f\chi_{F^c}$ l'est$\iff$ $f_{|V}$ l'est$\iff$ $g_{|U}$ l'est (ici, nous utilisons le théorème du changement de variables)$\iff$ g est Lebesgue mesurable.

c) suit du théorème du changement de variables 9.14, en notant que les intégrales sur E et $F \setminus V$ sont nulles. CQFD

9.9 Changements usuels

Comme expliqué dans l'aperçu, la motivation du théorème du presque changement de variables 9.21 vient des (presque) changements de variables *usuels*, que nous rappellerons dans cette section.

9.9.1 Coordonnées polaires

Tout point de $\mathbb{R}^2$ s'écrit sous la forme

$$(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta), \text{ avec } r := (x^2 + y^2)^{1/2} \geq 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi[.$$

Si $(x, y) \neq (0, 0)$, alors cette écriture est unique et, de plus,

$$\theta = 0 \iff x > 0 \text{ et } y = 0.$$

Posons

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ \Phi(r, \theta) := (r\cos\theta, r\sin\theta).$$

Nous avons $\Phi \in C^1$ et $\det J_\Phi(r, \theta) = r$.

Il s'ensuit de ce qui précède que Φ est une bijection de $U :=]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ vers $V := \mathbb{R}^2 \setminus ([0, \infty[\times\{0\})$.

Par ailleurs, nous avons $\det J_\Phi \neq 0$ sur U, d'où $\Phi : U \to V$ est un difféomorphisme.

Avec $E := \partial U$ et $F := [0, \infty[\times\{0\}$, nous avons $\Phi(E) = F$ et E est un fermé Lebesgue négligeable (justifier).

Nous pouvons donc appliquer le théorème 9.21 (avec $U_1 := \mathbb{R}^2$) : si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\, d\lambda_2 = \int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\, d\lambda_2(r,\theta)$$

au sens du théorème du changement de variables.

9.9.2 Coordonnées sphériques

Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Soit $\rho := (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$. Il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que $(x_1, x_2) = (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.

Par ailleurs, (ρ, x_3) s'écrit sous la forme $(\rho, x_3) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, avec $r \geq 0$ et $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2[$ (la condition sur φ vient du fait que $\rho \geq 0$). Il s'ensuit que tout point $x \in \mathbb{R}^3$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} x_1 &= r\cos\varphi\cos\theta, \\ x_2 &= r\cos\varphi\sin\theta, \text{ avec } r \geq 0,\ \varphi \in [-\pi/2, \pi/2[,\ \theta \in [0, 2\pi[, \\ x_3 &= r\sin\varphi. \end{aligned} \tag{9.39}$$

Si, de plus, $x \notin (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \cup (]0,\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})$, alors nous pouvons prendre $r > 0$, $\varphi \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $\theta \in]0, 2\pi[$ et, pour un tel choix des coordonnées r, φ, θ, l'écriture (9.39) est unique.

Soit

$$\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \Phi(r, \varphi, \theta) := (r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi).$$

Avec

$$U_1 := \mathbb{R}^3,\ U :=]0,\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[$$

et

$$V := \mathbb{R}^3 \setminus ((\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \cup (]0,\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})),$$

Φ est une bijection de classe C^1 entre U et V.

Par ailleurs, nous avons $\det J_\Phi(r, \varphi, \theta) = -r^2\cos\varphi$, d'où $\det J_\Phi \neq 0$ sur U et donc $\Phi : U \to V$ est un difféomorphisme.

Avec $E := \partial U$ et $F := (\{(0,0)\} \times \mathbb{R}) \cup (]0,\infty[\times\{0\} \times \mathbb{R})$, nous avons E fermé, $\lambda_3(E) = 0$ et $\Phi(E) = F$ (vérifier).

Le théorème du presque changements de variables 9.21 donne : si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\, d\lambda_3$$
$$= \int_{[0,\infty[\times[-\pi/2,\pi/2]\times[0,2\pi]} f(r\cos\varphi\cos\theta, r\cos\varphi\sin\theta, r\sin\varphi)\, r^2\cos\varphi\, d\lambda_3(r,\varphi,\theta)$$

au sens du théorème du changement de variables.

9.9.3 Coordonnées cylindriques

Si $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \backslash([0,\infty[\times\{0\})$, alors $(x_1, x_2, x_3) = (r\cos\theta, r\sin\theta, x_3)$, avec $r > 0$, $0 < \theta < 2\pi$, l'écriture étant unique.

Le théorème du presque changement de variables, appliqué avec

$$\Phi(r,\theta,x_3) := (r\cos\theta, r\sin\theta, x_3),\ \text{(qui satisfait } \det J_\Phi(r,\theta,x_3) = r\text{)},$$
$$U_1 := \mathbb{R}^3,\ U :=]0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R},\ V := \mathbb{R}^3\backslash([0,\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R}),$$
$$E := \partial U,\ F := [0,\infty[\times\{0\}\times\mathbb{R},$$

donne : si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{R}^3} f\, d\lambda_3 = \int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]\times\mathbb{R}} f(r\cos\theta, r\sin\theta, x_3)\, r\, d\lambda_3(r,\theta,x_3)$$

au sens du théorème du changement de variables.

9.9.4 Coordonnées sphériques généralisées

Soit $\Phi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\Phi_n(r,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}) := (r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-1}, r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\sin\theta_{n-1},$$
$$r\cos\theta_1\cos\theta_2\ldots\cos\theta_{n-3}\sin\theta_{n-2},\ldots, r\sin\theta_1).$$

Tout point de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme $x = \Phi_n(r,\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1})$. La preuve de cette assertion se fait par récurrence sur n, le cas $n = 2$ correspondant aux coordonnées polaires. Passage de $n-1$ à n : soit $\rho := \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Nous appliquons l'hypothèse de récurrence à $(\rho, x_3, \ldots, x_n)$, qui s'écrit donc sous la forme

$$(\rho, x_3, \ldots, x_n) = \Phi_{n-1}(r,\theta_1,\ldots,\theta_{n-2}).$$

Il s'ensuit que $\rho = r\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-2}$, d'où il existe θ_{n-1} tel que

$$x_1 = r\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1} \text{ et } x_2 = r\cos\theta_1\ldots\cos\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.$$

Nous concluons à l'égalité $x = \Phi_n(r, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1})$.

Une preuve analogue par récurrence montre (nous omettons les détails) que l'on peut prendre $r \geq 0$, $\theta_1, \dots, \theta_{n-2} \in [-\pi/2, \pi/2]$ et $\theta_{n-1} \in [0, 2\pi]$.

Le jacobien de Φ_n est

$$\det J_{\Phi_n} = (-1)^{n(n+1)/2+1} r^{n-1} \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \dots \cos\theta_{n-2}. \tag{9.40}$$

Preuve de (9.40) par récurrence sur n, les cas $n = 2, 3$ étant déjà vérifiés. Si $a_1, \dots, a_{n-1}$ désignent les cooordonnées de Φ_{n-1}, alors

$$\Phi_n = (a_1 \cos\theta_{n-1}, a_1 \sin\theta_{n-1}, a_2, \dots, a_{n-1}).$$

Il s'ensuit que

$$J_{\Phi_n} = \begin{pmatrix} \cos\theta_{n-1} J_{a_1} & -a_1 \sin\theta_{n-1} \\ \sin\theta_{n-1} J_{a_1} & a_1 \cos\theta_{n-1} \\ J_{a_2} & 0 \\ \dots & 0 \\ J_{a_{n-1}} & 0 \end{pmatrix}.$$

En développant le déterminant de J_{Φ_n} selon la dernière colonne, nous obtenons $J_{\Phi_n} = (-1)^n a_1 J_{\Phi_{n-1}}$, relation de récurrence qui permet d'établir facilement (9.40).

Avec

$$U_1 := \mathbb{R}^n,\ U :=]0, \infty[\times] - \pi/2, \pi/2[^{n-2}\times]0, 2\pi[,\ E := \partial U,$$
$$F := \cup_{j=1}^{n-2}(\mathbb{R}^{n-j} \times \{0\} \times \mathbb{R}^{j-1}) \cup ([0, \infty[\times\{0\} \times \mathbb{R}^{n-2}),\ V := \mathbb{R}^n \backslash F,$$

nous déduisons (comme pour les coordonnées sphériques) que $\Phi : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme, que E est un fermé λ_n-négligeable et que $\Phi(E) = F$.

Le théorème du presque changement de variables 9.21 donne : si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est Lebesgue mesurable, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda_n$$
$$= \int_{[0,\infty[\times[-\pi/2,\pi/2]^{n-2}\times[0,2\pi]} f \circ \Phi_n\, r^{n-1} \cos^{n-2}\theta_1 \cos^{n-3}\theta_2 \dots \cos\theta_{n-2}\, d\lambda_n$$

au sens du théorème du changement de variables.

9.10 Intégrales de référence

Comme pour les intégrales généralisées, quand nous étudions la nature d'une intégrale de Lebesgue il est utile de disposer d'une liste d'intégrales de nature connue. Dans la suite, nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne, notée $|\ |$. B_R désigne la boule ouverte centrée en 0 et de rayon R, $B(0, R)$.

9.22 Proposition. Pour $a, b \in \mathbb{R}$, nous avons :

a) $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^a}$ est intégrable sur $B_1 \backslash \{0\}$ si et seulement si $a < n$.

b) $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^a |\ln|x||^b}$ est intégrable sur $B_{1/2} \backslash \{0\}$ si et seulement si $a < n$ ou $[a = n$ et $b > 1]$.

c) $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^a}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n \backslash B_1$ si et seulement si $a > n$.

d) $x \mapsto \dfrac{1}{|x|^a |\ln|x||^b}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^n \backslash B_2$ si et seulement si $a > n$ ou $[a = n$ et $b > 1]$. ◇

Démonstrations

Démonstration. Nous faisons la preuve de b) ; preuves similaires dans les autres cas.

En passant en coordonnées sphériques généralisées et en appliquant le théorème de Tonelli 8.24, nous avons, avec $g(\theta_1, \ldots, \theta_{n-1}) := \cos^{n-2}\theta_1 \ldots \cos\theta_{n-2}$ (justifier) :

$$\begin{aligned}\int_{B_{1/2}\backslash\{0\}} |x|^{-a}|\ln|x||^{-b} d\nu_n &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_{1/2}\backslash\{0\}}(x)\, |x|^{-a}|\ln|x||^{-b} d\nu_n \\ &= \int_{[0,\infty[\times[-\pi/2,\pi/2]^{n-2}\times[0,2\pi]} \chi_{]0,1/2[}(r)\, r^{-a+n-1}|\ln r|^{-b} g\, d\nu_n \\ &= \int_{]0,1/2[\times[-\pi/2,\pi/2]^{n-2}\times[0,2\pi]} r^{-a+n-1}|\ln r|^{-b} g\, d\nu_n \\ &= C\int_0^{1/2} r^{-a+n-1}|\ln r|^{-b}\, d\nu_1,\end{aligned}$$

où C est le produit d'intégrales de Riemann

$$C := \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{n-1}\theta_1\, d\theta_1 \ldots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\theta_{n-2}\, d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} d\theta_{n-1}.$$

Nous avons $0 < C < \infty$, ce qui montre que l'intégrale de départ est finie si et seulement si l'intégrale (de Lebesgue ou généralisée) $\displaystyle\int_0^{1/2} 1/(r^{a-n+1}|\ln r|^b)\, d\nu_1$ est finie, ce qui équivaut à $a < n$ ou $[a = n$ et $b > 1]$. CQFD

9.11 Pour aller plus loin

Voici un résultat utile, *plus fort* que le théorème du changement de variables 9.14.

9.23 Théorème. Soit $\Phi : U \to V$ telle que :

i) U, V sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$.

ii) Φ est *différentiable* et *bijective*.

Pour $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$, nous avons

$$\int_V f(x)\, dx = \int_U f(\Phi(y))\, |J_\Phi(y)|\, dy \tag{9.41}$$

au sens du théorème du changement de variables.

Pour la preuve, voir Rudin [19, Theorem 7.26].

Une autre extension utile du théorème 9.14 est la *formule de l'indicatrice de Banach* (voir Evans et Gariepy [7, Section 3.3.2, Theorem 1 avec $m = n$]). Voici un cas particulier, simple à énoncer et qui sera abordé comme exercice de synthèse, de cette formule.

9.24 Théorème. Soit $\Phi \in C^1(U, V)$, avec U, V ouverts de $\mathbb{R}^n$. Si $f : V \to \overline{\mathbb{R}}$ est Lebesgue mesurable, alors

$$\int_U f(\Phi(y))\, |J_\Phi(y)|\, dy = \int_V f(x)\, \#[\Phi^{-1}(x)]\, dx \tag{9.42}$$

au sens du théorème du changement de variables. ◇

Ici, $\#$ est la *mesure de comptage*, donc

$$\#A := \begin{cases} \text{card } A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Chapitre 10

Espaces L^p

10.0 Aperçu

Nous avons déjà vu l'importance des fonctions intégrables (autrement dit : des fonctions mesurables telles que $\int |f|\, d\mu < \infty$), par exemple comme majorantes dans le théorème de convergence dominée. Dans le langage probabiliste, une fonction intégrable est une fonction f qui a une *espérance* $\mathbb{E}(f) := \int f\, dP$ finie. Une autre quantité importante est la *variance* $V(f) := \int (f - \mathbb{E}(f))^2\, dP$, qui est finie à condition que $\int f^2\, dP$ soit finie.

D'autres conditions similaires jouent un rôle important : par exemple, la condition $\int |f|^3\, dP < \infty$ intervient dans l'étude de la vitesse de convergence dans le *théorème central limite*; la condition $\int |f|^p\, dP < \infty$, avec $1 < p < 2$, pour la validité du théorème central limite, etc.

Nous allons présenter ici un « chapeau » commun à toutes ces propriétés, qui mène aux *espaces de Lebesgue* $\mathscr{L}^p$, avec $1 \leq p < \infty$:

$$\mathscr{L}^p := \left\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ f \text{ mesurable et } \|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p \right)^{1/p} < \infty \right\}.$$

La définition de l'espace $\mathscr{L}^\infty$ fait intervenir une nouvelle notion, celle de $\sup$ *essentiel*, qui est un $\sup$ adapté à la théorie de l'intégration, donc ne tenant pas compte des ensembles négligeables.

Les espaces $\mathscr{L}^p$ sont des espaces vectoriels, et $f \mapsto \|f\|_{L^p}$ vérifie l'inégalité triangulaire, mais n'est pas une norme. Nous allons pallier ce défaut en définissant des cousins des espaces $\mathscr{L}^p$, les espaces L^p ; la définition est conceptuellement compliquée, mais concrètement facile à maîtriser.

Ces espaces sont des espaces normés par $\| \;\|_{L^p}$ (inégalité de Minkowski, théorème 10.26) et complets (théorème de Fatou 10.28).

L'autre notion importante de ce chapitre est celle d'*exposé conjugué* : si $1 \le p \le \infty$, le *conjugué* de p est le nombre $1 \le q \le \infty$ défini par

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

L'*inégalité de Hölder* (théorème 10.18) affirme que, si $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, avec p et q conjugués, alors fg est intégrable et

$$\left| \int fg \right| \le \int |fg| \le \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}.$$

L'*inégalité de Cauchy-Schwarz* s'obtient en prenant $p = q = 2$ dans l'inégalité de Hölder.

Dans la section 10.4, nous énonçons le *théorème de représentation de Riesz* 10.31, qui, de manière informelle, montre que l'inégalité de Hölder est la seule inégalité possible dans les espaces L^p avec $1 \le p < \infty$.

Dans tout le chapitre, $(X, \mathscr{T}, \mu)$ *est un espace mesuré* fixé. f, g, etc. : $X \to \overline{\mathbb{R}}$ *sont des fonctions mesurables*. Même sans mention explicite, la mesurabilité des fonctions concernées est assumée dans chaque énoncé. Le p. p. est relatif à la mesure μ.

Compétences minimales attendues.

a) Comprendre la différence entre $\mathscr{L}^p$ et L^p.

b) Comprendre la définition de $\mathscr{L}^\infty$.

c) Savoir montrer qu'un objet est bien défini pour une classe $f \in L^p$.

d) Savoir utiliser les inégalités de Hölder et Minkowski.

e) Savoir utiliser le théorème de Fatou et son corollaire. ◇

10.1 $\mathscr{L}^p$ versus L^p

Dans cette section, nous définissons les *espaces de Lebesgue* $\mathscr{L}^p$ et L^p et donnons quelques éléments pour comprendre les règles de calcul dans L^p.

10.1 Définition (Espaces de Lebesgue $\mathscr{L}^p$).

a) Si $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p\right)^{1/p} = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

b) Si $p = \infty$,

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{esssup}|f| := \min\{M \in \overline{\mathbb{R}}\,;\ |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}.$$

c) $\mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(X, \mu) := \{f : X \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ \|f\|_{L^p} < \infty\}$.

10.2 Notation. Une notation alternative, très répandues, pour les normes $\|\ \|_{L^p}$ est $\|\ \|_p$.

Cette notation est cohérente avec les notations des normes usuelles dans $\mathbb{R}^n$: si $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, et si nous identifions x à une fonction $f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{R}$, alors $\|x\|_p = \|f\|_{L^p}$, où la seconde norme est calculée par rapport à la mesure de comptage sur $\{1, \ldots, n\}$.

Attention toutefois au danger suivant : si $f : X \to \mathbb{R}$, $\|f\|_\infty$ peut désigner, selon le contexte, soit $\sup|f|$, soit $\operatorname{esssup}|f|$. ◇

10.3 Définition (Espaces de Lebesgue L^p).

a) $L^p = L^p(X, \mu) := \mathscr{L}^p/\sim$. Ici, $\sim$ est l'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p.

b) Si $f \in L^p$, alors nous posons $\|f\|_{L^p} := \|g\|_{L^p}$, où g est une fonction arbitraire de la classe d'équivalence définissant f.

10.4 Remarque.

a) La définition $\|f\|_{L^p} := \|g\|_{L^p}$ est correcte, au sens où $\|g\|_{L^p}$ ne dépend pas du choix de g dans la classe de f, mais ceci demande une preuve ; voir l'exercice 4.22 b). En particulier, ceci implique que, si $g \in \mathscr{L}^p$ et $h \sim g$, alors $h \in \mathscr{L}^p$.

b) Voici une conséquence de l'item a). Nous pouvons définir de la même manière $\|f\|_{L^p}$, $1 \leq p \leq \infty$, si f est une classe d'équivalence de $\{g : X \to \overline{\mathbb{R}}\,;\ g \text{ mesurable}\}$ pour $\sim$. Nous avons alors la définition équivalente de L^p :

$$L^p := \{f\,;\ f \text{ est une classe d'équivalence telle que } \|f\|_{L^p} < \infty\}.$$ ◇

10.5 Notation. Par abus de notation, et bien qu'un élément de L^p soit une classe d'équivalence et non pas une fonction, nous écrivons

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \text{ si } 1 \leq p < \infty.$$

Le sens de cette égalité est que pour tout représentant g de f, l'égalité précédente est vraie si nous remplaçons à droite f par g.

Abus de notation analogue dans L^∞. ◇

Nous continuons par deux remarques essentielles pour comprendre, d'une part, le sens des énoncés concernant les espaces L^p, d'autre part, la façon de définir les opérations dans les espaces L^p.

10.6 Remarque. Lorsqu'il s'agit d'une propriété des espaces L^p, la première question à se poser est si sa preuve (qui fait intervenir des fonctions, et non pas des classes) est indépendante du choix de la fonction dans la classe d'équivalence.

Illustration pour l'inégalité de Cauchy-Schwarz (théorème 10.18 avec $p = q = 2$). Pour prouver cette inégalité, nous allons montrer que

$$\int |f_1\, g_1| \leq \left(\int |f_1|^2\right)^{1/2} \left(\int |g_1|^2\right)^{1/2}, \ \forall\, f_1, g_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}. \tag{10.1}$$

En prenant, dans (10.1), f_1 dans la classe de f et g_1 dans la classe de g, nous obtenons

$$\int |f_1\, g_1| \leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2}.$$

Pour conclure, il suffit de montrer que $f_1\, g_1$ est dans la classe de $f\, g$; or, ceci découle de l'exercice 10.11 b).

10.7 Remarque.

a) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p$, alors la proposition 6.26 (appliquée à $|f|^p$) et la remarque 6.25 montrent qu'il existe, dans la classe d'équivalence de f, une fonction g finie *partout*.

b) Si $f \in \mathscr{L}^\infty$, soit $A := \{x \in X\,;\, |f(x)| > \operatorname{esssup} f\}$. Alors $A \in \mathscr{T}$ est négligeable, d'où $g = f\,\chi_{A^c}$ est dans la classe de f. Notons que g est, par construction, bornée, en particulier finie *partout*.

c) Ainsi, lorsque nous travaillons avec une classe f de L^p, nous pouvons toujours considérer un représentant fini *partout* (et, si $p = \infty$, borné).

d) En particulier, si $f, g \in L^p$ alors nous pouvons définir la classe $f + g$ comme celle de $f_1 + g_1$, avec f_1 (respectivement g_1) dans la classe de f (respectivement g) finie partout. Dans l'esprit de la remarque 10.6, nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la classe $f + g$ obtenue ne dépend pas du choix de f_1 et g_1. ◇

La remarque suivante montre que l'espace $L^p(X, \overline{\mu})$ n'est pas, dans un sens à préciser, plus riche que l'espace $L^p(X, \mu)$.

10.8 Remarque. Nous pouvons identifier *de manière naturelle* les classes d'équivalence des fonctions $\mathscr{T}$-mesurables et $\overline{\mathscr{T}}$-mesurables. En effet, soit $f_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction $\overline{\mathscr{T}}$-mesurable. Alors (proposition 4.19 a)) il existe une fonction $\mathscr{T}$-mesurable $g_1 : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f_1 = g_1$ μ-p. p. (ou, ce qui est équivalent, telle que $f_1 = g_1$ $\overline{\mu}$-p. p.).

Notons : f la classe de f_1 par rapport à $(X, \overline{\mathscr{T}}, \overline{\mu})$, g la classe de g_1 par rapport à $(X, \overline{\mathscr{T}}, \overline{\mu})$, G la classe de g_1 par rapport à $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Par choix de g_1, nous avons $f = g$.

Par ailleurs, nous avons $G \subset g$ (vérifier). L'application $f \mapsto G$ est bien définie et bijective, de réciproque $G \mapsto g$ (vérifier).

Cette identification naturelle s'étend aux espaces L^p : si $f_1 \in \mathscr{L}^p(X, \overline{\mu})$, alors les classes respectives satisfont $f \in L^p(X, \overline{\mu})$ et $G \in L^p(X, \mu)$, ce qui donne une bijection naturelle, $f \mapsto G$, entre $L^p(X, \overline{\mu})$ et $L^p(X, \mu)$. Cette bijection préserve la norme : $\|f\|_{L^p(X,\overline{\mu})} = \|G\|_{L^p(X,\mu)}$ (vérifier).

En particulier, nous pouvons identifier $L^p(\mathbb{R}^n, \lambda_n)$ à $L^p(\mathbb{R}^n, \nu_n)$. $\diamond$

Exercices

Cet exercice donne quelques propriétés simples de $\| \, \|_{L^p}$. L'item d) est particulièrement important de point de vue théorique.

10.9 Exercice.

a) $\|tf\|_{L^p} = |t| \, \|f\|_{L^p}$, $\forall \, t \in \mathbb{R}$, $\forall \, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

b) Si $f = g$ p. p., alors $\|f - g\|_{L^p} = 0$ et $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^p}$.

c) $\|f\|_{L^p} = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.

d) La définition de $\|f\|_{L^\infty}$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty] \, ; \, |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$. Montrer que A est non vide et a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \leq C$ p. p., et donc $m = \|f\|_{L^\infty}$.

e) $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.) $\diamond$

La définition de $\| \, \|_{L^\infty}$ est assez absconse. L'exercice suivant donne un cas où $\|f\|_{L^\infty} = \sup |f|$.

10.10 Exercice. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_{L^\infty} = \sup\limits_U |f|$. $\diamond$

L'exercice suivant montre que la relation $\sim$ « commute » avec les opérations sur les fonctions.

10.11 Exercice. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence « $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. » a les propriétés suivantes.

a) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + t\, g \sim f_1 + t\, g_1$, $\forall \, t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).

b) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f\, g \sim f_1\, g_1$.

c) Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.

d) Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$. Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall \, x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall \, h$. $\diamond$

Dans le même esprit, nous mentionnons la propriété suivante, utilisée dans la définition du produit de convolution (dans le chapitre 11).

10.12 Exercice. Nous munissons $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue. Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que $h \sim h_1$, où

$$h(y) = f(x-y)\, g(y),\ h_1(y) = f_1(x-y)\, g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n. \qquad \diamond$$

L'exercice suivant introduit des espaces *très importants*, les *espaces* ℓ^p.

10.13 Exercice (Espaces ℓ^p)**.**

a) Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement $\mathscr{L}^p$ et L^p.
Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p = L^p,\ \forall\, 1 \le p \le \infty.^{\dagger}$$

b) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|(a_n)_n\|_{\ell^p} = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \le p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

c) Montrer que si $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \le p \le r \le \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_{\ell^r} \le \|(a_n)_n\|_{\ell^p}$.

d) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s\to r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$.

e) Si $1 \le r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s\searrow r} \|(a_n)_n\|_{\ell^s} = \|(a_n)_n\|_{\ell^r}$. $\diamond$

Cet exercice est une suite « concrète » de la remarque « abstraite » 10.8.

10.14 Exercice.

a) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.

b) Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.

c) Généralisation ? $\diamond$

Un autre exercice *fondamental*. Nous le commenterons à sa fin.

10.15 Exercice. Nous supposons μ *finie*.

a) Montrer que si $1 \le p_1 \le p_2 \le \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.

b) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \le r < p$ nous avons $\lim_{s\to r} \|f\|_{L^s} = \|f\|_{L^r}$. $\diamond$

†. Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d.

10.16 Remarque (Inclusions entre les espaces L^p)**.** *En général*, il n'y a pas de relation d'inclusion entre L^p et L^q, avec $p \neq q$: nous n'avons pas $L^p \subset L^q$.

Il existe deux *exceptions notables*.

a) Si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$.
Les espaces ℓ^p croissent avec p.

b) Si μ est finie et $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^1 \supset L^{p_1} \supset L^{p_2} \supset L^\infty$.
Si μ est finie, les espaces L^p décroissent avec p.

Pour l'item a), voir l'exercice 10.13 c) ; pour l'item b), l'exercice 10.15 a).

10.2 Inégalité de Hölder

Cette section est dédiée à la preuve de l'*inégalité de Hölder* et à deux de ses « réciproques » qui montrent que cette inégalité ne peut être améliorée. La première « réciproque », la proposition 10.19, servira dans la preuve de l'inégalité de Minkowski dans la section 10.3 ; elle intervient dans de nombreuses preuves « par dualité » en analyse fonctionnelle. La deuxième « réciproque », la proposition 10.20, intervient également dans des preuves d'analyse plus avancée, comme celle du théorème d'interpolation de Riesz-Thorin.

Commençons par une définition essentielle dans ce contexte.

10.17 Définition (Exposants conjugués)**.** Les nombres $p, q \in [1, \infty]$ sont *conjugués* (ou *exposants conjugués*) si et seulement si $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.[†] [‡]

10.18 Théorème (Inégalité de Hölder)**.** Si p, q sont conjugués, alors

$$\|f\, g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q}, \ \forall\, f, g \text{ (inégalité de Hölder)} . \tag{10.2}$$

En particulier, nous avons

$$\|f\, g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2} \, \|g\|_{L^2}, \ \forall\, f, g \text{ (inégalité de Cauchy-Schwarz)} . \tag{10.3}$$

Les inégalités s'entendent pour des fonctions ou pour des classes d'équivalence.

10.19 Proposition (Formule de dualité L^p–L^q (I))**.** Soient p, q exposants conjugués.

†. Notons que nous ne pouvons pas avoir en même temps $p = \infty$ et $q = \infty$. Si, par exemple, $p < \infty$, alors $q = p/(p-1)$. Si nous avons en même temps $q < \infty$, alors, par symétrie, $p = q/(q-1)$.

‡. q est désigné comme le conjugué de p (et réciproquement).

a) Si $1 \le p < \infty$, alors nous avons

$$\|f\|_{L^p} = \sup\left\{\int f\, g\, ;\, g \in \mathscr{L}^q,\ \|g\|_{L^q} \le 1\right\},\ \forall\, f \in \mathscr{L}^p. \tag{10.4}$$

De plus, nous pouvons remplacer dans (10.4) le $\sup$ par $\max$ et considérer uniquement des fonctions g telles que $f\, g \ge 0$.

b) Si μ est σ-finie, alors l'égalité (10.4) reste vraie pour $p = \infty$. ◇

10.20 Proposition (Formule de dualité L^p–L^q (II))**.** Soient p, q exposants conjugués.

Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $f\, g$ soit intégrable pour tout $g \in \mathscr{L}^q$.

a) Si $p = 1$, alors $f \in \mathscr{L}^1$.

b) Si μ est σ-finie et $1 < p \le \infty$, alors $f \in \mathscr{L}^p$.

En particulier, sous ces hypothèses nous avons (10.4). ◇

Exercices

L'inégalité suivante, classique, sert dans la preuve de l'inégalité de Hölder. Elle généralise l'inégalité élémentaire $a^2 + b^2 \ge 2\, ab$.

10.21 Exercice (Inégalité de Young)**.** Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués. Montrer que

$$a\, b \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall\, a, b \in [0, \infty[. \tag{10.5}$$

Indication. Étudier, pour b fixé, la fonction $a \mapsto \dfrac{a^p}{p} + \dfrac{b^q}{q} - ab$. ◇

L'inégalité de Hölder a des variantes à plus de deux facteurs.

10.22 Exercice. Soient $1 \le p_2, \ldots, p_k \le \infty$ tels que $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$. Montrer que

$$\|f_1 f_2 \ldots f_k\|_{L^1} \le \|f_1\|_{L^{p_1}}\, \|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$ ◇

Nous savons déjà que, si μ est *finie*, alors $L^r \subset L^p$ si $p < r$. L'exercice qui suit donne permet d'*estimer* † $\|f\|_{L^p}$ en fonction de $\|f\|_{L^r}$.

10.23 Exercice. Nous supposons μ finie. Si $1 \le p \le r \le \infty$, alors

$$\|f\|_{L^p} \le (\mu(X))^{1/p-1/r}\, \|f\|_{L^r},\ \forall\, f.$$

Ceci implique en particulier la conclusion de l'exercice 10.15 a). ◇

†. *Estimer* : donner un ordre de grandeur. En analyse, le sens est plutôt : *majorer*.

L'inégalité qui suit est un exemple simple d'*inégalité d'interpolation*.[†]

10.24 Exercice. Soient $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 1[$ tel que $\displaystyle\frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_0} + \frac{q-\theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^{p_0}}^{\theta} \|f\|_{L^{p_1}}^{1-\theta}$, $\forall f$. ⋄

Démonstrations

Démonstration du théorème 10.18. Il suffit de travailler avec des fonctions (voir la remarque 10.6).

Si $p = 1$ et $q = \infty$, nous devons montrer que

$$\int |f\, g| \leq \operatorname{esssup} |g| \int |f|,$$

qui est vraie (vérifier). Argument similaire si $p = \infty$ et $q = 1$.

Supposons maintenant que $1 < p, q < \infty$. Nous pouvons aussi supposer que $0 < \|f\|_{L^p} < \infty$ et $0 < \|g\|_{L^q} < \infty$ (justifier). Dans ce cas, nous avons $|f| < \infty$ p. p. et $|g| < \infty$ p. p. (justifier) et donc nous pouvons travailler avec des fonctions finies en tout point (voir également la remarque 6.25). Pour de telles fonctions et pour $A \in]0, \infty[$, l'inégalité de Young donne

$$|f(x)\, g(x)| = [A\, |f(x)|]\, [A^{-1}\, |g(x)|] \leq \frac{A^p\, |f(x)|^p}{p} + \frac{|g(x)|^q}{A^q\, q}, \ \forall x \in X. \tag{10.6}$$

En intégrant (10.6), nous obtenons

$$\int |f\, g| \leq \frac{A^p}{p} \|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{A^q\, q} \|g\|_{L^q}^q. \tag{10.7}$$

En choisissant, dans (10.7), la valeur de A qui minimise le membre de droite de (10.7), à savoir

$$A = \frac{\|g\|_{L^q}^{q/(p+q)}}{\|f\|_{L^p}^{p/(p+q)}},\ ^{\ddagger}$$

nous obtenons (10.2) (vérifier). CQFD

Démonstration de la proposition 10.19. L'inégalité de Hölder implique « ≤ » dans (10.4). Il suffit donc d'établir « ≥ ».

†. Du verbe *interpoler*, utilisé en *philologie* : « introduire un texte dans une œuvre à laquelle il n'appartient pas ». En *mathématiques*, l'un des sens est : « intercaler des valeurs ou des termes intermédiaires dans une série de valeurs ou de termes connus ». En analyse, l'interpolation consiste à estimer (donc majorer) des valeurs d'une fonction entre deux valeurs connues. Dans notre cas, nous *connaissons* $\|f\|_{L^{p_0}}$ et $\|f\|_{L^{p_1}}$, et nous *estimons* $\|f\|_{L^p}$.

‡. Faire une étude de fonction pour justifier ce choix de A.

a) Soit d'abord $p = 1$. Soit $g := \operatorname{sgn} f$.[†] Alors $\|g\|_{L^\infty} \leq 1$ et $\displaystyle\int f\, g = \|f\|_{L^1}$ (vérifier).

Soit maintenant $1 < p < \infty$. Si $\|f\|_{L^p} = 0$, la conclusion est claire. Supposons $\|f\|_{L^p} > 0$. Soit $h(x) := |f(x)|^{p-1} \operatorname{sgn} f(x)$. Alors h est mesurable et $\|h\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}^{p-1}$ (vérifier). Soit $g := h/\|h\|_{L^q}$, de sorte que $\|g\|_{L^q} = 1$. Nous avons

$$\int f\, g = (1/\|h\|_{L^q}) \int |f|^p = \|f\|_{L^p}.$$

b) Supposons $M := \|f\|_{L^\infty} > 0$, sinon la conclusion est claire. Soit $(X_n)_n$ une suite croissante telle que $X_n \nearrow X$ et $\mu(X_n) < \infty$, $\forall\, n$. Soit $0 < \varepsilon < M$ et soit

$$A = A_\varepsilon := \{x \in X\, ;\, |f(x)| \geq M - \varepsilon\}.$$

Nous avons $\mu(A) > 0$ (justifier). Soit $h_n := \chi_{A \cap X_n} \operatorname{sgn} f$, qui satisfait $\|h_n\|_{L^1} = \mu(A \cap X_n)$ (vérifier). Par théorème de la suite croissante, pour n suffisamment grand nous avons $\mu(A \cap X_n) > 0$. Pour un tel n, posons $g_n := h_n/\mu(A \cap X_n)$, de sorte que $\|g_n\|_{L^1} = 1$. Nous obtenons

$$\begin{aligned} \sup\left\{\int f\, g\, ;\, g \in \mathscr{L}^1,\ \|g\|_{L^1} \leq 1\right\} &\geq \int f\, g_n \\ &= \frac{1}{\mu(A \cap X_n)} \int_{A \cap X_n} |f| \geq M - \varepsilon. \end{aligned} \tag{10.8}$$

Nous concluons en faisant $\varepsilon \to 0$ dans (10.8). CQFD

La preuve de la proposition 10.20 repose sur le résultat auxiliaire suivant.

10.25 Lemme. Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués.

Soit $(a_k)_k$ une suite de nombres réels positifs telle que $\sum_k (a_k)^p = \infty$.

Alors il existe une suite $(\alpha_k)_k$ de nombres réels positifs telle que $\sum_k (\alpha_k)^q < \infty$ et $\sum_k a_k\, \alpha_k = \infty$. ◇

De manière équivalente : si $(a_k)_k \notin \ell^p$, alors la série $\sum_k a_k\, \alpha_k$ ne peut pas être convergente pour toute suite $(\alpha_k)_k \in \ell^q$.

Ainsi, le lemme 10.25 prouve (par contraposition) la proposition 10.20 dans le cas de la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Démonstration du lemme 10.25. Soient $0 = k_1 < k_2 < \cdots$ tels que

$$\left(\sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (a_k)^p\right)^{1/p} := S_j \geq 1$$

[†]. Rappelons la définition de la fonction « signe » : $\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t > 0 \\ 0, & \text{si } t = 0\,. \\ -1, & \text{si } t < 0 \end{cases}$

(justifier l'existence des k_j). Le choix

$$\alpha_k := \frac{(a_k)^{p-1}}{j\,(S_j)^{p-1}},\ \forall\, j \geq 1,\ \forall\, k_j \leq k < k_{j+1} - 1,$$

donne une suite $(\alpha_k)_k$ avec les propriétés désirées. En effet, nous avons

$$\sum_k a_k\,\alpha_k = \sum_j \frac{1}{j\,(S_j)^{p-1}} \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (a_k)^p = \sum_j \frac{S_j}{j} \geq \sum_j \frac{1}{j} = \infty,$$

$$\sum_k (\alpha_k)^q = \sum_j \frac{1}{j^q\,(S_j)^p} \sum_{k=k_j}^{k_{j+1}-1} (a_k)^p = \sum_j \frac{1}{j^q} < \infty.$$ CQFD

Démonstration de la proposition 10.20.

a) Soit $g := \operatorname{sgn} f \in \mathscr{L}^\infty$. Nous avons $\displaystyle\int |f| = \int f\,g < \infty$, et donc $f \in \mathscr{L}^1$.

b) Supposons, par l'absurde, que $f \notin \mathscr{L}^p$. Pour un tel f, nous allons construire une fonction $g \in \mathscr{L}^q$ telle que $f\,g \geq 0$ et $\displaystyle\int f\,g = \infty$ – ce qui constitue la contradiction recherchée.

Étape 1. Construction de g si $1 < p < \infty$ et μ est finie. Soit $B := \{x \in X\,;\, |f(x)| = \infty\}$. Si $\mu(B) > 0$, alors $g := \operatorname{sgn} f\,\chi_B$ convient. Ainsi, nous pouvons supposer que $\mu(B) = 0$, ce qui revient à $|f| < \infty$ p. p. Nous pouvons donc supposer f finie *partout* (justifier).
Soit $k \in \mathbb{Z}$. Posons $A_k := \{x \in X\,;\, 2^k \leq |f(x)| < 2^{k+1}\}$, de sorte que les A_k sont d. d. d. et $f = 0$ sur $X \setminus \sqcup_k A_k$. Soit $f_k := f\,\chi_{A_k}$. D'une part, nous avons

$$\|f_k\|^p_{L^p(X)} = \int_{A_k} |f|^p \leq 2^{(k+1)p}\,\mu(A_k) < \infty,\ \forall\, k \in \mathbb{Z}. \tag{10.9}$$

D'autre part, nous avons

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f_k\|^p_{L^p(X)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{A_k} |f|^p = \int_{\sqcup_{k=-\infty}^{\infty} A_k} |f|^p = \int_X |f|^p = \infty. \tag{10.10}$$

De (10.10), nous avons soit $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|^p_{L^p(X)} = \infty$, soit $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0} \|f_k\|^p_{L^p(X)} = \infty$. Nous examinons le premier cas ; l'autre est similaire. Nous supposons donc

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|^p_{L^p(X)} = \infty. \tag{10.11}$$

De (10.9) et de la preuve de la proposition 10.19 a), pour tout $k \geq 0$ il existe $g_k \in \mathscr{L}^q(A_k)$ telle que $\|g_k\|_{L^q(A_k)} = 1$, $f_k\,g_k \geq 0$ et $\displaystyle\int_{A_k} f_k\,g_k = \|f_k\|_{L^p(A_k)} = \|f_k\|_{L^p(X)}$.

Nous allons prendre g de la forme $g = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, g_k\, \chi_{A_k}$, avec $\alpha_k \geq 0$. Nous avons, par calcul direct,

$$\int |g|^q = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)^q \int_{A_k} |g_k|^q = \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)^q,$$
$$\int f\, g = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \int_{A_k} f_k\, g_k = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k\, \|f_k\|_{L^p}.$$

Le lemme 10.25 combiné avec (10.11) montre que l'on peut trouver α_k tels que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \|f_k\|_{L^p(X)} = \infty \text{ et } \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha_k)^q < \infty.$$

Pour de tels α_k, g a toutes les propriétés désirées.

Étape 2. Construction de g si $1 < p < \infty$ et μ est σ-finie. Soit $(Y_n)_n \subset \mathscr{T}$ une suite d. d. d. telle que $X = \sqcup_n Y_n$ et $\mu(Y_n) < \infty$, $\forall\, n$. Notons f_n la restriction de f à Y_n, de sorte que f_n est mesurable et

$$\sum_n \int_{Y_n} |f_n|^p = \int_X |f|^p = \infty \tag{10.12}$$

(vérifier). Si $\displaystyle\int_{Y_n} |f_{n_0}|^p = \infty$ pour un n_0, alors, de l'étape précédente, il existe $g_n : Y_n \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\displaystyle\int_{Y_{n_0}} |g_{n_0}|^q < \infty$, $f_{n_0}\, g_{n_0} \geq 0$ et $\displaystyle\int_{Y_{n_0}} f_{n_0}\, g_{n_0} = \infty$. Dans ce cas, la fonction $g := g_{n_0}\, \chi_{Y_{n_0}}$ a les propriétés souhaitées.

Nous pouvons donc supposer que $\displaystyle\int_{Y_n} |f_n|^p < \infty$ pour tout n. De la preuve de la proposition 10.19 a), il existe $g_n \in \mathscr{L}^q(Y_n)$ telle que

$$\|g_n\|_{L^q} = 1,\ f_n\, g_n \geq 0 \text{ et } \int_{Y_n} f_n\, g_n = \|f_n\|_{L^p(Y_n)}.$$

Nous définissons $g := \sum_n \alpha_n\, g_n\, \chi_{A_n}$ avec $\alpha_n \geq 0$ à déterminer de sorte que $g \in \mathscr{L}^q$ et $\displaystyle\int f\, g = \infty$. Comme dans l'étape 1, ces propriétés sont vraies si nous choisissons (via le lemme 10.25), des α_n tels que $\sum_n \alpha_n \|f_n\|_{L^p(Y_n)} = \infty$ et $\sum_n (\alpha_n)^q < \infty$ (vérifier).

Étape 3. Construction de g si $p = \infty$ et μ est σ-finie. Soit $(Y_n)_n$ la suite de l'étape 2. Soit $B := \{x \in X\,;\, |f(x)| = \infty\}$. Nous avons $\mu(B) = \sum_n \mu(B \cap Y_n)$ (justifier). Si $\mu(B) > 0$, alors $0 < \mu(B \cap Y_n) < \infty$ pour (au moins) un n. Pour un tel n, $g := \operatorname{sgn} f\, \chi_{B \cap Y_n}$ convient (vérifier). L'étape 3 est donc complétée si $\mu(B) > 0$.

Ainsi, nous pouvons supposer que $\mu(B) = 0$, d'où $|f| < \infty$ p. p. Posons $A_j = \{x \in X\,;\, j \leq |f(x)| < j+1\}$, $\forall\, j \in \mathbb{N}^*$. Notons que les A_j sont d. d. d. Comme $f \notin \mathscr{L}^\infty$, il existe une infinité de j tels que $\mu(A_j) > 0$ (justifier). Soient $1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_k < \cdots$ tels que $\mu(A_{j_k}) > 0$, $\forall\, k \geq 1$. Soit f_k la restriction de f à A_{j_k}, de sorte que

$f_k \in \mathscr{L}^\infty(A_{j_k})$. De la preuve de la proposition 10.19 b), il existe $g_k \in \mathscr{L}^1(A_{j_k})$ telle que $\|g_k\|_{L^1(A_{j_k})} = 1$, $f_k\, g_k \geq 0$ et

$$\int_{A_{j_k}} f_k\, g_k \geq (1/2)\, \|f_k\|_{L^\infty(A_k)} \geq (1/2)\, j_k \geq (1/2)\, k.$$

Si nous posons $g := \sum_{k\geq 1}(1/k^2)\, g_k\, \chi_{A_{j_k}}$, alors par calcul direct $\|g\|_{L^1} = \sum_{k\geq 1}(1/k^2) < \infty$ (d'où $g \in \mathscr{L}^1$) et

$$\int f\, g \geq \sum_{k\geq 1}(1/2k)^2\, \|f_k\|_{L^\infty} \geq \sum_{k\geq 1} \frac{j_k}{2k^2} \geq \sum_{k\geq 1} \frac{1}{2k} = \infty.$$ CQFD

10.3 Norme et complétude

Dans cette section, nous montrons que L^p est un *espace normé complet (théorème de Fatou 10.28)*, et en particulier que $\| \, \|_{L^p}$ *est une norme sur* L^p *(inégalité de Minkowski, théorème 10.26)*.

10.26 Théorème (Inégalité de Minkowski)**.**

a) Si $1 \leq p \leq \infty$, alors $\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$, $\forall\, f, g$.

b) $(L^p, \| \, \|_{L^p})$ est un espace normé et $(\mathscr{L}^p, \| \, \|_{L^p})$ est un espace « semi-normé ».†

10.27 Corollaire. L'application $L^p \ni f \mapsto \|f\|_{L^p} \in \mathbb{R}$ est continue. ◇

10.28 Théorème (Théorème de Fatou)**.** L^p est un espace normé complet, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$.‡

10.29 Corollaire. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$, alors il existe une sous-suite $(f_{n_k})_k$ et une fonction $g \in \mathscr{L}^p$ telles que

a) $f_{n_k} \to f$ p. p.

b) $|f_{n_k}| \leq g$ p. p. ◇

10.30 Proposition. Dans L^2,

$$< f, g >:= \int f\, g,\ \forall\, f, g \in L^2, \tag{10.13}$$

est un produit scalaire, et $\|f\|_{L^2} =< f, f >^{1/2}$.§ ◇

†. Un espace semi-normé est un espace vectoriel muni d'une « semi-norme ». Une semi-norme $x \mapsto \|x\|$ vérifie toutes les propriétés de la norme sauf $\|x\| = 0 \implies x = 0$.

‡. Un espace normé complet est un « espace de Banach ». Donc L^p est un espace de Banach.

§. L^2 est donc un espace normé complet dont la norme provient d'un produit scalaire : c'est un « espace de Hilbert ».

Démonstrations

Démonstration du théorème 10.26. Nous pouvons travailler avec des fonctions finies en tout point (justifier).

a) Les cas $p = 1$ et $p = \infty$ suivent de l'exercice 10.9 e). Nous pouvons donc supposer $1 < p < \infty$ et aussi $\|f\|_{L^p} < \infty$, $\|g\|_{L^p} < \infty$.
La fonction $t \mapsto \Phi(t) := |t|^p$ étant convexe,[†] nous avons $\Phi((s+t)/2) \le (\Phi(s) + \Phi(t))/2$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$, d'où $|s+t|^p \le 2^{p-1}(|s|^p + |t|^p)$, $\forall\, s, t \in \mathbb{R}$ (vérifier). Ceci implique $|f+g|^p \le 2^{p-1}(|f|^p + |g|^p)$. En intégrant cette inégalité avec $f, g \in \mathscr{L}^p$, nous obtenons que $f + g \in \mathscr{L}^p$.
Comme $f + g \in \mathscr{L}^p$, nous pouvons appliquer la proposition 10.19 a). Avec q le conjugué de p, nous obtenons
$$\begin{aligned}\|f+g\|_{L^p} &= \sup\left\{\int (f+g)\,h\,;\, h \in \mathscr{L}^q, \|h\|_{L^q} \le 1\right\}\\ &\le \sup\left\{\int f\,h\,;\, h \in \mathscr{L}^q, \|h\|_{L^q} \le 1\right\} + \sup\left\{\int g\,h\,;\, h \in \mathscr{L}^q, \|h\|_{L^q} \le 1\right\}\\ &= \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.\end{aligned}$$

b) Les propriétés de (semi-)norme de $\|\ \|_{L^p}$ suivent de l'exercice 10.9. CQFD

Démonstration du corollaire 10.27. Ceci est vrai pour toute norme (car une norme est, d'après l'inégalité triangulaire, lipschitzienne de constante 1). CQFD

Démonstration du théorème 10.28. Nous pouvons travailler avec des fonctions (justifier).

Rappelons le principe suivant de preuve. Pour montrer qu'un espace métrique (en particulier, normé) est complet, il suffit de montrer que toute suite de Cauchy contient une sous-suite convergente. Pour construire une telle sous-suite dans le cadre du théorème 10.28, nous reprenons essentiellement la preuve du théorème 7.5.

Soit $(f_n)_n$ une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^p$ et soit $(f_{n_k})_k$ une sous-suite telle que
$$\|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}\|_{L^p} \le 2^{-k-1},\ \forall\, k \ge 0.$$

Supposons d'abord $1 \le p < \infty$. Pour tout $k \ge 1$, posons
$$g_k := |f_{n_0}| + \sum_{j=0}^{k-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}|.$$

La suite $(g_k)_k$ étant croissante, nous pouvons définir $g := \lim_k g_k$.

L'inégalité triangulaire et l'inégalité de Minkowski impliquent
$$|f_{n_k}| \le g_k \le g \text{ et } \|g_k\|_{L^p} \le \|f_{n_0}\|_{L^p} + 1. \tag{10.14}$$

†. Vérifier la convexité de la fonction Φ en étudiant la monotonie de sa dérivée.

Le théorème de convergence monotone et la deuxième partie de (10.14) donnent $\|g\|_{L^p} < \infty$. Nous avons en particulier $g(x) < \infty$ p. p. Si x est tel que $g(x) < \infty$, alors

$$|f_{n_0}(x)| + \sum_{j\geq 0} |(f_{n_{j+1}} - f_{n_j})(x)| = g(x) < \infty.$$

Il s'ensuit que pour un tel x la série $f_{n_0}(x) + \sum_{j\geq 0}((f_{n_{j+1}} - f_{n_j})(x))$ converge vers un $f(x)$ tel que $|f(x)| \leq g(x)$ (justifier). Les sommes partielles de la série étant $(f_{n_k}(x))_k$, nous obtenons $f_{n_k}(x) \to f(x)$ et $|f_{n_k}(x)|^p \leq (g(x))^p$. Pour les autres x, nous définissons $f(x) = 0$.

De ce qui précède, nous avons $f \in \mathscr{L}^p$. Le théorème de convergence dominée (variante p. p.) donne $\displaystyle\int |f_{n_k} - f|^p \to 0$, d'où $f_{n_k} \to f$ dans $\mathscr{L}^p$.

Enfin, supposons $p = \infty$. Soit $B \in \mathscr{T}$ négligeable tel que f_{n_0} soit bornée sur $X\backslash B$. Soit $A_k \in \mathscr{T}$ un ensemble négligeable tel que $|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq 2^{-k-1}$ dans $X\backslash A_k$. Soit $A := B \cup \cup_k A_k \in \mathscr{T}$, qui est encore négligeable. Sur $X\backslash A$, f_{n_0} est bornée et la suite $(f_{n_k})_k$ est de Cauchy pour la norme uniforme. Elle converge donc uniformément vers une fonction bornée f. En posant $f(x) = 0$ si $x \in A$, nous avons $f \in \mathscr{L}^\infty$ et $f_{n_k} \to f$ dans $\mathscr{L}^\infty$ (vérifier). CQFD

Démonstration du corollaire 10.29. $(f_n)_n$ étant une suite de Cauchy, si $1 \leq p < \infty$ le corollaire découle de la preuve du théorème 10.28.

Si $p = \infty$, a) découle de la preuve du théorème 10.28, et pour b) nous pouvons prendre $g := \sup_n \|f_n\|_{L^\infty}$. CQFD

Démonstration de la proposition 10.30. L'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que $< f, g >$ est bien défini. La linéarité dans chaque variable et la symétrie étant évidentes, il suffit de vérifier que $< f, f >= 0 \implies f = 0$. Ceci découle de la dernière égalité de l'énoncé, qui est claire. CQFD

10.4 Pour aller plus loin

Soient p, q exposants conjugués. Si $g \in L^q$, alors l'inégalité de Hölder montre que l'application

$$T : L^p \to \mathbb{R},\ T(f) := \int f\, g,\ \forall\, f \in L^p, \tag{10.15}$$

est linéaire, continue et de norme $\leq \|g\|_{L^q}$.

Si $1 < p \leq \infty$, la proposition 10.19 (appliquée à $\|g\|_{L^q}$) montre que la norme de T est égale à $\|g\|_{L^q}$. De même pour $p = 1$, si μ est σ-finie.

Le résultat suivant montre que (10.15) donne *toutes les applications linéaires et continues $T : L^p \to \mathbb{R}$.*

10.31 Théorème (Théorème de représentation de Riesz)**.** Soit $T : L^p \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue.

a) Si $1 < p < \infty$, alors il existe $g \in L^q$ telle que

$$T(f) = \int f\, g,\ \forall\, f \in L^p. \tag{10.16}$$

De plus, la norme de T est $\|g\|_{L^q}$.

b) Si $p = 1$ et μ est σ-finie, alors il existe $g \in L^\infty$ telle que

$$T(f) = \int f\, g,\ \forall\, f \in L^1. \tag{10.17}$$

De plus, la norme de T est $\|g\|_{L^\infty}$.

Le théorème ne mentionne pas L^∞ : les applications linéaires et continues sur L^∞ sont connues, mais très difficiles à décrire.

Pour la preuve du théorème 10.31, voir par exemple Lieb et Loss [16, Theorem 2.14]. Voir également l'éclairage apporté dans la section 14.4.

Chapitre 11

Convolution

11.0 Aperçu

La *convolution* est historiquement apparue dans la résolution des équations différentielles, mais ses utilisations les plus fréquentes sont liées au *lissage* des fonctions, c'est-à-dire à l'approximation d'une fonction peu régulière (par exemple discontinue) par des fonctions plus lisses (par exemple de classe C^∞).

Donnons un exemple simple de telle approximation. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Posons

$$F^\varepsilon(x) := \frac{1}{2\varepsilon}\int_{x-\varepsilon}^{x+\varepsilon} f(y)\,dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{11.1}$$

Le théorème de Lagrange donne l'existence d'un point $\xi = \xi(x, \varepsilon) \in]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ tel que $F^\varepsilon(x) = f(\xi)$. Quand ε est petit, ξ est proche de x, et donc, du moins intuitivement, F^ε est proche de f.[†] Par ailleurs, F^ε est plus lisse que f : si f est continue, alors F^ε est de classe C^1 (théorème de Leibniz-Newton), et plus généralement, si $f \in C^k$, alors $F^\varepsilon \in C^{k+1}$.

Dans ce chapitre, nous allons expliquer un procédé général d'approximation. Il est basé sur le *produit de convolution*, qui associe à deux fonctions $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la « fonction »

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\,dy\ ; \tag{11.2}$$

les guillemets attirent l'attention sur le fait que les intégrales de (11.2) n'existent pas nécessairement.

†. Et, en effet, si f est *uniformément continue*, alors $F^\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $\varepsilon \to 0$. Si f est « seulement » continue, alors $F^\varepsilon \to f$ simplement quand $\varepsilon \to 0$.

Le formule (11.1) peut se réécrire comme

$$F^\varepsilon(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2\varepsilon} f(y)\,\xi_{[-\varepsilon,\varepsilon]}(x-y)\,dy, \tag{11.3}$$

qui est une convolution.

Dans un premier temps, nous allons donner des conditions sur f et g (*inégalité de Young*, théorème 11.2) qui assurent que le produit de convolution est bien défini.

Par la suite, nous allons décrire une bonne classe de fonctions g telles que $f * g$ soit *lisse* (proposition 11.7).

La partie la plus importante est celle qui donne le mécanisme proprement dit d'approximation. Si nous revenons à (11.3), nous avons $F^\varepsilon = f * g_\varepsilon$, où

$$g(x) := \frac{1}{2}\chi_{[-1,1]},\ g_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} g(x/\varepsilon),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, \varepsilon > 0. \tag{11.4}$$

Le résultat fondamental de ce chapitre, le théorème 11.9, affirme que, si $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est convenable,[†] alors, pour $1 \le p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$, nous avons

$$f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } f * \rho_\varepsilon \to f \text{ dans } \mathscr{L}^p(\mathbb{R}) \text{ quand } \varepsilon \to 0. \tag{11.5}$$

Énoncé convenablement, le même résultat reste vrai dans les espaces L^p.

La section 11.3 contient des conséquences de ce résultat d'approximation, et des généralisations de celui-ci, sous des hypothèses plus faibles sur ρ (théorème 11.27).

Nous finissons par le *théorème d'approximation de Weierstrass* 11.29 : « toute fonction continue sur un compact de $\mathbb{R}^n$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynômiales », théorème dont la preuve « historique » passe par la convolution.

Compétences minimales attendues.

a) Savoir appliquer l'inégalité de Young.

b) Savoir raisonner « par densité », en utilisant la densité de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $\mathscr{L}^p(\Omega)$ si $1 \le p < \infty$ (théorème 11.11). ◇

Dans ce chapitre, nous considérons uniquement des *fonctions* ou classes d'équivalence f, g, etc., *définies sur* $\mathbb{R}^n$ ou sur une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$ et qui sont *Lebesgue mesurables*. *La mesure* sous-jacente *est* λ_n, sur la tribu $\mathscr{L}_n$. Cette mesure étant complète, nous pouvons travailler si nécessaire avec des fonctions définies p. p. : pour de telles fonctions, les notions de mesurabilité et intégrabilité sont bien définies (remarque 8.36).

†. ρ doit être bien plus lisse que notre g, et d'ailleurs l'existence d'un tel ρ n'est pas évidente.

11.1 Inégalité de Young

11.1 Définition (Produit de convolution)**.** Le *produit de convolution* de $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ est

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy, \tag{11.6}$$

défini pour les $x \in \mathbb{R}^n$ tels que la fonction $y \mapsto f(x-y)\, g(y)$ a une intégrale.

D'après l'exercice 10.12, la définition du produit de convolution a aussi un sens pour des classes f et g. Dans la suite, nous travaillerons soit avec des classes, soit avec des fonctions boréliennes. (Rappelons que dans chaque classe nous pouvons choisir un représentant borélien ; voir l'exercice 10.14 a).)

11.2 Théorème (Inégalité de Young)**.** Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $1/p + 1/q \geq 1$. Soit $1 \leq r \leq \infty$ défini par l'égalité $1/r = 1/p + 1/q - 1$.

Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Alors :

a) Le produit de convolution $f * g$ est défini presque partout et définit une fonction Lebesgue mesurable.

b) Nous avons $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}. \tag{11.7}$$

c) Si $1/p + 1/q = 1$ (et donc $r = \infty$), nous avons les conclusions plus fortes suivantes : $f * g$ est défini en tout point, et $|f * g(x)| \leq \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Exercices

L'exercice suivant montre que le produit de convolution est *commutatif*.

11.3 Exercice. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens où l'une de ses quantités existe si et seulement si l'autre existe et dans ce cas elles sont égales. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration du théorème 11.2. Nous pouvons travailler avec des fonctions boréliennes (justifier).

c) Par symétrie du produit, nous pouvons supposer $p < \infty$ (justifier). Avec $h(y) := f(x-y)$, l'inégalité triangulaire 6.32 a) et l'inégalité de Hölder donnent

$$|f * g|(x) \leq \int |h(y)\, g(y)|\, dy \leq \|h\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q} = \|f\|_{L^p}\, \|g\|_{L^q},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n$$

(justifier la dernière égalité), ce qui au passage montre que $f*g$ est défini en tout point (justifier).

a) + b) Supposons maintenant $1/p+1/q>1$ et donc $1\le r<\infty$. Il suffit de traiter le cas des fonctions positives. En effet, si les conclusions du théorème sont vraies pour $|f|$ et $|g|$, alors $f*g(x)$ est défini pour tout x tel que $|f|*|g|(x)$ soit fini, et pour un tel x nous avons

$$f*g(x)=f_+*g_+(x)-f_+*g_-(x)-f_-*g_+(x)+f_-*g_-(x)$$

et

$$|f*g|(x)\le |f|*|g|(x),$$

d'où les parties a) et b) du théorème (justifier).

Si f, g sont boréliennes positives, alors $f*g(x)$ existe (mais peut être infini) pour tout x, car il s'agit de l'intégrale d'une fonction borélienne positive (vérifier que $y\mapsto f(x-y)\,g(y)$ est borélienne). Il suffit donc de montrer (11.7), car dans ce cas nous avons $f*g\in\mathscr{L}^r(\mathbb{R}^n)$ et donc $f*g(x)<\infty$ pour $\mathbb{R}^n\setminus A$, avec $A\subset\mathbb{R}^n$ borélien négligeable. De manière équivalente, (11.7) donne que $y\mapsto f(x-y)\,g(y)$ est intégrable pour tout $x\in\mathbb{R}^n\setminus A$ (ce qui donne la partie a) du théorème).

Notons les relations suivantes : $p\le r$, $q\le r$ et $1/r+(1-p/r)+(1-q/r)=1$. En utilisant ces faits et l'exercice 10.22 (avec $k:=3$, $p_1:=r$, $p_2:=(rp)/(r-p)$, $p_3:=(rq)/(r-q)$ et la convention $1/0=\infty$), nous obtenons, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et avec $h(y):=f(x-y)$:

$$\begin{aligned}
f*g(x)&=\int_{\mathbb{R}^n}[h^{p/r}(y)\,g^{q/r}(y)]\,h^{1-p/r}(y)\,g^{1-q/r}(y)\,dy\\
&\le \|h^{p/r}\,g^{q/r}\|_{L^r}\,\|h^{1-p/r}\|_{L^{(rp)/(r-p)}}\,\|g^{1-q/r}\|_{L^{(rq)/(r-q)}}\\
&=\|h^{p/r}\,g^{q/r}\|_{L^r}\,\|h\|_{L^p}^{1-p/r}\,\|g\|_{L^q}^{1-q/r}\\
&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^p(x-y)\,g^q(y)\,dy\right)^{1/r}\,\|f\|_{L^p}^{1-p/r}\,\|g\|_{L^q}^{1-q/r}
\end{aligned}$$

(vérifier et justifier les deux dernières lignes, en considérant séparément les cas où $p=r$ ou $q=r$).

Ceci implique (via le théorème de Tonelli)

$$\begin{aligned}
\|f*g\|_{L^r}^r&=\int_{\mathbb{R}^n}[f*g(x)]^r\,dx\le \|f\|_{L^p}^{r-p}\,\|g\|_{L^q}^{r-q}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^p(x-y)\,g^q(y)\,dy\right)dx\\
&=\|f\|_{L^p}^{r-p}\,\|g\|_{L^q}^{r-q}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f^p(x-y)\,dx\right)g^q(y)\,dy=\|f\|_{L^p}^r\,\|g\|_{L^q}^r
\end{aligned}$$

(vérifier), d'où (11.7). CQFD

11.2 Régularisation

Dans cette partie, nous travaillons dans $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne usuelle, désignée par « $|\ |$ ».[†] Les intégrales s'entendent par rapport à la mesure

†. Donc $|x|=\|x\|_2$, $\forall\,x\in\mathbb{R}^n$.

de Lebesgue.

Rappelons le résultat suivant de calcul différentiel.

11.4 Lemme. Il existe une fonction $\zeta \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, non identiquement nulle, telle que :

i) $0 \le \zeta \le 1$ si $|x| < 1$.

ii) $\zeta(x) = 0$ si $|x| \ge 1$.[‡] ◇

La fonction ζ est alors intégrable d'intégrale strictement positive (justifier). En divisant ζ par son intégrale, nous obtenons ainsi l'existence d'un *noyau régularisant*. Les noyaux régularisants jouent un rôle fondamental dans l'approximation d'une fonction par des fonctions lisses.

11.5 Définition (Noyau régularisant)**.** Un *noyau régularisant* est une fonction $\rho \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ telle que il existe $0 < R < \infty$ tel que

i) $\rho(x) \ge 0$ si $|x| < R$.

ii) $\rho(x) = 0$ si $|x| \ge R$.

iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \rho(x)\, dx = 1$.

Si, de plus, $R = 1$, alors ρ est un *noyau régularisant standard*.

Une autre classe de fonctions d'intérêt dans les procédures de régularisation est $C^k_c(\Omega)$.

11.6 Définition. Si $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$,

$$C^k_c(\Omega) := \{\varphi \in C^k(\Omega, \mathbb{R})\,;\ \text{il existe un compact } K \subset \Omega \\ \text{tel que } \varphi(x) = 0,\ \forall\, x \in \Omega \backslash K\}.$$

Le résultat suivant montre que la convolution avec des fonctions de $C^k_c(\mathbb{R}^n)$ « lisse » les fonctions et donne une formule très importante, (11.8).

11.7 Proposition. Soient $1 \le p \le \infty$ et $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C^k_c(\mathbb{R}^n)$. Nous avons :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.

b) $f * \varphi \in C^k$.

‡. Voici un exemple *explicite* de telle fonction (dont nous ne vérifierons pas ici les propriétés).
$\zeta(x) := \begin{cases} e^{-1/(1-|x|^2)}, & \text{si } |x| < 1 \\ 0, & \text{si } |x| \ge 1 \end{cases}.$

c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$,

$$\partial^\alpha(f * \varphi) = f * (\partial^\alpha \varphi). \tag{11.8}$$

La notation suivante est dans l'esprit de (11.4).

11.8 Notation. Si $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nous posons

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\,\rho(x/\varepsilon),\ \forall\,\varepsilon > 0,\ \forall\,x \in \mathbb{R}^n. \qquad \diamond \tag{11.9}$$

Le résultat suivant est le résultat central de ce chapitre.

11.9 Théorème. Soit ρ un noyau régularisant. Soit $1 \leq p < \infty$. Nous avons

$$f * \rho_\varepsilon \to f \text{ dans } \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \to 0,\ \forall\, f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n). \tag{11.10}$$

En particulier, $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

De même, $C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^p(\mathbb{R}^n)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^n)$.

11.10 Remarque. Notez l'ambiguïté de la formulation de la dernière partie du théorème. Au sens strict du terme, $C^\infty \cap L^p$ n'a pas de sens, car L^p contient des classes et C^∞ des fonctions. Le sens de l'énoncé est le suivant : pour tout $f \in L^p$, il existe une suite $(f_j)_j$ telle que :

a) $f_j \in C^\infty \cap \mathscr{L}^p$, $\forall\, j$.

b) Pour tout représentant $g \in \mathscr{L}^p$ de f, $f_j \to g$ dans $\mathscr{L}^p$.

Une formulation équivalente est que, avec f_j comme ci-dessus, la classe $[f_j] \in L^p$ de f_j vérifie $[f_j] \to f$ dans L^p. $\diamond$

Une conséquence facile du théorème 11.9 est le résultat suivant.

11.11 Théorème. Soient $1 \leq p < \infty$ et $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Alors $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{L}^p(\Omega)$.

De même, $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

11.12 Remarque. Le théorème 11.11 est à la base de la stratégie la plus utilisée pour montrer des propriétés de *toutes les fonctions* de l'espace $\mathscr{L}^p(\Omega)$, avec $1 \leq p < \infty$ et Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$:

1. Établir la propriété pour les fonctions $f \in C_c^\infty(\Omega)$.
2. Montrer que l'ensemble des fonctions de $\mathscr{L}^p(\Omega)$ qui ont la propriété étudiée est un *fermé*.

Nous illustrerons cette démarche dans la section 11.3 (preuve des propositions 11.21, 11.24 et du théorème 11.27).

Exercices

Voici quelques propriétés fondamentales de ρ_ε, avec ρ noyau régularisant standard.

11.13 Exercice. Soit ρ un noyau régularisant standard. Montrer, pour tout $\varepsilon > 0$:

a) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.

b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.

c) $\displaystyle\int \rho_\varepsilon = 1$. ◇

Cet exercice est un complément de la proposition 11.7. Cette fois-ci, c'est f qui est supposée de classe C^k.

11.14 Exercice. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nous avons :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.

b) $f * \varphi \in C^k$.

c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$,

$$\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi. \tag{11.11}$$

d) Si f est un polynôme [†] (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$. ◇

L'exercice suivant, dans l'esprit de l'exercice 4.32, sera utilisé dans la preuve du théorème 11.9.

11.15 Exercice. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Pour $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \operatorname{dist}(x, K) \leq 1/j\}.$$

Alors K_j est un compact, $\forall\, j$, et $K_j \searrow K$. ◇

L'exercice qui suit sera utilisé dans la preuve du théorème 11.11.

11.16 Exercice. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ (muni d'une norme). Pour $j \in \mathbb{N}^*$, soit

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\| \leq j,\ \operatorname{dist}(x, U^c) \geq 1/j\}.$$

Alors K_j est un compact, $\forall\, j$, et $K_j \nearrow U$. ◇

L'exercice suivant montre que la procédure d'approximation de la preuve du théorème 11.11 permet d'approximer une fonction dans plusieurs espaces $\mathscr{L}^p$ à la fois.

11.17 Exercice. Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega) \cap \ldots \cap \mathscr{L}^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to f$ dans $\mathscr{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$. ◇

11.18 Exercice. En prenant $n = 1$ et $f := \chi_{[0,\infty[}$, montrer que les théorèmes 11.9 et 11.11 et le lemme 11.19 sont faux si $p = \infty$. ◇

†. Ou plutôt une fonction polynômiale.

Démonstrations

Démonstration de la proposition 11.7. Rappelons le résultat suivant : une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ qui s'annule en dehors d'un compact est bornée.

Étape 1. Existence de $f * \partial^\alpha \varphi$ si ∂^α est d'ordre $\leq k$. Soit $R < \infty$ tel que $\varphi(x) = 0$, $\forall\, |x| \geq R$. Soit ∂^α une dérivée partielle d'ordre $\leq k$. Alors $\partial^\alpha \varphi$ est continue et s'annule en dehors de $\overline{B}(0, R)$ (justifier), donc il existe une constante finie C_α telle que $|\partial^\alpha \varphi(x)| \leq C_\alpha$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

Soit q le conjugué de p. De ce qui précède, $\partial^\alpha \varphi \in \mathscr{L}^q$ (justifier), et donc $f * \partial^\alpha \varphi$ est défini en tout point (théorème 11.2 c)).

Étape 2. $f * \varphi$ est continue. Soit $h(y, x) := f(y)\, \varphi(x - y)$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, de sorte que $f * \varphi(x) = \int h(y, x)\, dy$. Nous appliquons le théorème 7.10. La continuité par rapport au paramètre x étant claire, il faut obtenir la majoration exigée par le (i″) du théorème. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $\varphi(z - y) = 0$ si $|x - z| \leq 1$ et $|y| \geq r := R + |x| + 1$, car dans ce cas nous avons $|z - y| \geq R$ (justifier). Il s'ensuit que

$$f * \varphi(z) = \int_{B(0,r)} h(y, z)\, dy, \ \forall\, z \in \overline{B}(x, 1).$$

De ce qui précède, nous avons la majoration

$$|h(y, z)| \leq g(y) := C_0\, |f(y)|\, \chi_{B(0,r)}(y), \ \forall\, z \in \overline{B}(x, 1).$$

Pour conclure, il suffit de noter que g est intégrable, car, par l'inégalité de Hölder, si q est le conjugué de p alors

$$\|g\|_{L^1} \leq C_0\, \|f\|_{L^p}\, \|\chi_{B(0,r)}\|_{L^q} = C\, \|f\|_{L^p} \text{ (avec } C = C(r) < \infty).$$

La continuité de $f * \partial^\alpha \varphi$ (avec ∂^α dérivée partielle d'ordre $\leq k$) se montre de la même manière.

Étape 3. Preuve de $\partial_j(f * \varphi) = f * (\partial_j \varphi)$. Le raisonnement est analogue à celui de l'étape 2 ; on utilise le théorème 7.14 au lieu du théorème 7.10 (vérifier). Par récurrence sur l'ordre de différentiation, ceci permet d'établir c) pour tous les α concernés.

Pour conclure, $f * \varphi$ a, jusqu'à l'ordre k, des dérivées partielles continues qui vérifient c). Elle est donc de classe C^k et a les propriétés a)–c). La preuve est complète. CQFD

L'ingrédient clé de la preuve du théorème 11.9 est le lemme suivant.

11.19 Lemme. Soit $1 \leq p < \infty$. Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\delta > 0$.

Alors il existe une fonction étagée de la forme $g = \sum_j a_j\, \chi_{K_j}$, avec K_j compact, $\forall\, j$, telle que $\|f - g\|_{L^p} < \delta$.

De manière équivalente, l'espace vectoriel engendré par les fonctions χ_K, avec $K \subset \mathbb{R}^n$ compact, est dense dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.† ◇

Démonstration du lemme 11.19. Nous pouvons supposer f borélienne (justifier). Soit $(f_k)_k$ une suite de fonctions boréliennes étagées telle que $\operatorname{sgn} f_k = \operatorname{sgn} f$, $\forall\, k$, $f_k \to f$ et $|f_k| \nearrow |f|$ (l'existence d'une telle suite découle de la preuve du théorème 3.5). Par convergence dominée, nous avons $\|f_k - f\|_{L^p} \to 0$; par ailleurs, $f_k \in \mathscr{L}^p$, $\forall\, k$ (justifier).

Chaque f_k étant une somme finie de la forme $\sum_j a_j\, \chi_{A_j}$, avec A_j borélien et $\nu_n(A_j) < \infty$ (la dernière propriété découlant de $f_k \in \mathscr{L}^p$; justifier), il suffit de montrer la conclusion du lemme si $f = \chi_A$, avec A borélien de mesure de Lebesgue finie (détailler). Dans ce cas, rappelons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ tel que l'on ait $K \subset A$ et $\nu_n(A \backslash K) < \varepsilon$ (corollaire 4.27).

Nous obtenons $\|\chi_A - \chi_K\|_{L^p} = \|\chi_{A\backslash K}\|_{L^p} = (\nu_n(A\backslash K))^{1/p} < \varepsilon^{1/p}$. ε étant arbitraire, nous obtenons le résultat désiré de densité. CQFD

Démonstration du théorème 11.9. Nous considérons uniquement un noyau régularisant *standard* ; le cas d'un noyau régularisant général est analogue.

Pour la deuxième partie du théorème, il suffit de noter que $f * \rho_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (proposition 11.7) et d'appliquer (11.10).

Soit

$$X := \{f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)\,;\, f * \rho_\varepsilon \to f \text{ dans } \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n) \text{ quand } \varepsilon \to 0\}. \tag{11.12}$$

Par linéarité du produit de convolution par rapport au premier argument, X est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{L}^p$.

Étape 1. X est fermé dans $\mathscr{L}^p$. Soit $(f_j)_j \subset X$ avec $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$. Soit $\delta > 0$. Alors il existe un j et un ε_0 tels que $\|f_j - f\|_{L^p} < \delta/3$ et $\|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} < \delta/3$, $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. L'inégalité de Young et le fait que $\|\rho_\varepsilon\|_{L^1} = 1$, $\forall\, \varepsilon$ (exercice 11.13) donnent

$$\begin{aligned}\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^p} &\le \|(f - f_j) * \rho_\varepsilon\|_{L^p} + \|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} + \|f_j - f\|_{L^p}\\ &\le \|f - f_j\|_{L^p} + \|f_j * \rho_\varepsilon - f_j\|_{L^p} + \|f_j - f\|_{L^p} < \delta,\ \forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0.\end{aligned}$$

δ étant arbitraire, nous obtenons que $f \in X$.

Au vu du lemme 11.19 et de ce qui précède, afin de conclure il suffit de montrer

Étape 2. Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$, nous avons $\chi_K \in X$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ et $\delta > 0$. Posons, pour $j \ge 1$,

$$K_j := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \operatorname{dist}(x, K) \le 1/j\} = \cup_{x \in K} \overline{B}(x, 1/j) \tag{11.13}$$

(justifier la deuxième égalité en utilisant le fait que, si $F \subset \mathbb{R}^n$ est fermé et $y \in \mathbb{R}^n$, alors il existe $x \in F$ tel que $\operatorname{dist}(y, F) = |y - x|$).

†. Par abus de langage, comme expliqué dans la remarque 11.10, la conclusion du lemme 11.19 est que les fonctions étagées de la forme $g = \sum_j a_j\, \chi_{K_j}$ sont denses dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. Par ailleurs, la conclusion reste valable si nous remplaçons $\mathbb{R}^n$ par un ouvert de $\mathbb{R}^n$; ceci découle de la preuve du lemme 11.19.

L'ensemble K_j est compact, $\forall\, j$, et nous avons $K_j \searrow K$ (exercice 11.15). Comme $\nu_n(K_1) < \infty$, le théorème de la suite décroissante implique l'existence d'un j tel que $\nu_n(K_j \backslash K) < \delta$ (justifier).

Posons $\varepsilon_0 := 1/j$. Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Notons les faits suivants (évidents sur un dessin ; les justifier en utilisant la deuxième égalité dans (11.13)) :

$$\text{si } x \in K \text{ et } y \in B(0,\varepsilon), \text{ alors } x - y \in K_j, \text{ et donc } \chi_{K_j}(x-y) = 1\,; \tag{11.14}$$

$$\text{si } x \notin K_j \text{ et } y \in B(0,\varepsilon), \text{ alors } x - y \notin K, \text{ et donc } \chi_K(x-y) = 0. \tag{11.15}$$

Il s'ensuit de (11.14) que

$$x \in K \implies \chi_{K_j} * \rho_\varepsilon(x) = \int_{B(0,\varepsilon)} \chi_{K_j}(x-y)\, \rho_\varepsilon(y)\, dy = \int_{B(0,\varepsilon)} \rho_\varepsilon(y)\, dy,$$
$$=1 = \chi_K(x),$$

d'où

$$x \in K \implies \chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x) = (\chi_{K_j} - \chi_K) * \rho_\varepsilon(x) = \chi_{K_j \backslash K} * \rho_\varepsilon(x). \tag{11.16}$$

De même, (11.15) donne (vérifier)

$$x \notin K_j \implies \chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x) = 0. \tag{11.17}$$

Par ailleurs, pour tout point $x \in \mathbb{R}^n$ nous avons (vérifier) $0 \leq \chi_K * \rho_\varepsilon(x) \leq 1$, d'où

$$x \in K_j \backslash K \implies |\chi_K(x) - \chi_K * \rho_\varepsilon(x)| = \chi_K * \rho_\varepsilon(x) \leq 1. \tag{11.18}$$

En combinant (11.16)–(11.18), nous obtenons

$$|\chi_K - \chi_K * \rho_\varepsilon| \leq \chi_{K_j \backslash K} * \rho_\varepsilon + \chi_{K_j \backslash K}, \ \forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \tag{11.19}$$

L'inégalité (11.19) et celles de Minkowski et Young donnent (détailler) :

$$\begin{aligned} \|\chi_K - \chi_K * \rho_\varepsilon\|_{L^p} &\leq \|\chi_{K_j \backslash K} * \rho_\varepsilon\|_{L^p} + \|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p} \\ &\leq \|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p}\, \|\rho_\varepsilon\|_{L^1} + \|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p} = 2\, \|\chi_{K_j \backslash K}\|_{L^p} \\ &= 2\, (\nu_n(K_j \backslash K))^{1/p} < 2\, \delta^{1/p}, \ \forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0. \end{aligned} \tag{11.20}$$

$\delta > 0$ étant arbitraire, nous obtenons (11.10) pour $f = \chi_K$. CQFD

En examinant la preuve de (11.19), nous déduisons le résultat suivant.

11.20 Lemme (Existence de fonctions plateau ; lemme d'Urysohn)**.** Soient

$$K \subset U \subset \mathbb{R}^n, \text{ avec } K \text{ compact et } U \text{ ouvert.}$$

Il existe une fonction $\varphi \in C_c^\infty(U)$ telle que :

i) $0 \leq \varphi \leq 1$ sur U.

ii) $\varphi = 1$ sur K. $\diamond$

Démonstration du lemme 11.20. Soit $\varepsilon_0 := \operatorname{dist}(K, U^c)$, de sorte que $\varepsilon_0 > 0$ (pourquoi ?).

Soit $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$. Posons

$$L := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \operatorname{dist}(x, K) \leq \varepsilon\},\ M := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, \operatorname{dist}(x, K) \leq 2\varepsilon\}.$$

Alors $K \subset L \subset M \subset U$ et M est un compact (vérifier). Soit ρ un noyau régularisant standard. La preuve de (11.19) implique que $\varphi := \chi_L * \rho_\varepsilon$ a toutes les propriétés requises ; en particulier, $\varphi(x) = 0$ si $x \notin M$, et donc $\varphi \in C_c^\infty(U)$. CQFD

Démonstration du théorème 11.11. Soit $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$. Soit $\overline{f}$ le prolongement de f avec la valeur 0 à $\mathbb{R}^n \backslash \Omega$, de sorte que $\overline{f} \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soient $\varepsilon > 0$ et $\overline{g} \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\overline{f} - \overline{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2$; l'existence de $\overline{g}$ suit du théorème 11.9.

Soit g la restriction de $\overline{g}$ à Ω. Nous avons $g \in C^\infty(\Omega) \cap \mathscr{L}^p(\Omega)$ et (justifier)

$$\|f - g\|_{L^p(\Omega)} \leq \|\overline{f} - \overline{g}\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon/2.$$

Il reste à trouver $h \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\|g - h\|_{L^p(\Omega)} < \varepsilon/2$.

Rappelons le résultat suivant de topologie : il existe une suite $(K_j)_{j \geq 1}$ de compacts telle que $K_j \nearrow \Omega$ (voir l'exercice 11.16). .

Soit, comme dans le lemme 11.20, $\varphi_j \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq \varphi_j \leq 1$ et $\varphi_j = 1$ sur K_j. Nous avons $\varphi_j \to 1$ simplement dans Ω (justifier). Comme $|g\,\varphi_j - g| \leq |g|$ et $g\,\varphi_j \to g$ simplement, nous obtenons par convergence dominée que $\|g\,\varphi_j - g\|_{L^p(\Omega)} \to 0$. Pour j suffisamment grand, $h := g\,\varphi_j$ convient. CQFD

11.3 Pour aller plus loin

Si $1 \leq p < \infty$, nous savons (théorème 11.11) que $C_c^\infty(\Omega)$ est dense dans $\mathscr{L}^p(\Omega)$. Ce résultat permet, dans certains cas, d'établir des propriétés de *toutes* les fonctions $f \in \mathscr{L}^p(\Omega)$ en étudiant *uniquement* les fonctions de $C_c^\infty(\Omega)$. Nous donnons ici quelques exemples typiques.

11.21 Proposition. Soient p, q exposants conjugués. Si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^n)$, alors $f * g \in C(\mathbb{R}^n)$. $\diamond$

Démonstration de la proposition 11.21. Nous avons soit $p < \infty$, soit $q < \infty$. Supposons par exemple $p < \infty$.

Étape 1. Preuve si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dans ce cas, la conclusion découle de la proposition 11.7.

Étape 2. Preuve si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $(f_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ (l'existence de la suite découle du théorème 11.11). Nous pouvons travailler avec un représentant de f, encore noté f. Alors l'inégalité de Hölder donne

$$|f_j * g(x) - f * g(x)| = |(f_j - f) * g(x)| \le \|f_j - f\|_{L^p} \, \|g\|_{L^q} \to 0 \text{ quand } j \to \infty.$$

Il s'ensuit que $f * g$ est limite uniforme d'une suite de fonctions continues, donc continue. CQFD

11.22 Notation. Si $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. ◇

L'exercice suivant sera utilisé dans la preuve de la proposition 11.24.

11.23 Exercice. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$. ◇

11.24 Proposition (Continuité des translations dans L^p)**.** Soit $1 \le p < \infty$. Pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$, nous avons $\tau_h f \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $h \to 0$.

De même dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration de la proposition 11.24. Compte tenu de l'exercice 11.23, il suffit d'établir le résultat dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Étape 1. Preuve si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Soit $R < \infty$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| \ge R$. Soit $h \in \mathbb{R}^n$ tel que $|h| \le 1$. Si $|x| \ge R + 1$, alors $\tau_h f(x) = 0$ et $f(x) = 0$ (vérifier).

Par ailleurs, soit $M := \max\{|\nabla f(x)|\,;\, x \in \mathbb{R}^n\} < \infty$ (justifier la finitude de M). Le théorème des accroissements finis donne (vérifier)

$$|\tau_h f(x) - f(x)| \le M\,|h|, \ \forall\, x,\ h \in \mathbb{R}^n.$$

Il s'ensuit que, pour $|h| \le 1$, nous avons

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p}^p &= \int_{B(0,R+1)} |\tau_h f(x) - f(x)|^p \, dx \\ &\le M^p\,|h|^p \int_{B(0,R+1)} dx \to 0 \text{ quand } h \to 0.\end{aligned}$$

Étape 2. Preuve si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|f - g\|_{L^p} < \varepsilon/3$ (l'existence de g suit du théorème 11.11). Soit $\delta > 0$ tel que $\|\tau_h g - g\|_{L^p} < \varepsilon/3$ si $|h| < \delta$ (l'existence de δ découle de la première étape).

En notant que $\|\tau_h k\|_{L^p} = \|k\|_{L^p}$, $\forall\, k \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (vérifier), nous obtenons, pour $|h| < \delta$:

$$\begin{aligned}\|\tau_h f - f\|_{L^p} &\le \|\tau_h f - \tau_h g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= \|\tau_h(f - g)\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &= \|f - g\|_{L^p} + \|\tau_h g - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} < \varepsilon.\end{aligned}$$

$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous obtenons la conclusion de la proposition. CQFD

Nous allons maintenant considérablement généraliser le résultat de convergence (11.10), en affaiblissant les conditions sur (l'analogue de) ρ_ε.

11.25 Définition (Approximation de l'identité)**.** Une *approximation de l'identité* est une famille $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

i) $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est (Lebesgue) intégrable, $\forall\, \varepsilon > 0$.

ii) $\displaystyle\int \zeta^\varepsilon = 1$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

iii) Il existe une constante $M < \infty$ telle que $\displaystyle\int |\zeta^\varepsilon| \leq M$, $\forall\, \varepsilon > 0$.

iv) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon| = 0$.

Définition analogue lorsqu'il s'agit d'une suite $(\zeta^j)_{j\geq 1}$. ◇

Un exemple fondamental d'approximation de l'identité est donné par le résultat suivant.

11.26 Proposition. Soit $\rho \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\displaystyle\int \rho = 1$. Soit, comme dans (11.9),

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon^n}\rho(x/\varepsilon),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Alors $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ est une approximation de l'identité.

En particulier, cette proposition s'applique lorsque ρ est un noyau régularisant. ◇

Démonstration.

i) + ii) + iii) Nous avons $\displaystyle\int \rho_\varepsilon = \int \rho = 1$ et $\displaystyle\int |\rho_\varepsilon| = \int |\rho| := M < \infty$ (vérifier), de sorte que i)–iii) sont satisfaites.

iv) Soit $\delta > 0$. Nous avons (justifier, en utilisant le changement linéaire de variables $\Phi(y) := \varepsilon\, y$)

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)} |\rho_\varepsilon(x)|\, dx = \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta/\varepsilon)} |\rho(y)|\, dy \to 0 \text{ quand } \varepsilon \to 0,$$

la dernière conclusion étant une conséquence du théorème de convergence dominée (justifier). CQFD

Le résultat suivant généralise le théorème 11.9.

11.27 Théorème. Soit $1 \leq p < \infty$. Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité.

Pour tout $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ nous avons $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$.

De même pour une suite $(\zeta^j)_{j\geq 1}$.

De même dans $L^p(\mathbb{R}^n)$. ◇

Démonstration. Étape 1. Preuve quand $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Pour les besoins des résultats à venir, nous allons estimer la différence $f * \zeta^\varepsilon - f$ lorsque f a la propriété plus faible $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Rappelons qu'une telle fonction f est *uniformément* continue sur $\mathbb{R}^n$.

Donné $\xi > 0$, soit $0 < \delta < 1$ tel que

$$[\forall\, x,\, x' \in \mathbb{R}^n,\ |x - x'| < \delta] \implies |f(x) - f(x')| < \xi.$$

Soit $C < \infty$ tel que $|f(x)| \leq C$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (justifier l'existence de C). Enfin, soit $R < \infty$ tel que $f(x) = 0$ si $|x| \geq R$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, nous avons

$$\begin{aligned}
|f * \zeta^\varepsilon(x) - f(x)| =& \left|\int f(x-y)\,\zeta^\varepsilon(y)\,dy - f(x)\right| \\
=& \left|\int (f(x-y) - f(x))\,\zeta^\varepsilon(y)\,dy\right| \\
\leq& \int |f(x-y) - f(x)|\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
=& \int_{B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
\leq& \xi \int_{B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
\leq& \xi \int_{\mathbb{R}^n} |\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
&+ \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
\leq& M\,\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y) - f(x)|\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
\leq& M\,\xi + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} (|f(x-y)| + |f(x)|)\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
\leq& M\,\xi + 2C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)|\,dy.
\end{aligned} \tag{11.21}$$

Par ailleurs, si $|x| \geq R + 1$ et $|y| < \delta < 1$, alors $f(x) = f(x-y) = 0$. Il s'ensuit que pour un tel x le calcul (11.21) donne

$$\begin{aligned}
|f * \zeta^\varepsilon(x) - f(x)| \leq& \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |f(x-y)|\,|\zeta^\varepsilon(y)|\,dy \\
=& |f| * (|\zeta^\varepsilon|\,\chi_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)})(x).
\end{aligned} \tag{11.22}$$

Soit $r = r_{\delta,\varepsilon} := \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon(y)|\,dy$, de sorte que $\lim_{\varepsilon \to 0} r_{\delta,\varepsilon} = 0$, $\forall\, \delta > 0$. Soit $\psi = \psi_{\delta,\varepsilon} :=$

$|\zeta^\varepsilon|\,\chi_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,\delta)}$, qui vérifie $\|\psi\|_{L^1} = r$.

En utilisant (11.21) si $|x| < R+1$ et (11.22) si $|x| \geq R+1$, nous obtenons, grâce à l'inégalité de Young et avec $N = N(R) < \infty$:

$$\begin{aligned} \|f * \zeta^\varepsilon - f\|_{L^p}^p &\leq \int_{B(0,R+1)} [M\,\xi + 2C\,r]^p\,dx + \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(0,R+1)} [|f| * \psi]^p \\ &\leq N\,[M\,\xi + 2C\,r]^p + \int_{\mathbb{R}^n} [|f| * \psi]^p \\ &\leq N\,[M\,\xi + 2C\,r]^p + \|f\|_{L^p}^p \|\psi\|_{L^1}^p \to N\,M^p\,\xi^p \text{ quand } \varepsilon \to 0. \end{aligned} \tag{11.23}$$

$\xi > 0$ étant arbitraire, nous obtenons que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ quand $\varepsilon \to 0$.

Étape 2. Preuve si $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$. Soient $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ et $\xi > 0$. Soient $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon_0 > 0$ tels que $\|f - g\|_{L^p} < \xi$ et $\|g * \zeta^\varepsilon - g\|_{L^p} < \xi$, $\forall\, 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Pour un tel ε, nous avons (détailler)

$$\begin{aligned} \|f * \zeta^\varepsilon - f\|_{L^p} &\leq \|f * \zeta^\varepsilon - g * \zeta^\varepsilon\|_{L^p} + \|g * \zeta^\varepsilon - g\|_{L^p} + \|g - f\|_{L^p} \\ &\leq \|(f-g) * \zeta^\varepsilon\|_{L^p} + 2\,\xi \leq \|f - g\|_{L^p}\,\|\zeta^\varepsilon\|_{L^1} + 2\,\xi \leq (M+2)\,\xi. \end{aligned}$$

$\xi > 0$ étant arbitraire, nous obtenons la conclusion du théorème pour f. CQFD

Au passage, nous avons montré le résultat suivant (voir (11.21)).

11.28 Corollaire. Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité. Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Nous avons $f * \zeta^\varepsilon$ uniformément dans $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$. ◇

Ce corollaire intervient dans la preuve du résultat suivant.

11.29 Théorème (Théorème d'approximation de Weierstrass)**.** Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Soit $f \in C(K, \mathbb{R})$.

Alors il existe une suite de polynômes† de n variables $(P_j)_j$ telle que $P_j \to f$ uniformément sur K.

De manière équivalente, $\{P : K \to \mathbb{R}\,;\, P \text{ fonction polynômiale}\}$ est dense dans $C(K, \mathbb{R})$ muni de la norme uniforme. ◇

Démonstration. Nous utilisons le résultat suivant de topologie (théorème de Tietze) : si B est une boule de $\mathbb{R}^n$ telle que $K \subset B$, alors toute fonction $f \in C(K, \mathbb{R})$ admet une extension $g \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ avec $g(x) = 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n\setminus B$. Ainsi, quitte à remplacer K par $\overline{B}$ et f par g, il suffit de montrer le résultat pour la restriction à $\overline{B}$ d'une fonction $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ qui s'annule en dehors de B (justifier). Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $B = B(0, R)$.

Soit $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ telle que $f(x) = 0$ si $|x| \geq R$. Soit ρ la « gaussienne standard » dans $\mathbb{R}^n$,

$$\rho(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}}\,e^{-|x|^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

†. Ou plutôt de fonctions polynômiales.

Rappelons que $\int \rho = 1$. La proposition 11.26 combinée avec le corollaire 11.28 donne $f * \rho_\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$ quand $\varepsilon \to 0$, où

$$\rho_\varepsilon(x) := \frac{1}{\pi^{n/2}\,\varepsilon^n}\, e^{-|x|^2/\varepsilon^2},\ \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{11.24}$$

Soit $\delta > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\|f * \rho_\varepsilon - f\|_{L^\infty} < \delta$, d'où (exercice 10.10)

$$|f * \rho_\varepsilon(x) - f(x)| < \delta,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{11.25}$$

Nous allons trouver un polynôme S tel que

$$|(\rho_\varepsilon - S)(z)| \leq \delta,\ \forall\, z \in \overline{B}(0, 2R). \tag{11.26}$$

En admettant l'existence d'un tel S, nous concluons de la façon suivante. Pour tout φ nous avons

$$f * \varphi(x) = \int_{\overline{B}(0,R)} f(y)\, \varphi(x - y)\, dy. \tag{11.27}$$

Soit $M < \infty$ tel que $|f(x)| \leq M$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$. Si $x, y \in \overline{B}(0, R)$, alors $x - y \in \overline{B}(0, 2R)$. En combinant ce fait avec (11.25)–(11.27), il s'ensuit que, pour tout $x \in \overline{B}(0, R)$ nous avons, avec $N = N(R) < \infty$,

$$\begin{aligned}
|f * S(x) - f(x)| &\leq |f * [S(x) - \rho_\varepsilon](x)| + |(f * \rho_\varepsilon - f)(x)| \\
&< \left| \int_{\overline{B}(0,R)} f(y)\, [S - \rho_\varepsilon](x - y)\, dy \right| + \delta \\
&\leq M\,\delta \int_{\overline{B}(0,R)} dy + \delta = N\,\delta.
\end{aligned}$$

$\delta > 0$ étant arbitraire nous obtenons, pour une suite $(S_j)_j$ convenable de polynômes, $f * S_j \to f$ uniformément sur B quand $j \to \infty$. Pour conclure, il suffit de noter que $f * S_j$ est un polynôme (exercice 11.14 d)).

Ainsi, pour compléter la preuve il suffit de trouver S satisfaisant (11.26). Rappelons que le développement en série de l'exponentielle converge vers l'exponentielle uniformément sur les compacts : si $T > 0$ et $\xi > 0$, alors il existe k tel que

$$\left| e^t - \sum_{\ell=0}^{k} \frac{t^\ell}{\ell!} \right| \leq \xi,\ \forall\, t \in [-T, T]. \tag{11.28}$$

Soit k tel que (11.28) soit valide avec $T := 4\,R^2/\varepsilon^2$ et $\xi := \pi^{n/2}\,\varepsilon^n\,\delta$. Posons

$$S := \frac{1}{\pi^{n/2}\,\varepsilon^n} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\left(-|x|^2/\varepsilon^2\right)^\ell}{\ell!}. \tag{11.29}$$

De (11.28), (11.29) et (11.24), nous avons (11.26) (vérifier !). CQFD

Chapitre 12

Séries de Fourier

12.0 Aperçu

Dans ce chapitre, nous considérons des fonctions $f : I \to \mathbb{C}$, avec $I \subset \mathbb{R}$ *intervalle*. Le but est d'écrire f comme une « superposition d'ondes (co)sinusoïdales », ou encore comme la somme d'une *série de Fourier*.

Le choix de I n'est pas important, les plus populaires étant $I =]0,1[$ et $I =]0,2\pi[$. *Nous travaillons dans $I =]0,2\pi[$, muni de la tribu de Lebesgue et de la mesure $\mu = (1/m(I))\,\lambda_1 = (1/(2\pi))\,\lambda_1$.* Ainsi, si $1 \leq p < \infty$, alors

$$\|f\|_{L^p} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.^\dagger \tag{12.1}$$

Toutes les (classes de) fonctions f considérées sont supposées être Lebesgue intégrables sur I. I étant de mesure finie, il s'ensuit que l'hypothèse d'intégrabilité est satisfaite si $f \in L^p(I)$ pour un $p \geq 1$ (remarque 10.16). Selon un principe rencontré à plusieurs reprises, les énoncés comprennent des classes de fonctions, les preuves se font sur des fonctions.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et suffisamment lisse (de classe C^1 suffit, voir la section 12.4), alors nous avons

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(f)\,e^{\imath nx} := \lim_{\substack{M\to-\infty\\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\,e^{\imath nx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \tag{12.2}$$

avec

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(y)\,e^{-\imath ny}\,dy.^\dagger \tag{12.3}$$

---

†. Rappelons la convention $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \int_{]a,b[} g\,d\lambda_1$.

La définition (12.3) s'obtient à partir du *calcul formel* † suivant (avec δ_m^n le symbole de Kronecker) ‡ :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx} \\
\implies \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m(f)\, e^{\imath mx}\, e^{-\imath nx}\, dx \\
\implies \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx &= \frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{m=\infty} c_m(f) \underbrace{\int_0^{2\pi} e^{\imath mx}\, e^{-\imath nx}\, dx}_{=\,2\pi\,\delta_m^n} \\
\implies \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath nx}\, dx &= \sum_{m=-\infty}^{m} c_m(f)\, \delta_m^n = c_n(f).
\end{aligned}$$

Ce calcul permet de dégager la définition (12.3). Ses lignes *formelles* sont la première et la troisième, car il faut pouvoir justifier (12.2) et la permutation de la somme et de l'intégrale.

Dans ce chapitre, nous allons justifier et donner un sens à la première égalité (12.2). *Ce sens ne sera pas, en général, celui de la deuxième égalité de* (12.2).

La section 12.1 permet de faire le lien entre (12.3) et la décomposition d'un vecteur dans une base orthonormée. Ce sujet sera revu dans le chapitre 14, dans le cadre des espaces de Hilbert ; nous donnerons ici le cadre minimal permettant de comprendre (12.3) si $f \in L^2(I)$.

La section 12.2 est consacrée à l'égalité (12.2) si $f \in L^2(I)$. Le résultat principal est le *théorème de Fatou* 12.4 qui affirme que

$$f = \lim_{\substack{M\to-\infty \\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \text{ dans } L^2(I).$$

Ce résultat est complété par l'*égalité de Parseval* (12.13)

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2$$

et par le *théorème de Riesz-Fischer* 12.8.

---

†. En analyse, un *calcul formel* est un calcul que l'on ne peut pas nécessairement justifier. En dehors de l'analyse, cette expression est synonyme de *calcul symbolique* **Calcul formel (Wikipédia)** En anglais, il n'y a pas d'ambiguïté : *formal computation* en analyse, vs *symbolic calculus*.

‡. Le *symbole de Kronecker* δ_i^j, avec $i, j \in I$, est défini par $\delta_i^j := \begin{cases} 1, & \text{si } i = j \\ 0, & \text{si } i \neq j \end{cases}.$

Un autre résultat significatif qui sera obtenu dans cette section est le *lemme de Riemann-Lebesgue* 12.9.

La section 12.3 est dédiée au comportement ponctuel [†] de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx}$: plus spécifiquement, on s'intéresse à la validité de (12.2) (ou d'une variante de (12.2)) à x fixé. Pour des fonctions dérivables par morceaux, cette convergence (énoncée proprement) est le contenu du *théorème de Dirichlet* 12.13.

Dans la cas d'un fonction continue par morceaux, la série de Fourier peut ne pas converger. La bonne notion de convergence est celle de convergence *en moyenne* ; le résultat de convergence correspondant est le *théorème de Fejér* 12.15.

La section 12.4 est dédiée à la convergence uniforme ou normale de la série de Fourier. Cette section est plus avancée que les autres et peut servir de base à la préparation à l'agrégation. Notons, dans cette introduction, deux résultats marquants et simples à énoncer (Corollaire 12.25) :

a) Si $f(0) = f(2\pi)$ et il existe $\alpha > 0$ et $C < \infty$ tels que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \in [0, 2\pi]$, alors $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath kx}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

b) Si $f(0) = f(2\pi)$ et il existe $\alpha > 1/2$ et $C < \infty$ tels que $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \in [0, 2\pi]$, alors $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx}$ converge normalement vers f.

Dans la section 12.5, nous mentionnons sans preuve d'autres résultats célèbres de (non) convergence.

Compétences minimales attendues.

a) Savoir utiliser l'égalité de Parseval, le théorème de Fatou et le théorème de Riesz-Fischer.

b) Savoir utiliser le théorème de Dirichlet. $\diamond$

12.1 Un peu d'algèbre bilinéaire

Soit H un espace vectoriel complexe, muni d'un produit scalaire complexe $<\,,\,>$, [‡] qui induit la norme $\|x\| :=< x, x >^{1/2}$, $\forall\, x \in H$.

Si $(e_j)_{j \in J} \subset H$ est une famille orthonormée, [§] alors pour tout $x \in H$ et toute

†. *Ponctuel* : en tout point $x \in I$.

‡. Nous considérons un produit scalaire *linéaire* dans le premier argument et *antilinéaire* dans le deuxième argument. L'exemple typique est $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto z_1 \overline{z_2}$. C'est le produit scalaire des mathématiciens. Les physiciens considèrent des applications antilinéaires dans le premier argument, linéaires dans le deuxième argument. L'exemple typique est $\mathbb{C}^2 \ni (z_1, z_2) \mapsto \overline{z_1} z_2$.

§. Donc $< e_j, e_\ell >= 0$, $\forall\, j \neq \ell$ et $< e_j, e_j >= 1$, $\forall\, j$.

famille *finie* $L \subset J$ nous avons les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \left\| \sum_{j \in L} < x, e_j > e_j \right\|^2 + \left\| x - \sum_{j \in L} < x, e_j > e_j \right\|^2 \\ &= \sum_{j \in L} | < x, e_j > |^2 + \left\| x - \sum_{j \in L} < x, e_j > e_j \right\|^2, \end{aligned} \tag{12.4}$$

d'où en particulier

$$\sum_{j \in L} | < x, e_j > |^2 \leq \|x\|^2. \tag{12.5}$$

$$\begin{aligned} &\text{Si } x \in \operatorname{Vect}\{e_j\,;\, j \in L\}, \text{ alors } x = \sum_{j \in L} < x, e_j > e_j \\ &\qquad\qquad\qquad \text{et } \|x\|^2 = \sum_{j \in L} | < x, e_j > |^2. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Nous allons appliquer ceci à l'espace $L^2 := L^2(]0, 2\pi[)$, avec le produit scalaire

$$< f, g >:= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f\, \overline{g}\, d\nu_1. \tag{12.7}$$

12.1 Notation. Si $n \in \mathbb{Z}$,

$$e_n(x) := e^{\imath n x}, \ \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{12.8}$$

(Pour être plus précis, nous travaillons avec $[e_n]$ plutôt qu'avec e_n. Néanmoins, par souci de simplicité, dans les formules nous identifions e_n à sa classe.) ◇

12.2 Définition. Si $f \in L^1 := L^1(]0, 2\pi[)$, le n^{e} *coefficient de Fourier* de f ($n \in \mathbb{Z}$) est

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{e_n}(x)\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath n x}\, dx. \tag{12.9}$$

Si $f \in L^2$, nous avons $c_n(f) =< f, e_n >$.

Il est immédiat que $c_n(f)$ dépend uniquement de la classe de f.

La suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ étant orthonormée (exercice 12.3 b)), les relations (12.4), (12.6), respectivement (12.5) avec $J := \mathbb{Z}$ et $L := \{n \in \mathbb{Z}\,;\, n_0 \leq n \leq n_1\}$ donnent l'*inégalité de Bessel*

$$\begin{aligned} \sum_{n=n_0}^{n_1} |c_n(f)|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n x} \right|^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|f\|_{L^2}^2, \ \forall\, f \in L^2(]0, 2\pi[) \end{aligned} \tag{12.10}$$

et l'identité

$$\|f\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \right\|_{L^2}^2 + \left\| f - \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \right\|_{L^2}^2. \tag{12.11}$$

Exercices

12.3 Exercice.

a) Montrer que (12.7) définit un produit scalaire sur L^2.

b) Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par (12.8) est orthonormée dans L^2 muni du produit scalaire (12.7). ◇

12.2 Séries de Fourier dans L^2

12.4 Théorème (Théorème de Fatou et égalité de Parseval)**.** Soit $f \in L^2 = L^2(]0, 2\pi[)$. Alors :

a) (Théorème de Fatou) Nous avons

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} = \lim_{\substack{M\to-\infty\\ N\to\infty}} \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot} \text{ dans } L^2. \tag{12.12}$$

b) Nous avons l'*égalité de Parseval*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx = \|f\|_{L^2}^2. \tag{12.13}$$

12.5 Remarque. Une somme de la forme $x \mapsto \sum_{n=M}^{n=N} c_n(f)\, e^{\imath nx}$ est un *polynôme trigonométrique*, c'est-à-dire une *somme finie de la forme* $\sum_n a_n e^{\imath nx}$. ◇

12.6 Définition. Si $f \in L^1$, nous posons

$$S_n(f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k. \tag{12.14}$$

En combinant le théorème 12.4 et le corollaire 10.29, nous obtenons la conséquence suivante.

12.7 Corollaire. Si $f \in \mathscr{L}^2 = \mathscr{L}^2(]0, 2\pi[)$, alors il existe une sous-suite $(n_j)_j$ de $\mathbb{N}$ telle que

$$S_{n_j}(f)(x) \to f(x) \text{ quand } j \to \infty, \text{ pour presque tout } x \in]0, 2\pi[. \quad ◇ \tag{12.15}$$

L'inégalité de Bessel (12.10) implique que, si $f \in L^2$, alors la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ des coefficients de Fourier de f appartient à $\ell^2(\mathbb{Z})$. Remarquablement, la réciproque est vraie. C'est le contenu du théorème suivant.

12.8 Théorème (Théorème de Riesz-Fischer)**.** Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite telle que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty.$$

Alors il existe une et une seule fonction $f \in L^2 = L^2(]0, 2\pi[)$ telle que $c_n(f) = a_n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

La preuve du théorème 12.4 se fait par densité, en commençant par des fonctions de $C_c^\infty(]0, 2\pi[)$. C'est une situation analogue à celle rencontrée dans la section 11.3. Voici un autre résultat important dont la preuve est dans cet esprit.

12.9 Lemme (Lemme de Riemann-Lebesgue)**.** Soit $f \in L^1 = L^1(]0, 2\pi[)$. Nous avons $c_n(f) \to 0$ quand $|n| \to \infty$. ◇

Exercices

12.10 Exercice. Soit

$$P = \sum_{n\in I} a_n\, e^{\imath n \cdot} = \sum_{n\in I} a_n\, e_n$$

(avec $I \subset \mathbb{Z}$ fini) un polynôme trigonométrique. Montrer que $P \in \mathscr{L}^1$ et que

$$c_n(P) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \in I \\ 0, & \text{si } n \notin I \end{cases}.$$ ◇

12.11 Exercice. Que donne l'égalité de Parseval pour $f(x) = x$? ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.4. L'ingrédient fondamental dans la preuve est le résultat suivant de densité, qui sera démontré plus tard.

12.12 Théorème. Soit $g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})$ telle que $g(0) = g(2\pi)$. Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe un polynôme trigonométrique P tel que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$.

De manière équivalente, soit $C_{\text{pér}} := \{g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{C})\,;\ g(0) = g(2\pi)\}$, muni de la norme uniforme. Alors les polynômes trigonométriques sont denses dans $C_{\text{pér}}$. ◇

Démonstration du théorème 12.4 (en admettant le théorème 12.12).

a) Soit $f \in \mathscr{L}^2$ et soit $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(]0, 2\pi[)$ telle que $\|f - g\|_{L^2} < \varepsilon$ (l'existence de g suit du théorème 11.11). Soit P un polynôme trigonométrique tel que $|g(x) - P(x)| < \varepsilon$, $\forall\, x \in [0, 2\pi]$ (l'existence de P suit du théorème 12.12). Notons que $\|g - P\|_{L^2} < \varepsilon$, ce qui implique $\|f - P\|_{L^2} < 2\,\varepsilon$.
Soient $n_0, n_1 \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{n=n_0}^{n_1} a_n\, e_n$. Si $M \le n_0$ et $N \ge n_1$, nous avons

$$\sum_{n=M}^{N} c_n(P)\, e_n = P \tag{12.16}$$

(justifier, en utilisant l'exercice 12.10).
Pour de tels M et N, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left\| f - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2} &\le \|f - P\|_{L^2} + \left\| P - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2} \\ &= \|f - P\|_{L^2} + \left\| \sum_{n=M}^{N} c_n(P)\, e_n - \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2} \\ &= \|f - P\|_{L^2} + \left\| \sum_{n=M}^{N} c_n(P - f)\, e_n \right\|_{L^2} \\ &\le \|f - P\|_{L^2} + \|P - f\|_{L^2} < 4\,\varepsilon.\end{aligned}$$

Au passage, nous avons utilisé : (12.16), la linéarité de l'application $f \mapsto c_n(f)$ (la justifier) et l'inégalité

$$\left\| \sum_{n=n_0}^{n_1} c_n(g)\, e_n \right\|_{L^2} \le \|g\|_{L^2},\ \forall\, g \in L^2,$$

qui découle de (12.10).
$\varepsilon > 0$ étant arbitraire, nous obtenons que

$$\lim_{\substack{M \to -\infty \\ N \to \infty}} \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n = f \text{ dans } \mathscr{L}^2. \tag{12.17}$$

b) découle de (12.6) et de (12.17). En effet,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \lim_{\substack{M \to -\infty \\ N \to \infty}} \sum_{n=M}^{N} |c_k(f)|^2 = \lim_{\substack{M \to -\infty \\ N \to \infty}} \left\| \sum_{n=M}^{N} c_n(f)\, e_n \right\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2. \qquad \text{CQFD}$$

Démonstration du théorème 12.8. Existence. Soit $P_n := \sum_{k=-n}^{n} a_k\, e_k$. L'identité (12.6) donne, pour $0 \le n < m$:

$$\|P_m - P_n\|_{L^2}^2 = \left\| \sum_{n+1 \le |k| \le m} a_k\, e_k \right\|_{L^2}^2 = \sum_{n+1 \le |k| \le m} |a_k|^2 \to 0 \text{ quand } n, m \to \infty.$$

Il s'ensuit que $(P_n)_n$ est une suite de Cauchy dans $\mathscr{L}^2$. Par complétude de $\mathscr{L}^2$ (théorème de Fatou 10.28), il existe $f \in \mathscr{L}^2$ telle que $P_n \to f$ dans $\mathscr{L}^2$ quand $n \to \infty$. Si $n \geq |k|$, alors $c_k(P_n) = a_k$ (exercice 12.10), d'où (justifier)

$$\begin{aligned}|c_k(f) - a_k| &= |c_k(f) - c_k(P_n)| = |c_k(f - P_n)| = |< f - P_n, e_k >| \\ &\leq \|f - P_n\|_{L^2} \|e_n\|_{L^2} = \|f - P_n\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } n \to \infty,\end{aligned}$$

ce qui implique $c_k(f) = a_k$ pour tout k.

Unicité. Notons que, si $c_k(f) = c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, avec $f, g \in L^2$, alors l'égalité de Parseval appliquée à $f - g$ donne $f = g$. CQFD

Démonstration du lemme 12.9. Soient $f \in \mathscr{L}^1$ et $\varepsilon > 0$. Soit $g \in C_c^\infty(]0, 2\pi[)$ telle que $\|f - g\|_{L^1} < \varepsilon$ (l'existence de g suit du théorème 11.11).

Si $n \neq 0$, alors une intégration par parties donne

$$c_n(g) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x)\, e^{-\imath nx}\, dx = \frac{1}{2\imath\,\pi\, n} \int_0^{2\pi} g'(x)\, e^{-\imath nx}\, dx,$$

d'où $|c_n(g)| \leq \dfrac{1}{|n|} \max\limits_{[0,2\pi]} |g'| \to 0$ quand $|n| \to \infty$.

Il existe donc n_0 tel que $|c_n(g)| < \varepsilon$ si $|n| \geq n_0$. Pour un tel n, nous avons

$$|c_n(f)| \leq |c_n(g)| + |c_n(f - g)| \leq |c_n(g)| + \|f - g\|_{L^1} < 2\,\varepsilon.$$ CQFD

12.3 Comportement ponctuel des séries de Fourier

Dans cette section nous travaillons avec des *fonctions* (au lieu de *classes*). La question fondamentale étudiée est le comportement de la suite

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath kx}, \ \ n \in \mathbb{N}, x \in I.^{\dagger}$$

Il sera commode de travailler avec des fonctions définies d'abord sur $[0, 2\pi[$, qui sont prolongées par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$. Par exemple, si $f(x) = x$, $x \in [0, 2\pi[$, alors le prolongement 2π-périodique de f est

$$f(x) = x - 2\pi E\left(\frac{x}{2\pi}\right), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.^{\ddagger}$$

Toutes les fonctions définies dans cette section sont supposées 2π-périodiques et intégrables sur $I =]0, 2\pi[$.

Le premier résultat fondamental de cette section est le *théorème de Dirichlet*.

†. L'étude du comportement de $\sum_{k=m}^{n} c_k(f)\, e^{\imath kx}$ quand $m \to -\infty$ et $n \to \infty$ *de manière indépendante* est un sujet très délicat qui dépasse largement le cadre de ce cours. Dans cette section, nous considérons uniquement le cas où $m = -n$.

‡. $E(x)$ désigne la partie entière de x.

12.13 Théorème.

a) (Critère de Dini) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. S'il existe deux nombres $f(x_0\pm)$ et une fonction $G \in \mathscr{L}^1(]0,\pi[)$ telle que

$$|f(x_0\pm) - f(x_0 \pm y)| \le y\, G(y), \forall\, 0 < y < \pi, \tag{12.18}$$

alors

$$S_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.19}$$

b) En particulier, (12.19) est vraie si f a des limites latérales $f(x_0\pm)$ en x_0, et les limites

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(x_0 \pm y) - f(x_0\pm)}{y}$$

existent et sont finies.

c) (Théorème de Dirichlet) En particulier, (12.19) est vraie en tout point $x_0 \in \mathbb{R}$ si f est « dérivable par morceaux ».

Si, dans le théorème précédent, nous voulons abaisser la condition de régularité sur f de « dérivable » à « continue », alors la bonne notion de convergence est celle de convergence *en moyenne* (*théorème de Fejér* 12.15), la moyenne étant définie ci-dessous.

12.14 Définition. Si $f \in \mathscr{L}^1$, nous posons

$$T_n(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots S_n(f)}{n+1}, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.^\dagger \tag{12.20}$$

12.15 Théorème (Théorème de Fejér)**.**

a) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f a des limites latérales finies $f(x_0\pm)$ en x_0, alors

$$T_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty. \tag{12.21}$$

b) Si f est continue, alors $T_n(f) \to f$ uniformément quand $n \to \infty$.
De manière équivalente, soit $f \in C([0, 2\pi])$ telle que $f(0) = f(2\pi)$. Alors $T_n(f) \to f$ uniformément sur $[0, 2\pi]$ quand $n \to \infty$.

†. $(T_n(f))_n$ est la *moyenne de Cesàro* de $(S_n(f))_n$.

Exercices

L'exercice suivant est *fondamental*. Il montre que, dans les calculs, on peut remplacer $]0, 2\pi[$ par tout intervalle de longueur 2π.

12.16 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Montrer que :

a) f est intégrable sur tout intervalle borné.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(y)\, dy = \int_a^{a+2\pi} f(y)\, dy$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$. $\diamond$

Les *noyaux de Dirichlet* interviennent dans la preuve du *théorème de Dirichlet* 12.13.

12.17 Définition (Noyau de Dirichlet)**.** Le n^{e} *noyau de Dirichlet* ($n \in \mathbb{N}$) est

$$D_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} e^{\imath kx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}. \qquad \diamond \quad (12.22)$$

12.18 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Montrer que :

$$\begin{aligned} S_n(f)(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, D_n(y)\, dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_n(y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \end{aligned} \qquad (12.23)$$

$$\begin{aligned} D_n(y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin((n+1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin(ny)\ \operatorname{cotan}(y/2) + \cos(ny), & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2n+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \end{aligned} \qquad (12.24)$$

$$\int_0^{\pi} D_n(y)\, dy = \int_{-\pi}^{0} D_n(y)\, dy = \pi. \qquad \diamond \quad (12.25)$$

Les *noyaux de Fejér* interviennent dans la preuve du théorème de Fejér 12.15.

12.19 Définition (Noyau de Fejér)**.** Le n^{e} *noyau de Fejér* ($n \in \mathbb{N}$) est

$$F_n := \frac{D_0 + \cdots + D_n}{n+1},\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \qquad \diamond \quad (12.26)$$

12.20 Exercice. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Montrer les propriétés suivantes.

$$\begin{aligned} T_n(f)(x) =& \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy \\ =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy,\ \forall\, x\in\mathbb{R}, \end{aligned}, \tag{12.27}$$

$$F_n(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2[(n+1)y/2]}{(n+1)\,\sin^2(y/2)}, & \text{si } y\notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ n+1, & \text{si } y\in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}, \tag{12.28}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\, dy = 2\pi \tag{12.29}$$

$$\int_0^{\pi} F_n(y)\, dy = \int_{-\pi}^{0} F_n(y)\, dy = \pi. \tag{12.30}$$

Par ailleurs, montrer que

a) $F_n(y)\geq 0$, $\forall\, n$, $\forall\, y\in\mathbb{R}$.

b) Pour tout $0<\delta<\pi$, $F_n\to 0$ uniformément sur $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$ quand $n\to\infty$.

c) Pour tout $0<\delta<\pi$,

$$\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} F_n(y)\, dy \to 0 \text{ quand } n\to\infty. \qquad \diamond \tag{12.31}$$

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.13. Étape 1. Preuve de (12.19) *sous l'hypothèse* (12.18). Posons

$$g(y) := \begin{cases} \dfrac{[f(x_0-y)-f(x_0-)]\,\cos(y/2)}{\sin(y/2)}, & \text{si } 0<y<\pi \\ \dfrac{[f(x_0-y)-f(x_0+)]\,\cos(y/2)}{\sin(y/2)}, & \text{si } -\pi<y<0 \end{cases}$$

et

$$h(y) := \begin{cases} f(x_0-y)-f(x_0-), & \text{si } 0<y<\pi \\ f(x_0-y)-f(x_0+), & \text{si } -\pi<y<0 \end{cases}.$$

Notons que

$$|g(y)|\leq \frac{y}{\sin(y/2)} G(|y|),\ \forall\, 0<|y|<\pi,$$

avec G comme dans (12.18). La fonction

$$]-\pi,\pi[\setminus\{0\}\ni y\mapsto \frac{y}{\sin(y/2))}$$

se prolongeant par continuité en 0 et $\pm\pi$, il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$|g(y)| \leq C\, G(|y|),\ \forall\, 0 < |y| < \pi. \tag{12.32}$$

Par ailleurs, g est mesurable (justifier). De (12.18) et (12.32), g est intégrable sur $]-\pi, \pi[$ (détailler).

De manière analogue,

$$|h(y)| \leq |y| G(|y|) \leq \pi G(|y|),$$

et donc h est intégrable sur $]-\pi, \pi[$.

En utilisant l'exercice 12.18, nous obtenons (détailler)

$$\begin{aligned}
S_n f(x_0) - \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} =& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - y)\, D_n(y)\, dy \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x_0+)\, D_n(y)\, dy \\
&- \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} f(x_0-)\, D_n(y)\, dy \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} (f(x_0 - y) - f(x_0+))\, D_n(y)\, dy \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} (f(x_0 - y) - f(x_0-))\, D_n(y)\, dy \\
=& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(ny)\, g(y)\, dy + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(ny)\, h(y)\, dy \\
=& \frac{1}{4\imath\,\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)\, [e^{\imath ny} - e^{-\imath ny}]\, dy \\
&+ \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(y)\, [e^{\imath ny} + e^{-\imath ny}]\, dy \\
=& \frac{1}{2\imath}[c_{-n}(g) - c_n(g)] + \frac{1}{2}[c_{-n}(h) + c_n(h)] \\
&\to 0 \text{ quand } n \to \infty,
\end{aligned}$$

la conclusion finale étant une conséquence du lemme de Riemann-Lebesgue.

Étape 2. Preuve des items b) et c). Il faut montrer que les hypothèses des items b) et c) impliquent l'existence d'une fonction intégrable G ayant la propriété (12.18). Posons

$$G(y) := \left|\frac{f(x_0 + y) - f(x_0+)}{y}\right| + \left|\frac{f(x_0 - y) - f(x_0-)}{y}\right|,\ \forall\, 0 < y < \pi.$$

Alors G est mesurable et satisfait, par construction, (12.18).

Si f est comme dans l'item b), alors G a une limite finie en 0, et donc G est bornée (et donc intégrable) dans un voisinage $]0, \varepsilon[$ de 0. Par ailleurs, si $y \geq \varepsilon$, nous avons

$$G(y) \leq \varepsilon^{-1}(|f(x_0 + y)| + |f(x_0+)| + |f(x_0 - y)| + |f(x_0-)|) := H(y),$$

et cette majorante est intégrable (justifier), d'où G est intégrable.

Enfin, l'item c) est un cas particulier de l'item b). CQFD

Démonstration du théorème 12.15. *Étape 1. Preuve de l'item a).* Soit $\varepsilon > 0$. Soit $0 < \delta < \pi$ tel que

$$0 < y \leq \delta \implies |f(x_0 \pm y) - f(x_0\pm)| \leq \varepsilon. \tag{12.33}$$

Posons

$$m_n := \max\{F_n(y)\,;\, \delta \leq |y| \leq \pi\},$$

de sorte que

$$\lim_{n\to\infty} m_n = 0 \tag{12.34}$$

(exercice 12.20).

En utilisant l'exercice 12.20 et (12.33), nous obtenons, avec $a := [f(x_0+) + f(x_0-)]/2$:

$$\begin{aligned}
|T_n f(x_0) - a| =& \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_n(y)\, dy - \pi\, f(x_0+) - \pi\, f(x_0-)\right| \\
\leq& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} |f(x-y) - f(x_0+)|\, F_n(y)\, dy \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} |f(x-y) - f(x_0-)|\, F_n(y)\, dy \\
\leq& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} F_n(y)\, dy \\
&+ \frac{m_n}{2\pi}\int_{[\delta,\pi]} (|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + |f(x_0-y)| + |f(x_0+y)|)\, dy \\
\leq& \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(y)\, dy + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)|) \\
&+ \frac{m_n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\, dx \\
=& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + 2\|f\|_1) \to \varepsilon \text{ quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'il existe n_0 tel que $|T_n f(x_0) - a| \leq 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

Étape 2. Preuve de l'item b). Rappelons qu'une fonction continue et périodique sur $\mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue. Il s'ensuit qu'il existe un δ indépendant de x_0 tel que (12.33) soit satisfaite, et pour ce δ nous avons, en reprenant les calculs précédents,

$$\begin{aligned}
|T_n f(x_0) - a| \leq& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(|f(x_0+)| + |f(x_0-)| + 2\|f\|_{L^1}) \\
\leq& \varepsilon + \frac{m_n}{2}(2\|f\|_{L^\infty} + 2\|f\|_{L^1}) \to \varepsilon \text{ quand } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'existence d'un n_0 *indépendant de* x_0 tel que $|T_n f(x_0) - a| \leq 2\varepsilon$, $\forall\, n \geq n_0$, d'où la conclusion de l'item b). CQFD

Démonstration du théorème 12.12. Au vu du théorème de Fejér (item b)), il suffit de prendre $P := T_n(g)$ avec n suffisamment grand. CQFD

12.4 Comportement global des séries de Fourier

La question fondamentale étudiée dans cette section est celle de la convergence uniforme ou normale de la suite $(S_n(f))$. † Notons que la convergence *normale* de la série *de fonctions* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot}$ revient à la convergence de la série *numérique* $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|$.

Dans ce qui suit, *les fonctions f sont continues* ‡ *et 2π-périodiques.*Elles sont donc en particulier *uniformément continues sur* $\mathbb{R}$. §

La philosophie générale est que plus f est lisse, plus la convergence de sa série de Fourier est forte. Notons, par exemple que, si $f \in C^2$, alors

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n\cdot}, \tag{12.35}$$

la série de (12.35) étant normalement convergente (exercice 12.26). Une quantité qui mesure la continuité de f est le *module de continuité*.

12.21 Définition. Le *module de continuité* de f est $\delta \mapsto \omega(\delta)$, où

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\, x, y \in \mathbb{R},\, |x - y| \leq \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi.\text{¶} \qquad \diamond \tag{12.36}$$

L'interprétation intuitive de la taille de ω est que plus $\omega(\delta)$ tend vers 0 rapidement quand $\delta \to 0$, plus la fonction f est lisse. (Voir néanmoins l'exercice 12.28.)

On peut montrer que, dans (12.36), le $\sup$ est un $\max$ (exercice 12.27).

Il sera instructif d'illustrer la calcul de $\omega(\delta)$ et les résultats généraux qui suivent sur les fonctions hölderiennes, qui sont une généralisation des fonctions lipschitziennes.

12.22 Définition. Soit $0 < \alpha \leq 1$. Une fonction $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ est *α-hölderienne* si $|f|_{C^\alpha} < \infty$, où

$$|f|_{C^\alpha} := \sup\left\{\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}\,;\, x, y \in [0, 2\pi],\, x \neq y\right\}.$$

Une fonction est *hölderienne* si elle est α-hölderienne pour un α. $\diamond$

†. Pour la convergence de la suite $(T_n(f))$, le théorème de Fejér 12.15 fournit une réponse convenable.

‡. On ne peut espérer de la convergence uniforme de $(S_n(f))$ en l'absence de la continuité de f, car une limite uniforme de fonctions continues est encore continue.

§. Voir l'étape 2 de la preuve du théorème 12.15.

¶. La définition la plus courante du module de continuité est légèrement différente, mais pour énoncer les résultats de cette section la définition via la formule (12.36) convient.

Si f est α-hölderienne sur $[0, 2\pi]$ et, de plus, $f(0) = f(2\pi)$, alors le prolongement par périodicité de f est continu et nous avons (exercice 12.29)

$$\omega(\delta) \leq 2|f|_{C^\alpha}\, \delta^\alpha,\ 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{12.37}$$

12.23 Théorème. (Théorème de Jackson) Si

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta)\, |\ln \delta| = 0, \tag{12.38}$$

alors $S_n(f) \to f$ uniformément quand $n \to \infty$. ◇

12.24 Théorème. Si

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta < \infty, \tag{12.39}$$

alors la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n \cdot}$ converge normalement vers f. ◇

En combinant les théorèmes 12.23 et 12.24 avec l'inégalité (12.37), nous obtenons le résultat important suivant.

12.25 Corollaire. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f(0) = f(2\pi)$.

a) Si f est α-hölderienne pour un $\alpha > 0$, alors $\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{\imath k \cdot}$ converge uniformément vers f quand $n \to \infty$.

b) (Théorème de Bernstein) Si f est α-hölderienne pour un $\alpha > 1/2$ (donc, en particulier, si f est de classe C^1, ou si f est lipschitzienne), alors la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n \cdot}$ converge normalement et sa somme est f.

Exercices

12.26 Exercice. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que

$$|c_n(f)| \leq \frac{\|f^{(k)}\|_{L^\infty}}{|n|^k},\ \forall\, n \in \mathbb{Z}^*.$$

En particulier, si $f \in C^2$, montrer que sa série de Fourier $x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n x}$ converge normalement, et que la somme de la série est f. ◇

12.27 Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue et 2π-périodique. Soit ω son module de continuité,

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\, ;\, x, y \in \mathbb{R},\ |x - y| \leq \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{12.40}$$

1. Montrer que, dans (12.40), le $\sup$ est un $\max$.
2. Montrer que ω est continue et croissante. ◇

12.28 Exercice. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $\omega(\delta) \ll \delta$ quand $\delta \to 0$. Montrer que f est constante (et réciproquement). $\diamond$

12.29 Exercice. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction α-hölderienne telle que $f(0) = f(2\pi)$. Nous notons encore f son prolongement par 2π-périodicité.

1. Montrer que
$$\omega(\delta) \leq 2\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{12.41}$$
2. Améliorer (12.41) à
$$\omega(\delta) \leq 2^{1-\alpha}\,|f|_{C^\alpha}\delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi.$$
$\diamond$

12.30 Exercice. Montrer que $S_n(T_n(f)) = T_n(f)$. $\diamond$

12.31 Exercice. Montrer que
$$\|S_n(f)\|_{L^\infty} \leq \|D_n\|_{L^1}\|f\|_{L^\infty},\ \forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable, bornée, } 2\pi\text{-périodique.}\diamond \tag{12.42}$$

12.32 Exercice.

1. Montrer que
$$|D_n(y)| \leq \frac{\pi}{|y|}\min\left((n+1/2)|y|, 1\right),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 < |y| \leq \pi. \tag{12.43}$$
On pourra utiliser les inégalités suivantes :
$$|\sin t| \leq \min\left(|t|, 1\right), \forall\, t \in \mathbb{R},$$
$$\sin t \geq \frac{2}{\pi}t,\ \forall\, t \in [0, \pi/2].$$
$\diamond$
2. En déduire que
$$\|D_n\|_{L^1} \leq 1 + \ln\pi + \ln(n+1/2),\ \forall\, n \geq 0. \quad \diamond \tag{12.44}$$

12.33 Exercice. Montrer que
$$|F_n(y)| \leq \frac{\pi^2}{(n+1)y^2}\min\left(((n+1)y/2)^2, 1\right),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 < |y| \leq \pi. \quad \diamond \tag{12.45}$$

12.34 Exercice. Si f est localement intégrable et 2π-périodique, montrer que $c_n(f(\cdot+h)) = e^{\imath nh}c_n(f)$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration du théorème 12.23. Étape 1. Stratégie générale de la preuve. La fonction f étant continue, nous avons $T_n(f) \to f$ uniformément (théorème 12.15 item b)). Il suffit donc de montrer que $S_n(f) - T_n(f) \to 0$ uniformément. En notant que $T_n(f) = S_n(T_n(f))$ (exercice 12.30), nous devons montrer que
$$S_n(f - T_n(f)) \to 0 \text{ uniformément quand } n \to \infty. \tag{12.46}$$

La preuve de (12.46) repose sur les exercices 12.31 et 12.32, qui donnent

$$\|S_n(f - T_n(f))\|_{L^\infty} \le (1 + \ln \pi + \ln(n + 1/2))\|f - T_n(f)\|_{L^\infty}. \tag{12.47}$$

Pour compléter la preuve du théorème, nous allons obtenir les résultats suivants :

$$\|f - T_n(f)\|_{L^\infty} \le \frac{\pi}{2}\omega(2/(n+1)) + \frac{\pi}{n+1}\int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy, \tag{12.48}$$

$$\text{sous l'hypothèse (12.38), nous avons } \lim_{\delta\to 0} \delta\,|\ln \delta| \int_\delta^\pi \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy = 0, \tag{12.49}$$

résultats qui, combinés avec (12.47), permettent de conclure (vérifier).

Étape 2. Preuve de (12.48). En reprenant le début de la preuve du théorème 12.15, et en utilisant les propriétés de F_n (exercices 12.20 et 12.27), la définition de ω, et la monotonie de ω (exercice 12.27), nous obtenons successivement, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
|T_n f(x) - f(x)| =& \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} [f(x-y) - f(x)]\,F_n(y)\,dy\right| \\
\le& \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \omega(|y|)\,F_n(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \omega(y)\,F_n(y)\,dy \\
\le& \frac{\pi(n+1)}{4}\int_0^{2/(n+1)} \omega(y)\,dy + \frac{\pi}{n+1}\int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy \\
\le& \frac{\pi^2}{2}\omega(2/(n+1)) + \frac{\pi}{n+1}\int_{2/(n+1)}^{\pi} \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy.
\end{aligned} \tag{12.50}$$

On obtient (12.48) en prenant, dans (12.50), le $\sup$ sur x.

Étape 3. Preuve de (12.49). La règle de l'Hospital « $?/\infty$ », qui s'applique car ω est continue (exercice 12.27), donne, grâce à l'hypothèse (12.38),

$$\begin{aligned}
\lim_{\delta\to 0} \delta\,|\ln \delta| \int_\delta^\pi \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy &= \lim_{\delta\to 0} \frac{\displaystyle\int_\delta^\pi \frac{\omega(y)}{y^2}\,dy}{\dfrac{-1}{\delta\,\ln\delta}} = \lim_{\delta\to 0} \frac{-\dfrac{\omega(\delta)}{\delta^2}}{\dfrac{1}{\delta^2\,\ln\delta} + \dfrac{1}{\delta^2\,(\ln\delta)^2}} \\
&= \lim_{\delta\to 0} \frac{-\omega(\delta)\,\ln\delta}{1 + \dfrac{1}{\ln\delta}} = 0.
\end{aligned}$$

CQFD

Démonstration du théorème 12.24. Rappelons que notre principal but est de montrer la convergence de la série $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)|$.

Étape 1. Utilisation de l'égalité de Parseval et du module de continuité. Pour $0 < h \le 2\pi$, soit $f_h(x) := f(x+h)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Nous avons

$$c_n(f_h) = e^{\imath nh} c_n(f) \tag{12.51}$$

(exercice 12.34) et, clairement,

$$\|f_h - f\|_{L^2} \le \|f_h - f\|_{L^\infty} \le \omega(h). \tag{12.52}$$

De (12.51), (12.52) et l'égalité de Parseval (12.13), nous obtenons

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |e^{\imath nh} - 1|^2 |c_n(f)|^2 \leq \omega^2(h), \ \forall\, 0 < h \leq 2\pi. \tag{12.53}$$

Étape 2. Contrôle de $\sum |c_n(f)|$ *si* $|n|$ *est de l'ordre de* $1/h$. Prenons $h := 1/2^\ell$, avec $\ell \in \mathbb{N}$, et les $n \in \mathbb{Z}$ vérifiant $2^\ell \leq |n| < 2^{\ell+1}$. Pour de tels n et h, nous avons $1 \leq |nh| < 2$, et donc

$$|e^{\imath nh} - 1|^2 \geq C, \tag{12.54}$$

où

$$C := \min\{|e^{\imath t} - 1|^2\, ;\, 1 \leq |t| \leq 2\} > 0$$

(justifier le fait que $C > 0$).

De (12.53), (12.54), et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, nous obtenons

$$\begin{aligned}\left(\sum_{2^\ell \leq |n| < 2^{\ell+1}} |c_n(f)|\right)^2 \leq & \sum_{2^\ell \leq |n| < 2^{\ell+1}} |e^{\imath n/2^\ell} - 1|^2 |c_n(f)|^2 \\ & \times \sum_{2^\ell \leq |n| < 2^{\ell+1}} \frac{1}{|e^{\imath n/2^\ell} - 1|^2} \leq \frac{2^{\ell+1}}{C^2} \omega^2(1/2^\ell), \ \forall\, \ell \in \mathbb{N}.\end{aligned} \tag{12.55}$$

Étape 3. Comparaison série-intégrale. La monotonie de ω (exercice 12.27) et la sommation par paquets (proposition 6.50) donnent

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta = & \sum_{\ell \geq 0} \int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta \geq \sum_{\ell \geq 0} \int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(1/2^{\ell+1})}{\delta^{3/2}}\, d\delta \\ \geq & \sum_{\ell \geq 0} \int_{1/2^{\ell+1}}^{1/2^\ell} \frac{\omega(1/2^{\ell+1})}{(1/2^\ell)^{3/2}}\, d\delta = 2^{-3/2} \sum_{\ell \geq 1} 2^{\ell/2} \omega(1/2^\ell).\end{aligned} \tag{12.56}$$

Étape 4. Convergence normale de la série de Fourier. En utilisant la sommation par paquets, (12.55), (12.56), et l'hypothèse (12.39), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f)| = & |c_0(f)| + \sum_{\ell \geq 0} \sum_{2^\ell \leq |n| < 2^{\ell+1}} |c_n(f)| \leq |c_0(f)| + \frac{2^{1/2}}{C} \sum_{\ell \geq 0} 2^{\ell/2} \omega(1/2^\ell) \\ \leq & |c_0(f)| + \frac{2^{1/2}}{C} \omega(1) + \frac{4}{C} \int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{3/2}}\, d\delta < \infty.\end{aligned}$$

Étape 5. Identification de la limite. Notons $S(f) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n \cdot}$, qui est continue, comme somme d'une série normalement convergente de fonctions continues. Du corollaire 12.7, il existe une suite $n_j \nearrow \infty$ telle que

$$\lim_{j \to \infty} \sum_{k=-n_j}^{n_j} c_k(f)\, e^{\imath kx} = f(x) \text{ pour presque tout } x \in \mathbb{R}. \tag{12.57}$$

Nous avons donc $S(f) = f$ presque partout d'où, par continuité de $S(f)$ et f, $S(f) = f$ *partout* (justifier). CQFD

12.5 Pour aller plus loin

Les résultats des sections précédentes, notamment la comparaison entre le théorème de Fejér 12.15 et le théorème de Dirichlet 12.13, montrent que la « bonne » notion de convergence des séries de Fourier est la convergence en moyenne : *il est plus approprié d'approcher f par $T_n(f)$ plutôt que par $S_n(f)$*. Ce phénomène est également illustré par le *phénomène de Gibbs*, instabilité numérique associée à $S_n(f)$ (mais pas à $T_n(f)$) étudiée en analyse numérique. (Voir, dans Hewitt et Hewitt [13], la présentation historique des phénomènes de ce type.)

Néanmoins, l'étude du comportement de la suite $(S_n(f))_n$ a été l'un des moteurs importants du développement de l'analyse entre 1850 et 1970. Signalons, sans preuve, quelques résultats marquants.

12.35 Théorème (Critère de Jordan)**.** Si $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}$ est monotone (et étendue par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$), alors

$$S_n(f)(x_0) \to \frac{f(x_0+) + f(x_0-)}{2} \text{ quand } n \to \infty, \ \forall\, x_0 \in \mathbb{R}. \qquad \diamond$$

.

12.36 Théorème (Théorème de du Bois-Reymond)**.** Il existe une fonction continue et 2π-périodique f telle que $S_n(f)(0) \not\to f(0)$ quand $n \to \infty$.† $\diamond$

12.37 Théorème (Théorème de M. Riesz)**.** Soient $1 < p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(]0, 2\pi[)$. Nous avons $S_n(f) \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ quand $n \to \infty$. $\diamond$

12.38 Théorème (Théorème de Kolmogorov)**.** Il existe une fonction $f \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(]0, 2\pi[)$ telle que la suite $(S_n(f)(x_0))$ diverge, $\forall\, x_0 \in [0, 2\pi]$. $\diamond$

Enfin, une amélioration remarquable du corollaire 12.7.

12.39 Théorème (Théorème de Carleson-Hunt)**.** Soient $1 < p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(]0, 2\pi[)$. Nous avons $S_n(f) \to f$ p. p. sur $[0, 2\pi]$ quand $n \to \infty$.‡

Pour une description historique de ces problèmes, une bonne référence est Edwards [6, Chapitre 10], qui contient aussi des (ébauches de) démonstrations de ces résultats, sauf du dernier. La preuve du dernier théorème est longue et difficile, même si elle a été beaucoup simplifiée entre 1973 et 2000 ; voir Grafakos [9, Chapitre 11].

†. Cette propriété négative est vraie pour « la plupart » des fonctions continues, mais donner un sens précis à « la plupart » nécessite un formalisme qui ne sera pas développé ici.

‡. Le cas $p = 2$ est dû à Carleson, qui conjectura que le cas général $1 < p < \infty$ devait se faire de manière analogue. Une preuve pour $1 < p < \infty$ fut trouvée ultérieurement par Hunt.

Chapitre 13

Transformée de Fourier

13.0 Aperçu

Nous étudierons dans ce chapitre, qui est un pendant « continu » du chapitre 12, les propriétés basiques de la *transformée de Fourier*.

Les *fonctions* considérées sont *définies sur* $\mathbb{R}^n$ et à valeurs complexes ; elles sont supposées *Lebesgue mesurables et/ou intégrables* (par rapport à la tribu et à la mesure de Lebesgue). Rappelons la définition de la transformée de Fourier si $f \in \mathscr{L}^1 = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}) = \mathscr{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$:

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\xi} f(x)\, dx, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}. \tag{13.1}$$

Notons que si $f = g$ p. p., alors $\widehat{f} = \widehat{g}$ *en tout point*. Nous pouvons donc définir $\widehat{f}$ pour une classe $f \in L^1(\mathbb{R})$, le résultat étant une fonction définie de manière unique en tout point de $\mathbb{R}$. Pour cette même raison, nous allons faire les calculs de transformée de Fourier sur des fonctions et non pas sur des classes.

La définition et les remarques précédentes s'étendent aux fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$. Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\widehat{f}(\xi) = \mathscr{F}(f)(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)\, dx, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13.2}$$

Ici, $\cdot$ désigne le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^n$: $x \cdot \xi = \sum_{j=1}^n x_j\, \xi_j$.

Le début de la section 13.1 est dédié aux propriétés fondamentales de la transformée de Fourier, par exemple au lien entre $\widehat{f'}$ et $\widehat{f}$ (proposition 13.4) ou au calcul de $\widehat{f * g}$ (proposition 13.1 c)).

Le résultat fondamental de cette section est la *formule d'inversion* (théorème 13.7), qui permet de calculer f en fonction de $\widehat{f}$. C'est l'analogue du théorème de Dirichlet 12.13 qui permet de calculer f en fonction des coefficients de Fourier $c_n(f)$, $n \in \mathbb{Z}$.

La section 13.2 est dédiée à la transformée de Fourier dans $\mathscr{L}^2$. La définition de celle-ci est problématique : une fonction de $\mathscr{L}^2$ n'est pas nécessairement intégrable, et dans ce cas l'intégrale de (13.1) n'est pas définie. C'est le *théorème de Plancherel* 13.19 qui permet de donner un sens à la transformée de Fourier pour une telle fonction. Celle-ci n'est pas définie comme une intégrale, mais comme une (classe d'équivalence de) limite d'intégrales, en approchant f dans $\mathscr{L}^2$ par des fonctions de $\mathscr{L}^1 \cap \mathscr{L}^2$. C'est l'un des résultats les plus subtils de ce cours.

Le champ des applications de la transformée de Fourier (et des séries des Fourier) est *immense*, et ne peut pas être détaillé ici. À titre d'illustration, nous présentons dans la section 13.3 une application potentielle de la transformée de Fourier à la résolution d'une équation aux dérivées partielles.

Compétences minimales attendues.

a) Savoir calculer les transformées de Fourier usuelles.
b) Savoir utiliser les propriétés fondamentales de la transformée de Fourier dans $\mathscr{L}^1$.
c) Savoir utiliser le théorème d'inversion de Fourier.
d) Comprendre la définition de la transformée de Fourier dans L^2. ◇

Certaines propriétés de la transformée de Fourier s'obtiennent par des intégrations par parties et/ou par « récurrence » sur les dérivées partielles. Les deux deviennent plus compliquée dans $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 2$; c'est pourquoi parfois les arguments sont détaillés uniquement en dimension un. Il est instructif d'essayer d'adapter ces arguments aux dimensions supérieures.

13.1 Transformée de Fourier dans L^1

Nous travaillons dans $L^1 := L^1(\mathbb{R}^n)$. Comme expliqué dans l'introduction, la transformée de Fourier se calcule pour des fonctions $f \in \mathscr{L}^1$, mais le résultat ne dépend que de la classe $[f]$ de f dans L^1. Ce qui explique les énoncés donnés pour des classes, accompagnés de preuves faites pour des fonctions. Il conviendra de vérifier, dans chaque énoncé (exemple typique : la proposition 13.3) que les hypothèses faites et les conclusions sont « robustes », au sens où elle ne dépendent pas du choix d'un représentant dans une classe de L^1.

Voici les premières propriétés fondamentales de la transformée de Fourier dans L^1.

13.1 Proposition. Soit $f \in L^1$. Nous avons

a) $\widehat{f}$ est continue et

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1},\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13.3}$$

b) (Lemme de Riemann-Lebesgue)

$$\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0. \tag{13.4}$$

c) Si $g \in L^1$, alors

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g} \tag{13.5}$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, g(\xi)\, d\xi = \int_{R^n} f(x)\, \widehat{g}(x)\, dx. \qquad \diamond \tag{13.6}$$

13.2 Notations.

a) α désigne un *multi-indice* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

b) La *longueur* de α est $|\alpha| := \sum_{j=1}^n |\alpha_j|$.

c) Si $x \in \mathbb{C}^n$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $x^\alpha := (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n}$.

d) Si f est de classe $C^{|\alpha|}$, alors $\partial^\alpha f := (\partial_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial_n)^{\alpha_n} f$. $\diamond$

Si f est « mieux que L^1 », alors la transformée de Fourier a quelques propriétés supplémentaires.

13.3 Proposition. Soient $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |x|^k\, |f(x)|\, dx < \infty$, alors $\widehat{f} \in C^k$ et $\widehat{f}^{(\ell)}(\xi) = \widehat{(-\imath x)^\ell f}(\xi)$, $\forall\, 0 \leq \ell \leq k$, $\forall\, \xi$.

Plus généralement, soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $k \in \mathbb{N}^*$. Si $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |x|^k\, |f(x)|\, dx < \infty$, alors $\widehat{f} \in C^k$ et $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = \widehat{(-\imath x)^\alpha f}(\xi)$, $\forall\, \alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$. $\diamond$

13.4 Proposition. Si $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et si $\partial^\alpha f \in \mathscr{L}^1$, $\forall\, \alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$, alors $\widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = (\imath\xi)^\alpha\, \widehat{f}(\xi)$, $\forall\, \alpha$ tel que $|\alpha| \leq k$. $\diamond$

Le résultat suivant est important à plusieurs titres. D'une part, il donne un exemple concret de fonctions f telles que $\widehat{f}$ soit intégrable ; cette propriété, qui est plus forte que la conclusion $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ du lemme de Riemann-Lebesgue, nous permet d'appliquer la formule d'inversion de Fourier (voir le théorème 13.7 et le corollaire 13.9). D'autre part, cette proposition est le résultat clé dans la preuve du théorème de Plancherel 13.19.

13.5 Proposition. Si $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$, alors $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{f}$ est intégrable. ◇

Nous arrivons enfin au résultat le plus important de cette section, la *formule d'inversion*.

13.6 Notation. $\check{f}(x) := f(-x)$. ◇

13.7 Théorème (Formule d'inversion de la transformée de Fourier)**.** Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

a) *Supposons f continue et $\widehat{f}$ intégrable.* Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi \\ &= (2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{f}}(-x) = (2\pi)^{-n} \check{\widehat{\widehat{f}}}(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \end{aligned} \tag{13.7}$$

b) *Supposons $\widehat{f}$ intégrable.* Nous avons

$$\begin{aligned} f(x) =&(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi \\ =&(2\pi)^{-n} \widehat{\widehat{f}}(-x) = (2\pi)^{-n} \check{\widehat{\widehat{f}}}(x) \text{ p. p. dans } \mathbb{R}^n. \end{aligned} \quad \diamond \tag{13.8}$$

13.8 Corollaire. La transformée de Fourier $\mathscr{F} : L^1 \to L^\infty$ est injective. ◇

En combinant le théorème 13.7 et la proposition 13.5, nous obtenons le résultat suivant.

13.9 Corollaire. Soit $f \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$. Nous avons

$$f(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{13.9}$$

◇

Exercices

L'exercice suivant sera utilisé dans la preuve de la proposition 13.3.

13.10 Exercice. Montrer que

$$|x^\alpha| \le |x|^{|\alpha|},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \alpha \in \mathbb{N}^n. \quad \diamond \tag{13.10}$$

L'exercice suivant sera utilisé dans la preuve de la proposition 13.4.

13.11 Exercice.

a) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et intégrable. Montrer qu'il existe une suite $R_j \to \infty$ telle que $|g(R_j)| + |g(-R_j)| \to 0$ quand $n \to \infty$.
De manière équivalente, $\lim\limits_{R\to\infty} \inf\limits_{|x|\geq R} (|g(x)| + |g(-x)|) = 0$.

b) Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continue et intégrable, avec $n \geq 2$. Donner un analogue de a) faisant intervenir des intégrales sur les sphères $\{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\|_\infty = R_j\}$. ◇

13.12 Exercice. Nous nous proposons ici de montrer (pour simplifier, uniquement pour $n = 1$) que, pour $k \geq 2$, il y a trop d'hypothèses dans la proposition 13.4.

a) Prenons d'abord $k = 2$. Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$.
   (i) Exprimer $f(x + 1)$ en fonction de $f(x)$, $f'(x)$ et f'' en utilisant la formule de Taylor à l'ordre deux sous forme intégrale au point x. En déduire une formule pour $f'(x)$.
   (ii) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_{L^1} \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f''\|_{L^1})$.
   (iii) En déduire que, pour $n = 1$ et $k = 2$, la conclusion de la proposition peut s'obtenir sous les hypothèses plus faibles $f \in C^2$, $f, f'' \in L^1$.

b) Soit maintenant $k \geq 3$. Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$.
   (i) Exprimer $f(x+1), f(x+2), \ldots, f(x+k-1)$ en fonction de $f(x), f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$ et $f^{(k)}$ en utilisant la formule de Taylor à l'ordre k sous forme intégrale au point x. En déduire des formules pour $f'(x), \ldots, f^{(k-1)}(x)$.
   (ii) Montrer qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|f'\|_{L^1} + \cdots + \|f^{(k-1)}\|_{L^1} \leq C(\|f\|_{L^1} + \|f^{(k)}\|_{L^1})$.
   (iii) En déduire que, pour $n = 1$ et $k \geq 2$, la conclusion de la proposition peut s'obtenir sous les hypothèses plus faibles $f \in C^k$, $f, f^{(k)} \in \mathscr{L}^1$. ◇

L'exercice suivant aborde des propriétés basiques, utiles dans le calcul de transformées de Fourier, et dans la preuve du théorème 13.7. Il convient de justifier le fait que, dans les preuves, on peut travailler avec des fonctions (au lieu de classes).

13.13 Exercice.

a) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $\varepsilon > 0$. Rappelons que $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} f(x/\varepsilon)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (i) Montrer que $f_\varepsilon \in L^1$.
   (ii) Montrer que $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \widehat{f}(\varepsilon\, \xi)$.
   (iii) Montrer que $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1}$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

b) Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $h \in \mathbb{R}^n$. Rappelons que $\tau_h f(x) = f(x - h)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.
   (i) Montrer que $\tau_h f \in L^1$.
   (ii) Montrer que $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-\imath h\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

c) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.
   (i) Montrer que $\overline{f} \in L^1$.
   (ii) Montrer que $\widehat{\overline{f}}(\xi) = \overline{\widehat{f}}(-\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$.

d) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Rappelons que $\check{f}(x) = f(-x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.

(i) Montrer que $\check{f} \in L^1$.

(ii) Montrer que $\widehat{\check{f}}(\xi) = \widehat{f}(-\xi) = \check{\widehat{f}}(\xi)$, $\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$. ◇

Nous présentons ici un calcul fondamental : la transformée de Fourier des « gaussiennes » (centrées).

13.14 Exercice.

a) Soit $a > 0$. Soit $g^a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g^a(x) := e^{-a\,x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer $h^a := \widehat{g^a}$.

Rappelons que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\, dx = \pi^{1/2}$.

(i) Montrer que $g^a \in \mathscr{L}^1$ et calculer $h^a(0)$.

(ii) Montrer que $h^a \in C^1$ et donner la formule de $(h^a)'$.

(iii) En utilisant une intégration par parties, montrer que $(h^a)'(\xi) = -\dfrac{\xi\, h^a(\xi)}{2a}$. Indication : $x\, e^{-x^2/a} = -1/(2a)\, \left(e^{-a\,x^2}\right)'$.

(iv) Obtenir la formule

$$\widehat{e^{-a\,x^2}}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} e^{-\xi^2/(4a)}.$$

Sous une forme plus compacte, nous avons

$$\widehat{g^a}(\xi) = \left(\frac{\pi}{a}\right)^{1/2} g^{1/(4a)}(\xi).$$

b) Plus généralement, soit $g^a(x) = e^{-a\,|x|^2}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\widehat{g^a}(\xi) := \left(\frac{\pi}{a}\right)^{n/2} g^{1/(4a)}(\xi),\ \forall\, a > 0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$ ◇

13.15 Exercice. Dans $\mathbb{R}$, soit $f := \chi_{[0,1]}$. Montrer que $f \in \mathscr{L}^1$ mais que $\widehat{f} \notin \mathscr{L}^1$. En déduire que la formule d'inversion (13.8) ne s'applique pas à *toutes* les fonctions de $\mathscr{L}^1$. ◇

Voici trois calculs classiques de transformées de Fourier.

13.16 Exercice.

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\widehat{f}$.

b) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \dfrac{1}{1+x^2}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $\widehat{g}$. ◇

13.17 Exercice. Soit $\lambda > 0$. Soit

$$f(x) := \int_0^\infty e^{-\lambda\, t}\, (4\pi\, t)^{-n/2}\, e^{-|x|^2/(4t)}\, dt,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$.

b) Calculer $\widehat{f}$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 13.1.

a) Pour montrer la continuité de $\widehat{f}$, nous appliquons le théorème 7.10 à la fonction $(x,\xi) \mapsto e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)$, en utilisant l'identité $|e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)| = |f(x)|$.

Pour (13.3), notons que

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)|\, dx = \|f\|_{L^1}.$$

b) Le raisonnement se fait par densité, en partant de $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et en utilisant (13.3) (justifier cette démarche, en adaptant la fin de la preuve du lemme 12.9).

Soit $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Nous prenons sur $\mathbb{R}^n$ la norme $\| \ \|_\infty$. Soit $R < \infty$ tel que $g(x) = 0$ si $\|x\|_\infty \geq R$.

Soit $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $j = j(\xi)$ tel que $\|\xi\|_\infty = |\xi_j| > 0$. Sans perte de généralité, nous supposons $j = 1$.

Nous écrivons un point de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $x = (x_1, x')$, avec $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Le théorème de Fubini donne (justifier)

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{[-R,R]^{n-1}} \left(\int_{-R}^{R} e^{-\imath x_1\xi_1} g(x_1,x')\, dx_1 \right) e^{-\imath x'\cdot\xi'}\, dx' \\ &= \frac{1}{\imath\,\xi_1} \int_{[-R,R]^{n-1}} \left(\int_{-R}^{R} e^{-\imath x_1\xi_1} \partial_1 g(x_1,x')\, dx_1 \right) e^{-\imath x'\cdot\xi'}\, dx' = \frac{1}{\imath\,\xi_1} \widehat{\partial_1 g}(\xi),\end{aligned}$$

d'où $|\widehat{g}(\xi)| \leq (1/\|\xi\|_\infty)\, \||\nabla g|\|_{L^1} \to 0$ quand $|\xi| \to \infty$.

c) L'inégalité de Young donne $f * g \in L^1$. En utilisant le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,|g(y)|\, dxdy < \infty$$

(vérifier), le théorème de Fubini et un changement affine de variables permettent de justifier le calcul suivant (détailler)

$$\begin{aligned}\widehat{f*g}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f*g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f(x-y)\, dx \right) g(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath (x-y)\cdot\xi} f(x-y)\, dx \right) e^{-\imath y\cdot\xi} g(y)\, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath z\cdot\xi} f(z)\, dz \right) e^{-\imath y\cdot\xi} g(y)\, dy = \widehat{f}(\xi)\, \widehat{g}(\xi).\end{aligned}$$

L'identité (13.6) est une application directe du théorème de Fubini, dont l'application est justifiée par le fait que

$$\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} |f(x)|\,|g(\xi)|\, dxd\xi < \infty$$

(détailler). CQFD

Démonstration de la proposition 13.3. Notons que pour $1 \leq \ell \leq k$ nous avons $t^\ell \leq 1 + t^k$, $\forall\, t \geq 0$.† En combinant cette inégalité avec l'inégalité (13.10), nous obtenons que la fonction $x \mapsto x^\alpha f(x)$ est intégrable si $|\alpha| \leq k$. Ceci permet d'appliquer le corollaire 7.15 et d'obtenir les formules de l'énoncé (justifier). CQFD

Démonstration de la proposition 13.4. Nous considérons uniquement le cas $n = 1$, qui repose sur l'exercice 13.11 a). La preuve pour $n \geq 2$ est similaire et est basée sur la partie b) de l'exercice.

La preuve se fait par récurrence sur k ; le point essentiel est le passage de $k = 0$ à $k = 1$. Soit $(R_j)_j$ comme dans l'exercice 13.11 a) avec $g = f$. Nous avons (justifier)

$$\begin{aligned}\widehat{f'}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\xi} f'(x)\,dx = \lim_{j\to\infty} \int_{-R_j}^{R_j} e^{-\imath x\xi} f'(x)\,dx \\ &= \lim_{j\to\infty} \left(\left[e^{-\imath x\xi} f(x) \right]_{-R_j}^{R_j} + \imath\xi \int_{-R_j}^{R_j} e^{-\imath x\xi} f(x)\,dx \right) = \imath\xi \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\xi} f(x)\,dx,\end{aligned}$$

qui est l'égalité désirée. CQFD

Démonstration de la proposition 13.5. Sous l'hypothèse plus faible $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^k\, |f(x)|\, dx < \infty, \ \forall\, k \in \mathbb{N}$$

(vérifier), d'où $\widehat{f} \in C^\infty$ (proposition 13.3).

Si $|\alpha| \leq n+1$, alors $\partial^\alpha f \in L^1$ (vérifier). La proposition 13.4 et l'inégalité (13.3) impliquent

$$|\xi^\alpha|\, |\widehat{f}(\xi)| \leq C_\alpha, \ \forall\, |\alpha| \leq n+1, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

En prenant $\alpha := (0,0,\ldots,0)$, $\alpha := (n+1,0,\ldots,0)$, $\alpha := (0,n+1,0,\ldots,0),\ldots,\alpha := (0,0,\ldots,n+1)$ et en sommant les inégalités obtenues, nous obtenons

$$(1 + \|\xi\|_\infty^{n+1})\, |\widehat{f}(\xi)| \leq \left(1 + \sum_j |\xi_j|^{n+1} \right) |\widehat{f}(\xi)| \leq C < \infty, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

d'où, pour $C' < \infty$ convenable,

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{C}{1 + \|\xi\|_\infty^{n+1}} \leq \frac{C'}{1 + |\xi|^{n+1}}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

(justifier).

Par comparaison avec les intégrales de référence, $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$. CQFD

†. Montrer cette inégalité en examinant les cas $0 \leq t \leq 1$ et $t > 1$.

Démonstration du théorème 13.7.

Étape 1. Preuve de (13.7) *pour* $x = 0$ *si, de plus,* f *est bornée.* L'identité (13.6) avec $g := (2\pi)^{-n} g^a$, où $g^a(x) := e^{-a|x|^2}$, $a > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, donne (grâce à l'exercice 13.14)

$$\underbrace{(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, e^{-a\,|\xi|^2}\, d\xi}_{:=I_a} = \underbrace{(1/(4\pi\, a))^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-|x|^2/(4a)}\, dx}_{:=J_a}. \tag{13.11}$$

La domination

$$|\widehat{f}(\xi)\, e^{-a\,|\xi|^2}| \le |\widehat{f}(\xi)|,\ \forall\, a \ge 0,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

l'hypothèse $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$ et le théorème 7.10 donnent (justifier)

$$\lim_{a\searrow 0} I_a = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, d\xi. \tag{13.12}$$

Pour étudier J_a, posons $\psi(x) := (1/(4\pi))^{n/2} e^{-|x|^2/4}$, de sorte que $\psi \in \mathscr{L}^1$ et $\int_{\mathbb{R}^n} \psi = 1$ (vérifier). Nous avons $J_a = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \psi_{a^{1/2}}(x)\, dx$.† Le changement de variables $x = \Phi(y) := a^{1/2}\, y$ donne (vérifier)

$$J_a = \int_{\mathbb{R}^n} f(a^{1/2}\, y)\, \psi(y)\, dy \to \int_{\mathbb{R}^n} f(0)\, \psi(y)\, dy = f(0) \text{ quand } a \searrow 0. \tag{13.13}$$

Le passage à la limite dans (13.13) se fait en utilisant le théorème 7.10 et repose sur la continuité de f et sur la domination

$$|f(a^{1/2}\, y)\, \psi(y)| \le (\sup |f|)\, |\psi(y)|,\ \forall\, a \ge 0,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n$$

(vérifier).

Nous concluons la première étape grâce à (13.11)–(13.13).

Étape 2. Preuve de (13.7) *si, de plus,* f *est bornée.* Soit $k := \tau_{-x} f$,‡ dont la transformée de Fourier est $\xi \mapsto e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)$ (exercice 13.13 b)). La fonction k vérifie les hypothèses assumées à l'étape 1 (vérifier), d'où

$$(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{k}(\xi)\, d\xi = k(0) = f(x),$$

ce qui équivaut à (13.7) pour un x quelconque.

Étape 3. Preuve de (13.8). Soit ρ un noyau régularisant. Soit $f^\varepsilon := f * \rho_\varepsilon$. Nous avons $f^\varepsilon \in C^\infty$ (proposition 11.7), f^ε est intégrable (ceci découle de l'inégalité de Young avec $p = 1$ et $q = 1$) et bornée (conséquence de l'inégalité de Young avec $p = 1$ et $q = \infty$,

†. Pour la notation $\psi_{a^{1/2}}$, voir la formule (11.9).
‡. Voir la notation 11.22.

en utilisant le fait que $\rho_\varepsilon \in \mathscr{L}^\infty$). Par ailleurs, nous avons $\widehat{f^\varepsilon} = \widehat{f}\,\widehat{\rho_\varepsilon}$ (proposition 13.1). Comme $|\widehat{\rho_\varepsilon}(\xi)| \leq 1$ (exercice 13.13), nous obtenons que $\widehat{f^\varepsilon} \in \mathscr{L}^1$. Grâce à la deuxième étape, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\underbrace{f * \rho_\varepsilon(x)}_{=f^\varepsilon(x)} &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f * \rho_\varepsilon}(\xi)\, d\xi \\ &= \underbrace{(2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, \widehat{\rho_\varepsilon}(\xi)\, d\xi}_{:=L_\varepsilon(x)}, \forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.\end{aligned} \tag{13.14}$$

Nous allons maintenant faire $\varepsilon \to 0$ dans (13.14). Grâce à l'exercice 13.13 a) (appliqué à ρ), au fait que $\widehat{\rho}(0) = \displaystyle\int \rho = 1$ et à l'hypothèse $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$, nous obtenons

$$\lim_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\, \widehat{f}(\xi)\, d\xi,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{13.15}$$

Par ailleurs, nous avons $f^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^1$ quand $\varepsilon \to 0$ (théorème 11.9). Il s'ensuit qu'il existe une suite $\varepsilon_j \to 0$ et un ensemble négligeable $A \subset \mathbb{R}^n$ avec $f^{\varepsilon_j}(x) \to f(x)$ quand $j \to \infty$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus A$ (corollaire 10.29). En combinant ce fait avec (13.14) et (13.15), nous obtenons (13.8).

Étape 4. Preuve de (13.7). De (13.8), l'égalité (13.7) est vraie p. p. Le membre de droite de (13.7) est continu (car la transformée de Fourier de $\widehat{f}$ l'est, grâce à la proposition 13.1). Nous avons donc l'égalité p. p. de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, ce qui revient à une égalité partout (exercice 4.39 b)) et implique (13.7). CQFD

Démonstration du corollaire 13.8. Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ et $\widehat{f} = 0$, alors $f = 0$ ν_n-p. p. (théorème 13.7 b)) et donc la classe de f est nulle. CQFD

13.2 Transformée de Fourier dans L^2

Dans cette section, nous allons donner un sens *naturel* à $\widehat{f}$ si $f \in L^2$ (*théorème de Plancherel* 13.19). La clé est l'identité (13.16), qui repose sur la formule d'inversion de Fourier (théorème 13.7, et plus spécifiquement le corollaire 13.9).

13.18 Proposition. Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{g}}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx. \quad \diamond \tag{13.16}$$

13.19 Théorème (Théorème de Plancherel)**.**

a) Soit $f \in L^1 \cap L^2 = L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors $\widehat{f} \in L^2$ et $\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\, \|f\|_{L^2}$.

b) L'application $L^1 \cap L^2 \ni f \mapsto \mathscr{F}(f) = \widehat{f} \in L^2$ admet une et une seule extension continue de L^2 vers L^2.

Par abus de notation, cette extension est encore notée $\mathscr{F}$, et nous posons $\widehat{f} := \mathscr{F}(f)$, $\forall\, f \in L^2$.

c) $\mathscr{F} : L^2 \to L^2$ a les propriétés suivantes :

(i) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\, \overline{\widehat{g}}(\xi)\, d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx, \ \forall\, f, g \in L^2.$

(ii) $\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\, \|f\|_{L^2}$, $\forall\, f \in L^2$.

(iii) $\mathscr{F}$, $\mathscr{F}^{-1}$ sont linéaires, continus et bijectifs .

(iv) $f = (2\pi)^{-n} \check{\widehat{\widehat{f}}}$, $\forall\, f \in L^2$.

13.20 Remarque.

a) Si $f \in L^2$, nous n'avons pas nécessairement $f \in L^1$.† Si $f \in L^2 \backslash L^1$, la formule $\widehat{f}(\xi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x \cdot \xi}\, f(x)\, dx$ *n'a pas de sens et ne définit pas* $\widehat{f}$.

b) Néanmoins, le théorème 13.19 permet de donner une *définition naturelle* de $\widehat{f}$ pour $f \in L^2$, de la manière suivante.

(i) Nous prenons une suite $(f_j)_j$ telle que $f_j \in L^1 \cap L^2$, $\forall\, j$ et $f_j \to f$ dans L^2 quand $j \to \infty$.‡ Alors la suite $(\widehat{f_j})_j$ converge dans $\mathscr{L}^2$. Si sa limite est g, alors la classe de g ne dépend pas du choix de la suite, et par définition nous posons $\widehat{f} := [g]$. (Avec un abus de notation, $\widehat{f} = g$.)

(ii) Le long d'une sous-suite $(\widehat{f_{j_k}})_k$, nous avons $\widehat{f_{j_k}} \to g$ p. p., et donc $\widehat{f}(\xi) = \lim_{k\to\infty} \widehat{f_{j_k}}(\xi)$ p. p.

(iii) Considérons le choix particulier $f_j = f\, \chi_{B(0,j)}$, $j \in \mathbb{N}^*$. Alors $f_j \in L^1 \cap L^2$ et $f_j \to f$ dans L^2 quand $j \to \infty$ (vérifier). Il s'ensuit que, pour tout $f \in L^2$, il existe une suite d'entiers $j_k \to \infty$ (en principe dépendante de f) telle que

$$\widehat{f}(\xi) = \lim_{k\to\infty} \int_{B(0,j_k)} e^{-\imath x \cdot \xi}\, f(x)\, dx, \ \text{pour presque tout } \xi \in \mathbb{R}^n. \qquad \diamond$$

Exercices

13.21 Exercice. Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := (\operatorname{sgn}\, x)\, e^{-|x|}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

†. Prendre par exemple $n = 1$ et $f(x) = 1/(1 + |x|)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

‡. Par exemple, nous pouvons considérer une suite $(f_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $f_j \to f$ dans L^2 quand $j \to \infty$ (voir le théorème 11.11). Alors nous avons également $f_j \in L^1$, $\forall\, j$ (pourquoi ?).

b) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) := \dfrac{1}{x + \imath}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. $\diamond$

Démonstrations

Démonstration de la proposition 13.18. Notons que f, $\widehat{g} \in L^1$ et $\widehat{f}$, $g \in L^\infty$ (justifier). Grâce à l'inégalité de Hölder (cas $p = 1$, $q = \infty$), nous obtenons $f\,\overline{g}$, $\widehat{f}\,\overline{\widehat{g}} \in L^1$. Il s'ensuit que les deux membres de (13.16) sont donnés par des intégrales convergentes.

En utilisant la formule (13.7) et le corollaire 13.9, nous obtenons (justifier l'utilisation du théorème de Fubini)

$$\begin{aligned}(2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\overline{g}(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\overline{\int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath x\cdot\xi}\,\widehat{g}(\xi)\,d\xi}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi}\,\overline{\widehat{g}}(\xi)\,d\xi\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi}\, f(x)\,dx\right) \overline{\widehat{g}}(\xi)\,d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{g}}(\xi)\,d\xi,\end{aligned}$$

d'où la conclusion. CQFD

Démonstration du théorème 13.19.

a) La formule (13.16) s'applique en particulier si $f \in C_c^{n+1} := C_c^{n+1}(\mathbb{R}^n)$. En prenant $g = f$, nous obtenons

$$\|\widehat{f}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\, \|f\|_{L^2},\ \forall\, f \in C_c^{n+1}. \tag{13.17}$$

Soit $f \in L^1 \cap L^2$. Alors il existe une suite $(g_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $g_j \to f$ dans L^1 et dans L^2 quand $j \to \infty$ (exercice 11.17). De (13.17), nous avons

$$\|\widehat{g_j} - \widehat{g_k}\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\, \|g_j - g_k\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } j, k \to \infty,$$

ce qui montre que la suite $(\widehat{g_j})_j$ est de Cauchy dans L^2. Nous obtenons l'existence d'une fonction (ou plutôt classe) $h \in L^2$ telle que $\widehat{g_j} \to h$ dans L^2 (théorème 10.28). Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons également supposer que $\widehat{g_j} \to h$ p. p. (corollaire 10.29).

Par ailleurs, nous avons $g_j \to f$ dans L^1, ce qui entraîne $\widehat{g_j} \to \widehat{f}$ uniformément (inégalité (13.3)).

La limite p. p. d'une suite étant unique p. p. (justifier), nous en déduisons que $\widehat{f} = h$ p. p., d'où en particulier $\widehat{f} \in L^2$ et $\widehat{g_j} \to \widehat{f}$ dans L^2.

En appliquant (13.17) à g_j et en passant à la limite sur j, nous obtenons la validité de (13.17) pour tout $f \in L^1 \cap L^2$ (vérifier).

b) Rappelons le résultat suivant de topologie. Soient X, Y des espaces de Banach, et Z un sous-espace vectoriel de X. Soit $T : Z \to Y$ une application linéaire et continue. Si

Z est dense dans X, alors T admet une et une seule extension continue $\widetilde{T} : X \to Y$. De plus, $\widetilde{T}$ est linéaire.

Appliquons ceci à $X = Y := L^2$, $Z := L^1 \cap L^2$ et $T := \mathscr{F}$. Z contient $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, donc Z est dense dans X (justifier). D'après le point a), T est continu, de norme $(2\pi)^{n/2}$. La conclusion de b) découle de ce qui précède (justifier).

c) (i) L'égalité est vraie si $f, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (proposition 13.18). Soient $f, g \in L^2$ et des suites $(f_j)_j, (g_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telles que $f_j \to f$ et $g_j \to g$ dans L^2 quand $j \to \infty$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f_j}(\xi)\,\overline{\widehat{g_j}}(\xi)\,d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)\,\overline{g_j(x)}\,dx,\ \forall\, j. \tag{13.18}$$

Si $<,>$ est le produit scalaire complexe dans L^2, alors (13.18) équivaut à

$$<\widehat{f_j}, \widehat{g_j}>= (2\pi)^n\ <f_j, g_j>,\ \forall\, j. \tag{13.19}$$

Pour obtenir c) (i), nous passons à la limite $j \to \infty$ dans (13.19). Nous avons par exemple

$$\begin{aligned}
&\left|<\widehat{f_j}, \widehat{g_j}> - <\widehat{f}, \widehat{g}>\right| \\
&\qquad = \left|<\widehat{f_j}, \widehat{g_j - g}> + <\widehat{f - f}, \widehat{g}>\right| \\
&\qquad \le \left|<\widehat{f_j}, \widehat{g_j - g}>\right| + \left|<\widehat{f_j - f}, \widehat{g}>\right| \\
&\qquad \le \left\|\widehat{f_j}\right\|_{L^2} \|\widehat{g_j - g}\|_{L^2} + \left\|\widehat{f_j - f}\right\|_{L^2} \|\widehat{g}\|_{L^2} \\
&\qquad = (2\pi)^n\ \|f_j\|_{L^2}\ \|g_j - g\|_{L^2} \\
&\qquad\quad + (2\pi)^n\ \|f_j - f\|_{L^2}\ \|g\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } j \to \infty.
\end{aligned}$$

Le passage à la limite dans le membre de droite de (13.19) se justifie de manière similaire. Nous obtenons la validité de (i) pour tout $f, g \in L^2$.

(ii) Il suffit de prendre $g = f$ dans (i).

(iii) Montrons d'abord que l'image de $\mathscr{F}$ est *fermée* dans L^2.† En effet, soit $(h_j)_j \subset \mathscr{F}(L^2)$ une suite qui converge vers un $h \in L^2$. Soit $f_j \in L^2$ tel que $\widehat{f_j} = h_j$. De (ii), nous avons

$$\|f_j - f_k\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\ \|h_j - h_k\|_{L^2} \to 0 \text{ quand } j, k \to \infty.$$

Nous obtenons que $(f_j)_j$ est une suite de Cauchy dans L^2 et donc il existe $f \in L^2$ tel que $f_j \to f$ dans L^2 quand $j \to \infty$ (théorème 10.28). Il s'ensuit que $h_j \to \widehat{f}$ dans L^2 quand $j \to \infty$ (justifier), d'où $\widehat{f} = h$ et donc $h \in \mathscr{F}(L^2)$.

†. Nous donnons une preuve directe de ce fait, mais nous aurions pu invoquer le résultat plus général suivant. Soit $T : X \to Y$ *linéaire* et *continu*, avec X espace de Banach et Y espace normé. S'il existe une constante $C > 0$ telle que (*) $\|Tx\|_Y \ge C\,\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$, alors l'image de T est fermée. Dans notre cas, $X = Y := L^2$, $T := \mathscr{F}$, et nous avons $\|\mathscr{F}(f)\|_{L^2} = (2\pi)^{n/2}\,\|f\|_{L^2}$, $\forall\, f \in L^2$, ce qui montre à la fois que $\mathscr{F}$ est continu et que (*) est vérifiée.

Par ailleurs, l'image de $\mathscr{F}$ contient $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. En effet, si $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors nous avons d'une part (justifier)

$$g = \check{\check{g}} = \mathscr{F}((2\pi)^{-n}\,\mathscr{F}(\check{g})).$$

D'autre part, nous avons $\mathscr{F}\check{g} \in L^1 \cap L^\infty$; ceci découle des propositions 13.1 a) et 13.5. Il s'ensuit que $\mathscr{F}\check{g} \in L^2$ (utiliser l'exercice 10.24). Donc, comme affirmé, nous avons $g \in \mathscr{F}(L^2)$, $\forall\, g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

De ce qui précède, $\mathscr{F}(L^2)$ est fermé dans L^2 et contient $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, qui est dense dans L^2 (théorème 11.11). Il s'ensuit que $\mathscr{F}(L^2) = L^2$, d'où $\mathscr{F}$ est *surjectif*.

La propriété c) (ii) montre que $\mathscr{F}$ est *injectif*. Donc $\mathscr{F}$ est *bijectif*.

$\mathscr{F}$ étant bijectif, la propriété c) (ii) donne $\|\mathscr{F}^{-1}(f)\|_{L^2} = (2\pi)^{-n/2}\,\|f\|_{L^2}$ (vérifier). En particulier, $\mathscr{F}^{-1}$ est continu. †

(iv) se démontre de la manière suivante. La formule est vraie si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De ce qui précède, chacun des membres de l'égalité est continu pour la topologie de L^2. Par densité de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans L^2, la formule reste vraie pour tout $f \in L^2$ (justifier). CQFD

13.3 Pour aller plus loin

La transformée de Fourier a d'innombrables applications, par exemple en théorie du signal, traitement d'images et équations aux dérivées partielles. Pour expliquer le rôle joué par la transformée de Fourier dans l'étude des équations au dérivées partielles, partons d'un calcul *formel*, qui montre que la résolution d'une équation différentielle fait apparaître un produit de convolution et nécessite de pouvoir calculer une transformée de Fourier inverse.

Considérons l'équation

$$u - \Delta u = f \text{ dans } \mathbb{R}^n, \tag{13.20}$$

où Δ est le *laplacien*, $\Delta u := \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_1)^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_2)^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial (x_n)^2}$.

Si nous avons le droit de prendre la transformée de Fourier dans (13.20) et *si* la proposition 13.4 s'applique, alors (13.20) devient

$$(1 + |\xi|^2)\,\widehat{u}(\xi) = \widehat{f}(\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{13.21}$$

ce qui donne

$$\widehat{u}(\xi) = \frac{1}{1 + |\xi|^2}\widehat{f}(\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13.22}$$

†. À nouveau, nous aurions pu invoquer un résultat plus général : si $T : X \to Y$ est *linéaire*, *continu* et *bijectif*, avec X, Y espaces de Banach, alors T^{-1} est continu.

Admettons qu'il existe une fonction K telle que

$$\widehat{K}(\xi) = \frac{1}{1+|\xi|^2},\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n.^{\ddagger} \tag{13.23}$$

Alors (13.21) et (13.22) donnent

$$\widehat{u}(\xi) = \widehat{K}(\xi)\,\widehat{f}(\xi), \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{13.24}$$

En comparant (13.21) à (13.6) et en supposant que l'on puisse identifier une fonction à partir de sa transformée de Fourier,[†] nous obtenons, du moins formellement, l'égalité

$$u = K * f. \tag{13.25}$$

Nous voyons sur cet exemple le besoin de pouvoir définir la transformée de Fourier directe ou inverse dans un cadre, le plus large possible, qui préserve les propriétés de la transformée de Fourier obtenues dans la section 13.1. Le cadre naturel pour de tels résultats est celui des *distributions tempérées* introduites par Schwartz. Pour une introduction rapide et efficace à cette théorie et à quelques applications aux équations aux dérivées partielles, voir par exemple Hörmander [14, Chapitre VII].

‡. K existe bien ! Utiliser l'exercice 13.17 pour le montrer.
†. Ceci est le cas si le corollaire 13.8 ou le théorème de Plancherel s'appliquent.

Chapitre 14

Introduction aux espaces de Hilbert

14.0 Aperçu

Dans ce mini-chapitre, marginal par rapport au sujet principal du cours, nous présentons quelques propriétés basiques des *espaces de Hilbert*, c'est-à-dire des espaces de Banach H dont la norme $\| \ \|$ est induite par un produit scalaire $< \ , >$. Pour simplifier la lecture, nous considérons systématiquement *un espace de Hilbert réel* ; le passage aux espaces complexes n'apporte pas de difficulté supplémentaire.

En dimension finie, les objets fondamentaux qui permettent de mener des calculs explicites (projection orthogonale sur un sous-espace, calcul de l'adjoint, diagonalisation des opérateurs auto-adjoints, ...) sont les *bases orthonormées*. Le passage aux espaces de dimension (algébrique) infinie pose de nombreux problèmes : par exemple, un opérateur auto-adjoint n'est plus nécessairement diagonalisable. Nous établissons ici trois résultats fondamentaux qui ne nous dépaysent pas trop et sont des pendants « infinis » de résultats rencontrés en dimension finie :

1. L'existence de la *projection orthogonale* sur un sous-espace vectoriel fermé de H (ou, plus généralement, sur une partie convexe fermée non-vide de H) ;
2. L'existence d'une *base hilbertienne* (l'analogue d'une base orthonormée en dimension infinie) dans les espaces séparables ;
3. La caractérisation des formes linéaires et continues sur H (*théorème de Riesz* 14.19).

Compétences minimales attendues.

a) Savoir utiliser l'inégalité de Bessel et l'égalité de Parseval.
b) Savoir étudier et manipuler des séries orthogonales.
c) Savoir utiliser les propriétés de l'orthogonal.
d) Savoir utiliser le théorème de Riesz 14.19. ◇

14.1 Projection sur un convexe fermé

.

14.1 Proposition. Soit C une partie convexe, fermée et non-vide de H. Pour tout $x \in H$, il existe un et un seul $y \in C$ tel que

$$\|x - y\| \leq \|x - z\|, \ \forall\, z \in C. \tag{14.1}$$

14.2 Définition. Le point y ci-dessus est la *projection orthogonale* de x sur C, et on note $y = p_C(x)$.

La résultat suivant donne une caractérisation utile de la projection orthogonale.

14.3 Proposition. Avec x, C comme ci-dessus, nous avons

$$y = p_C(x) \iff [y \in C \text{ et } < x - y, z - y > \leq 0, \ \forall\, z \in C]. \tag{14.2}$$

Dans le cas particulier d'un sous-espace vectoriel fermé F de H, nous avons

$$y = p_F(x) \iff [y \in F \text{ et } < x - y, w >= 0, \ \forall\, w \in F]. \tag{14.3}$$

14.4 Définition. Soit F une partie non-vide de H. L'*orthogonal de F* est

$$F^\perp := \{y \in H\,;\, < x, y >= 0, \ \forall\, x \in F\}. \tag{14.4}$$

On vérifie aisément que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H (exercice 14.9 a)).

14.5 Théorème. Soit F un sous-espace fermé de H. Alors $F \oplus F^\perp = H$.

14.6 Corollaire. a) Si F est un sous-espace fermé de H, $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

b) Si A est une partie non-vide de H, $\left(A^\perp\right)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}$. ◇

14.7 Corollaire. Soit F un sous-espace fermé non-nul de H. Alors p_F est un projecteur linéaire continu de norme 1. ◇

Exercices

Cet exercice prépare la preuve de la proposition 14.3.

14.8 Exercice. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe dérivable. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. 0 est un point de minimum de f.
2. $f'(0) \geq 0$. ◇

Cet exercice prépare la preuve du corollaire 14.6.

14.9 Exercice. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$. ◇

Démonstrations

Démonstration de la proposition 14.1. Étape 1. Existence de la projection. Soit

$$d := d(x, C) = \inf\{\|x - z\| \,;\, z \in C\}.$$

Soit $(y_j) \subset C$ telle que $\|x - y_j\| \to d$. L'identité du parallélogramme donne (vérifier)

$$\|(y_j - y_k)/2\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_k\|^2 - \|x - (y_j + y_k)/2\|^2, \ \forall\, j, k. \tag{14.5}$$

C étant convexe, nous avons $(y_j + y_k)/2 \in C$, $\forall\, j, k$, d'où, en utilisant (14.5) et la définition de d,

$$\|(y_j - y_k)/2\|^2 \leq \frac{1}{2}\|x - y_j\|^2 + \frac{1}{2}\|x - y_k\|^2 - d \to 0 \text{ quand } j, k \to \infty. \tag{14.6}$$

De (14.6), nous avons $\lim_{j,k\to\infty}(y_j - y_k) = 0$, et donc (y_j) est une suite de Cauchy de C. H étant complet et C fermé, (y_j) converge vers un $y \in C$. Par ailleurs,

$$\|x - y\| = \lim_j \|x - y_j\| = d \leq \|x - z\|, \ \forall\, z \in C,$$

et donc y a la propriété de l'énoncé.

Étape 2. Unicité de la projection. En admettant provisoirement la proposition 14.3, si y_1, y_2 sont comme dans l'énoncé, nous avons

$$< x - y_1, y_2 - y_1 > \leq 0,$$
$$< x - y_2, y_1 - y_2 > \leq 0.$$

En additionnant les deux inégalités, nous obtenons $\|y_2 - y_1\|^2 \leq 0$, d'où $y_1 = y_2$. CQFD

Démonstration de la proposition 14.3. « $\implies$ » Soit $z \in C$. Pour $t \in [0, 1]$, nous avons $(1 - t)y + tz \in C$ (par convexité de C) et donc (par définition de la projection)

$$f(t) := \|x - (1 - t)y - tz\|^2 \geq \|x - y\|^2 = f(0), \ \forall\, t \in [0, 1]. \tag{14.7}$$

f étant convexe et dérivable (justifier), (14.7) équivaut à $f'(0) \geq 0$ (voir l'exercice 14.8). Or, $f'(0) = 2 < x - y, y - z >$, d'où la conclusion.

« $\Longleftarrow$ » Avec les notations ci-dessus, nous avons $f'(0) \geq 0$, et donc $f(1) \geq f(0)$, ce qui revient à $\|x - z\| \geq \|x - y\|$, $\forall\, z \in C$.

Le cas particulier d'un sous-espace. « $\Longrightarrow$ » Soit $w \in F$. En prenant, dans (14.2), $z := y + w \in F$, respectivement $z := y - w \in F$, nous obtenons $< x - y, w > \leq 0$, respectivement $< x - y, -w > \leq 0$, d'où $< x - y, w >= 0$.

« $\Longleftarrow$ » Soit $z \in F$. Alors $< x - y, z - y >= 0$, car $z - y \in F$. CQFD

Démonstration du théorème 14.5. $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de H (exercice 14.9 a)). Par ailleurs, si $x \in F \cap F^\perp$, alors $< x, x >= 0$, et donc $x = 0$. Enfin, soient $x \in H$ et $y := p_F(x)$. La proposition 14.3 donne $x - y \in F^\perp$, et donc $x = y + (x - y) \in F + F^\perp$. CQFD

Démonstration du corollaire 14.6. a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H (exercice 14.9 a)), d'où, en appliquant deux fois le théorème 14.5, $F \oplus F^\perp = H$ et $F^\perp \oplus \left(F^\perp\right)^\perp = H$. Par ailleurs, nous avons clairement $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$, d'où l'égalité $F = \left(F^\perp\right)^\perp$.

b) L'exercice 14.9 b) donne $A^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}^\perp$. Comme l'adhérence d'un sous-espace est encore un sous-espace (justifier), la partie a) du corollaire donne

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left(\overline{\text{Vect}\,(A)}^\perp\right)^\perp = \overline{\text{Vect}\,(A)}.$$

CQFD

Démonstration du corollaire 14.7. Soient $x_1, x_2 \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $x := x_1 + \lambda x_2$ et $y := p_F(x_1) + \lambda p_F(x_2)$, alors x et y satisfont (14.3), et donc $y = p_F(x)$. Il s'ensuit que p_F est linéaire.

Pour tout ensemble convexe, fermé et non-vide C, nous avons $p_C(x) = x$, $\forall\, x \in C$, d'où $p_C \circ p_C = p_C$. Dans le cas particulier d'un sous-espace fermé F, nous obtenons que p_F est un projecteur (linéaire).

La décomposition orthogonale $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et le théorème de Pythagore donnent

$$\|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2 \leq \|x\|^2,$$

et donc p_F est continu, de norme ≤ 1.

F étant non-nul, il existe $x \in F \backslash \{0\}$. Pour cet x, nous avons

$$\|p_F(x)\| = \|x\| \leq \|p_F\| \|x\|,$$

d'où $\|p_F\| \geq 1$, et finalement $\|p_F\| = 1$. CQFD

14.2 Bases hilbertiennes

Dans un espace de Hilbert de dimension algébrique infinie, la notion « naturelle » de base orthonormée serait la suivante :

a) $(e_j)_{j\in J}$ (avec J famille infinie) est une base algébrique de H, c'est-à-dire tout $x \in H$ s'écrit de manière unique sous la forme $x = \sum_{j\in J} \lambda_j e_j$, avec un nombre fini de scalaires λ_j non-nuls (pour donner un sens à la somme).

b) La famille $(e_j)_{j\in J}$ est orthonormée, c'est-à-dire, pour $j, k \in J$, $< e_j, e_k >= 0$ si $j \neq k$, respectivement $< e_j, e_j >= 1$.

Il se trouve qu'*aucun* espace de Hilbert de dimension infinie ne possède une base orthonormée au sens de la définition naïve ci-dessus (voir l'exercice 14.17). La bonne définition d'une base garde l'exigence b), mais remplace, dans la représentation a), la somme finie par une somme infinie. Afin de simplifier la compréhension, nous considérons le cas « le moins infini possible », celui des espaces séparables, mais il faut garder à l'esprit que cette restriction n'est pas fondamentale pour l'existence d'une base hilbertienne (en général, non-dénombrable).

14.10 Théorème. On suppose H *séparable* et de *dimension infinie*. Alors il existe une famille orthonormée $(e_n)_{n\geq 1}$ telle que

$$x = \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n, \ \forall\, x \in H. \tag{14.8}$$

14.11 Définition. Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ comme dans le théorème 14.2 est une *base hilbertienne* de H.

14.12 Corollaire. Si $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de H, nous avons

$$\|x\|^2 = \sum_{n\geq 1} < x, e_n >^2, \ \forall\, x \in H \text{ (égalité de Parseval)}. \tag{14.9}$$

En lien avec le corollaire 14.12, voir les exercices 14.14 et 14.15.

Le résultat suivant donne une définition alternative d'une base hilbertienne.

14.13 Proposition. Une suite $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de H si et seulement si :

(i) La suite est orthonormée.

(ii) L'espace vectoriel engendré par la suite est dense dans H.

De manière équivalente, $(e_n)_{n\geq 1}$ est une base hilbertienne de H si et seulement si nous avons (i) et

(ii') Si $< x, e_n >= 0$, $\forall\, n$, alors $x = 0$. ◇

Exercices

14.14 Exercice. Soit $(e_j)_{j\geq 1}$ une famille orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1}\subset\mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge } \iff \sum_{j\geq 1} a_j^2 < \infty.$$

En cas de convergence de la série, montrer que $\left\|\sum_{j\geq 1} a_j e_j\right\|^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2$. ◇

14.15 Exercice. (Voir la section 12.1) Soit $(e_j)_{1\leq j<N}\subset H$ (avec $N = 2, 3, \ldots, \infty$) une suite orthonormée d'une espace pré-hilbertien H. Montrer que

$$\sum_{1\leq j<N} < x, e_j >^2 \leq \|x\|^2,\ \forall\, x\in H \text{ (inégalité de Bessel)}.$$ ◇

14.16 Exercice. Avec les notations du chapitre 12, montrer que $(x\mapsto e^{\imath nx})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[)$. ◇

14.17 Exercice. Soit H un espace préhilbertien ayant une base algébrique orthonormée infinie $\mathscr{B}$. Montrer que H n'est pas complet.
Indication : soit $(e_n)_{n\geq 1}\subset\mathscr{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n := \sum_{j=1}^n (1/j^2)e_j$, $\forall\, n\geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas. ◇

Cet exercice éclaire l'énoncé de la proposition 14.13.

14.18 Exercice. Soit F un sous-espace vectoriel de H. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. F est dense dans H.
2. $F^\perp = \{0\}$. ◇

Démonstrations

Démonstration du théorème 14.10. Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots\}$ une partie dénombrable et dense de H. Soit $E_k := \text{Vect}\,(\{a_1, \ldots, a_k\})$, $\forall\, k\geq 1$. Nous avons $E_1\subset E_2\subset\ldots$ et $\dim E_{k+1} - \dim E_k\leq 1$, $\forall\, k\geq 1$.

Étape 1. La suite $(E_k)_{k\geq 1}$ n'est pas stationnaire. En effet, sinon il existe k tel que $E_\ell = E_k$, $\forall\,\ell\geq k$, et dans ce cas tous les points de A appartiennent à E_k. Il ensuit que (justifier) $H = \overline{A}\subset\overline{E_k} = E_k$, impossible, car H est de dimension infinie.

Étape 2. Construction par récurrence des vecteurs e_n, $n\geq 1$. Si E_k est le premier espace non-nul, alors $\dim E_k = 1$ et nous choisissons un vecteur normé $e_1\in E_k$. En supposant construits $e_1, \ldots, e_n$ qui forment une base orthonormée de E_ℓ, nous considérons le premier $j > \ell$ tel que $E_j\neq E_\ell$ (un tel j existe, *cf* la première étape). Nous avons $\dim E_j - \dim E_\ell = 1$. Nous pouvons donc compléter $\{e_1, \ldots, e_n\}$ à une base orthonormée

$\{e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}\}$ de E_j. Notons que, grâce à l'étape 1 et par construction, $(e_n)_{n\geq 1}$ est une suite (infinie) orthonormée.

Étape 3. Preuve de (14.8). Soient $x \in H$ et $\varepsilon > 0$. Soit $a_k \in A$ tel que

$$\|x - a_k\| < \varepsilon/2. \tag{14.10}$$

Si $n \geq k$, nous avons $a_k \in \text{Vect}\,(\{e_1, \ldots, e_n\})$ (justifier), et donc

$$a_k = \sum_{1\leq j\leq n} < a_k, e_j >, \ \forall\, n \geq k. \tag{14.11}$$

En combinant (14.11) avec l'inégalité de Bessel (exercice 14.15) et (14.10), nous obtenons, pour tout $n \geq k$,

$$\begin{aligned}\left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > -x \right\| \leq & \left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > -a_k \right\| + \|x - a_k\| \\ = & \left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x - a_k, e_j > \right\| + \|x - a_k\| \\ < & \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,\end{aligned}$$

d'où (14.8). CQFD

Preuve du corollaire 14.12. La continuité de la norme, (14.8) et le théorème de Pythagore donnent

$$\|x\|^2 = \lim_n \left\| \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j \right\|^2 = \lim_n \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j >^2 = \sum_{n\geq 1} < x, e_n >^2 . \qquad \text{CQFD}$$

Preuve de la proposition 14.13. Soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit

$$G := \text{Vect}\,(\{e_n\,;\, n \geq 1\}).$$

« (14.8) $\Longrightarrow$ (ii) » Si $x \in H$, alors $y_n := \sum_{1\leq j\leq n} < x, e_j > e_j \in G$, $\forall\, n \geq 1$, et $y_n \to x$, d'où $x \in \overline{G}$, ce qui implique $\overline{G} = H$.

« (ii) $\Longrightarrow$ (ii') » L'exercice 14.9 b), (ii) et le théorème 14.5 donnent

$$\begin{aligned}[< x, e_n >= 0, \ \forall\, n \geq 1] \iff & x \in \{e_n\,;\, n \geq 1\}^\perp \iff x \in \overline{G}^\perp \iff x \in H^\perp = \{0\} \\ \iff & x = 0.\end{aligned}$$

« (ii') $\Longrightarrow$ (14.8) » L'inégalité de Bessel (exercice 14.15) et l'exercice 14.14 implique l'existence de

$$y := \sum_{n\geq 1} < x, e_n > e_n = \lim_k \underbrace{\sum_{1\leq j\leq k} < x, e_j > e_j}_{:= y_k} . \tag{14.12}$$

Si $k \geq n$, nous avons $< y_k, e_n >=< x, e_n >$, d'où

$$< x - y, e_n >= \lim_k < x - y_k, e_n >= \lim_k 0 = 0, \ \ \forall\, n \geq 1. \tag{14.13}$$

De (14.13) et (ii'), nous trouvons que $x = y$. Nous concluons grâce à (14.12). CQFD

14.3 Théorème de représentation de Riesz

14.19 Théorème. (Théorème de Riesz) Soit $\varphi : H \to \mathbb{R}$ une application linéaire et continue. Alors il existe $a \in H$ tel que

$$\varphi(x) =< x, a >, \ \forall\, x \in H. \tag{14.14}$$

Et réciproquement.

De plus, nous avons

$$\|\varphi\| = \|a\|. \tag{14.15}$$

Exercices

14.20 Exercice. Montrer que

$$\|x\| = \max\{< x, y > ;\ y \in H, \|y\| \le 1\},\ \forall\, x \in H. \qquad \diamond$$

Démonstrations

Démonstration du théorème 14.19. Étape 1. Existence de a et preuve de (14.15). Si $\varphi = 0$, $a = 0$ convient. Si $\varphi \neq 0$, soit $F := \operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$, qui est un sous-espace fermé de H (justifier). Soit $b \in H$ tel que $\varphi(b) = 1$ (justifier l'existence d'un tel b). Soient $c := p_F(b)$ et $d := b - c \neq 0$. Notons que $\varphi(d) = \varphi(b) = 1$ et $\varphi(x - \varphi(x)d) = 0$, $\forall\, x \in H$ (et donc $x - \varphi(x)d \in F$, $\forall\, x \in H$). Si $x \in H$, nous avons (grâce à (14.3))

$$< x, d >=< \underbrace{x - \varphi(x)d}_{\in F}, \underbrace{d}_{=b-p_F(b)} > + < \varphi(x)d, d >= \varphi(x)\|d\|^2,$$

et donc $a := d/\|d\|^2$ convient.

L'égalité (14.15) suit de l'exercice 14.20.

Étape 2. Assertion réciproque. Clairement, $H \ni x \mapsto < x, a >$ est linéaire et, de l'exercice 14.20, continue de norme $\|a\|$. CQFD

14.4 Pour aller plus loin

L'étude des espaces de Hilbert sera poursuivie dans l'UE d'Analyse fonctionnelle en master 1. Une excellente référence est Brezis [5].

Les bases hilbertiennes jouent un rôle important dans l'analyse des espaces de Hilbert et au-delà (analyse numérique, étude des espaces L^p et d'autres espaces de fonctions). Parmi les plus célèbres, notons celle de Haar, Hermite, Laguerre, Legendre et Walsh, dont la construction sera étudiée en master.

Pour conclure ce chapitre, nous ouvrons ici plutôt une perspective non-hilbertienne, dans le prolongement du théorème de représentation de Riesz. La preuve de ce théorème repose sur deux ingrédients :

a) On peut projeter sur un ensemble convexe, fermé et non-vide de H.

b) L'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto \|u + tv\|$, avec $u, v \in H$ et $u \neq 0$, est dérivable en $t = 0$.

Le résultat suivant (voir Willem [22, Chapitre IV, Section 14] pour un énoncé voisin) permet d'obtenir une conclusion similaire à celle du théorème de représentation de Riesz *dans le cadre des espaces de Banach*.

14.21 Théorème. (Théorème de représentation de James) Soit $H \neq \{0\}$ un espace *de Banach* avec les propriétés a) et b) ci-dessus. Si $\varphi : H \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire et continue, alors il existe $u \in H \setminus \{0\}$ tel que

$$\varphi(x) = \|\varphi\| \left[\frac{d}{dt} \|u + tx\| \right]_{t=0}, \ \forall\, x \in H. \qquad \diamond \quad (14.16)$$

De manière remarquable, ce théorème s'applique aux espaces L^p avec $1 < p < \infty$. Pour ces espaces, la formule (14.16) donne le théorème de représentation de Riesz 10.31 a).

Index

Bibliographie

[1] Banach, S. et Tarski, A.: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes*. Fund. Math., 6 :244–277, 1924.

[2] Banach, S.: *Sur le problème de la mesure*. Fund. Math., 4 :7–23, 1923.

[3] Barbe, Ph. et Ledoux, M.: *Probabilité*. EDP Sciences, 2007.

[4] Bogachev, V. I.: *Measure theory. Vol. I*. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[5] Brezis, H.: *Analyse fonctionnelle. Théorie et applications*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, 1983.

[6] Edwards, R. E.: *Fourier series. A modern introduction. Vol. 1*, tome 64 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 2e édition, 1979.

[7] Evans, L. C. et Gariepy, R. F.: *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.

[8] Federer, H.: *Geometric measure theory*, tome 153 de *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[9] Grafakos, L.: *Modern Fourier analysis*, tome 250 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 3e édition, 2014.

[10] Gramain, A.: *Intégration*. Collection Méthodes. Hermann, Paris, 1988.

[11] Halmos, P. R.: *Measure Theory*. Springer, 2e édition, 1974.

[12] Hausdorff, F.: *Grundzüge der Mengenlehre*. Leipzig Viet., Leipzig, 1914.

[13] Hewitt, E. et Hewitt, R. E.: *The Gibbs-Wilbraham phenomenon : an episode in Fourier analysis*. Arch. Hist. Exact Sci., 21(2) :129–160, 1979/80.

[14] Hörmander, L.: *The analysis of linear partial differential operators. I*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, réédition de la 2e édition, 2003. Distribution theory and Fourier analysis.

[15] Lebesgue, H.: *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Gauthier-Villars, Paris, 1904.

[16] Lieb, E.H. et M. Loss: *Analysis*, tome 14 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second édition, 2001.

[17] Natanson, I. P.: *Theory of functions of a real variable. Vol. 1*. Frederick Ungar Publishing Co., New York, 1964.

[18] Nedoma, J.: *Note on generalized random variables*. Dans *Transactions of the first Prague conference on information theory, statistical decision functions, random processes held at Liblice near Prague from November 28 to 30, 1956*, pages 139–141. Publishing House of the Czechoslovak Academy of Sciences, Prague, 1957.

[19] Rudin, W.: *Analyse réelle et complexe*. Science sup. Dunod, 3e édition, 2009.

[20] Stein, E. M. et Shakarchi, R.: *Real analysis*, tome 3 de *Princeton Lectures in Analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. Measure theory, integration, and Hilbert spaces.

[21] Taylor, M.E.: *Measure theory and integration*, tome 76 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.

[22] Willem, M.: *Analyse fonctionnelle élémentaire*. Cassini, Paris, 2003.

[23] Ziemer, W.: *Weakly differentiable functions*, tome 120 de *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1989. Sobolev spaces and functions of bounded variation.

Exercices

Feuille de TD # 0

Opérations sur les ensembles

Cadre, notations

1. Nous travaillons dans un ensemble fixé X.
2. Les parties (sous-ensembles) de X sont notées A, B, etc. « A est une partie de X » s'écrit $A \subset X$ ou $X \supset A$.
3. L'ensemble de toutes les parties de X est noté $\mathscr{P}(X)$.
4. $(A_i)_{i\in I}$ désigne une famille de parties de X, indexée par un ensemble *quelconque* (donc pas nécessairement fini ou dénombrable) d'*indices*.
5. Rappelons les opérations usuelles avec les ensembles.
   (i) (Union) $A \cup B := \{x \in X\,;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$.
   (ii) (Intersection) $A \cap B := \{x \in X\,;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$.
   (iii) (Différence) $A\backslash B := \{x \in X\,;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$.
   (iv) (Différence symétrique)
   $$A\triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = \{x \in X\,;\ [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\}.$$
   (v) (Complémentaire) $A^c = X\backslash A := \{x \in X\,;\ x \notin A\}$.
   (vi) (Produit cartésien) Si X, Y sont des ensembles, alors $X \times Y := \{(x, y)\,;\ x \in X \text{ et } y \in Y\}$.
6. Une suite $(A_n)_{n\geq k}$ de parties de X est *croissante* si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall\, n \geq k$. Elle est *décroissante* si $A_n \supset A_{n+1}$, $\forall\, n \geq k$.

Exercice # 1. (Échauffement)

a) Dessiner « avec des patates » les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$, A^c, $A\triangle B$.

b) Calculer $(A\triangle B)\triangle A$.

Exercice # 2. (Propriétés fondamentales) Montrer les propriétés suivantes.

a) $A \cap (\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I}(A \cap B_i)$ et $A \cup (\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I}(A \cup B_i)$.

b) $(\cup_{i\in I} A_i)^c = \cap_{i\in I} A_i^c$ et $(\cap_{i\in I} A_i)^c = \cup_{i\in I} A_i^c$.

c) $A\backslash(\cup_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I}(A\backslash B_i)$ et $(\cup_{i\in I} A_i)\backslash B = \cup_{i\in I}(A_i\backslash B)$.

d) $A\backslash(\cap_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I}(A\backslash B_i)$ et $(\cap_{i\in I} A_i)\backslash B = \cap_{i\in I}(A_i\backslash B)$.

e) $(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cup_{j\in J} B_j) = \cup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\cap_{j\in J} B_j) = \cap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$.

f) Déduire de la question précédente deux formules pour $(\cup_{i\in I} A_i) \times (\cap_{j\in J} B_j)$, respectivement deux formules pour $(\cap_{i\in I} A_i) \times (\cup_{j\in J} B_j)$.

Exercice # 3. Soient X un ensemble et A et B deux parties fixées de X.

a) Simplifier les conditions suivantes portant sur la partie C de X.

(i) $A \cup C \subset B \cup C$; (ii) $A \cap C \subset B \cap C$; (iii) $(A \cap C) \cup (B \cap C^c) = \varnothing$.

b) On définit $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ par $f(C) := (A \cap C, B \cap C)$. Déterminer, pour le couple (A, B), une condition nécessaire et suffisante pour que f soit (i) injective ; (ii) surjective.

Exercice # 4. (Fonction indicatrice) Soit X un ensemble. Pour une partie A de X, on définit sa *fonction indicatrice* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ par $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

a) Calculer $\chi_\varnothing$ et χ_X. Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbb{R}$, calculer $\chi_A^{-1}(Y)$.

b) Exprimer simplement en fonction de χ_A et χ_B les fonctions $\chi_{A^c}, \chi_{A\cap B}, \chi_{A\cup B}$ (dans le cas général et dans le cas particulier où $A \cap B = \varnothing$), $\chi_{A\triangle B}, \chi_{f^{-1}(A)}$ (avec $f : Y \to X$).

c) Rappelons la notation suivante. Si B et C sont des ensembles, alors

$B^C := \{f : C \to B\}$ (l'ensemble de fonctions de C vers B).

L'application $A \mapsto \chi_A$ est-elle une bijection de $\mathscr{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X$?

d) Montrer, à l'aide des fonctions caractéristiques, l'égalité $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

Exercice # 5. (Suites d'ensembles) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de X.

a) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante, alors $\cup_{n\geq n_0} A_n = \cup_{n\geq 0} A_n$, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$.

b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, alors $\cap_{n\geq n_0} A_n = \cap_{n\geq 0} A_n$, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$.

c) Soit $A := \cup_{n\geq 0} A_n$. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante, alors la suite $(\chi_{A_n})_{n\geq 0}$ est croissante et converge simplement vers χ_A.

d) Énoncer et prouver le résultat analogue au précédent pour une suite décroissante.

e) Soit $A := \cup_{n\geq 0} A_n$. Si les A_n sont d. d. d. (deux à deux disjoints), montrer que $\chi_A = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}$.

Exercice # 6. (Image directe, image réciproque) On se donne deux ensembles X et Y et une application $f : X \to Y$.

Si $A \subset X$, on définit $f(A) := \{f(x)\, ;\, x \in A\}$.

Si $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) := \{x \in X\, ;\, f(x) \in B\}$.

Montrer les propriétés suivantes de l'image réciproque $B \mapsto f^{-1}(B)$.

a) $f^{-1}(\cup_{i\in I} B_i) = \cup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

b) $f^{-1}(\cap_{i\in I} B_i) = \cap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

d) Si, de plus, g est une application de Y vers un ensemble Z, alors $(g\circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Pour l'image directe $A \mapsto f(A)$, les relations analogues ne sont pas vraies en général.

e) Montrer que $f(\cup_{i\in I} A_i) = \cup_{i\in I} f(A_i)$.

f) Montrer que $f(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} f(A_i)$ et donner un exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.

g) Montrer par des exemples qu'en général il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(A^c)$ et $(f(A))^c$.

Exercice # 7. (Injectivité) Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est injective.

b) $\forall\, A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$.

c) $\forall\, x \in X, f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.

Exercice # 8. (Surjectivité) Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est surjective.

b) $\forall\, B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$.

c) $\forall\, y \in Y, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice # 9. (Produit cartésien)

a) Soient $A, C \in \mathscr{P}(X)$ et $B, D \in \mathscr{P}(Y)$. Montrer l'implication

$$(A \times B) \cap (C \times D) \neq \varnothing \implies [A \cap C \neq \varnothing \text{ et } B \cap D \neq \varnothing].$$

b) Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, écrire $(X \times Y)\backslash(A \times B)$ comme une union finie de produits cartésiens d. d. d.

c) Si $A_i \subset X$ et $B_i \subset Y, \forall\, i \in [\![1, n]\!]$, montrer que $(X \times Y)\backslash(\cup_{i=1}^n A_i \times B_i)$ s'écrit comme une union finie de produits cartésiens.

Exercice # 10. (Coupes) Si $E \subset X \times Y$, soient

$$\forall\, x \in X,\ E_x := \{y \in Y\,;\ (x, y) \in E\} \text{ et } \forall\, y \in Y,\ E^y := \{x \in X\,;\ (x, y) \in E\}.$$

a) Si $X = Y = \mathbb{R}$, « dessiner » E_x et E^y pour une « patate ».

b) Si $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$, trouver E_x et E^y pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $(\cup_{i\in I} E_i)_x = \cup_{i\in I}(E_i)_x, \forall\, x \in X$ et $(\cup_{i\in I} E_i)^y = \cup_{i\in I}(E_i)^y, \forall\, y \in Y$.

Exercice # 11. (Union d. d. d.) La notation $\sqcup_{i\in I} A_i$ est utilisée pour la réunion d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles deux à deux disjoints (d. d. d.).

a) Si $A_0, A_1, \ldots,$ sont des parties de X, soient $B_0 := A_0$ et, pour $n \geq 1$, $B_n := A_n\backslash(\cup_{i=0}^{n-1} A_i)$. Montrer que $\cup_i A_i = \sqcup_i B_i$.

b) Montrer que $(\sqcup_{i\in I} A_i) \times B = \sqcup_{i\in I} A_i \times B$.

Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
UE Mesure et intégration & Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2023–2024

Feuille de TD # 1

sup, inf, lim sup, lim inf, dénombrement

Exercice # 1. Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que :

a) $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \to M$. Trouver une caractérisation analogue de $\inf A$.

b) Tout A admet $\sup A \in]-\infty, \infty]$ et $\inf A \in [-\infty, \infty[$.

c) $\sup A$ et $\inf A$ sont uniques.

d) $\sup(-tA) = -t \inf A, \forall\, t \in]0, \infty[$. Donner les formules de $\sup(tA)$, $\inf(tA)$, $\inf(-tA)$.

e) $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$.

f) Si $A \subset B$, alors $\inf B \le \inf A \le \sup A \le \sup B$.

g) Si $(x_n)_{n\ge n_0} \subset \mathbb{R}$ est une suite croissante, alors $\lim_n x_n = \sup\limits_{n\ge n_0} x_n := \sup\{x_n\,;\, n \ge n_0\}$.

Trouver l'énoncé analogue pour une suite décroissante.

h) Si $\sup A > x \in \overline{\mathbb{R}}$, alors il existe un $y \in A$ tel que $y > x$.

i) Montrer que $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$. Y a-t-il des formules pour $\inf(A \cup B)$, $\sup(A \cap B)$ et $\inf(A \cap B)$?

Exercice # 2. Que devient ce qui précède si nous considérons des parties non vides A, B de $\overline{\mathbb{R}}$?

Exercice # 3. Trouver $B \subset A \subset \mathbb{R}$ tels que $\inf A = -\infty$, $\inf B = 0$, $\sup B = 1$ et $\sup A = 2$.

Exercice # 4. Trouver $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup A$ et $\min A$ existent dans $\mathbb{R}$, mais $\max A$ n'existe pas.

Exercice # 5. Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\sup A = \inf B$.

a) Montrer que pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$ on a $x \le y$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $y - x < \varepsilon$.

b) Inversement, on suppose que pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$ on a $x \le y$. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $y - x < \varepsilon$, alors $\sup A = \inf B$.

Exercice # 6. Déterminer les bornes sup et inf des ensembles ci-dessous :

a) $A_1 := \left\{\cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

b) $A_2 := \left\{\dfrac{12n + 10^{-n}}{3n+2}\,;\, n \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $A_3 := \left\{\left(1 + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right)\ln n\,;\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice # 7. Calculer

$$\sup_{x\ge 0,\, t\in\mathbb{R}} \frac{\cos(xt + \pi/4)}{1+x^2}, \quad \sup_{x,\, t\in\mathbb{R}} \frac{e^{-x/(1+t^2)}}{1+x+x^2}.$$

Exercice # 8. Trouver tous les ensembles $A \subset \mathbb{R}$ tels que

$$\sup(tA) = t \sup A, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 9. Soient $a_{n,k} \in \mathbb{R}$, $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$. A-t-on toujours

$$\sup_n \sup_k a_{n,k} = \sup_k \sup_n a_{n,k}?$$

Exercice # 10. Nous considérons une suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

a) Si $\liminf\limits_n x_n \geq \limsup\limits_n x_n$, alors $x_n \to \limsup_n x_n = \liminf_n x_n$.

b) Si $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n \geq n_0$, alors $a \leq \liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n \leq b$.

c) Si $x_n \geq a$, $\forall\, n \geq n_0$ et $\limsup_n x_n \leq a$, alors $x_n \to a$.

d) Donner des exemples de suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ avec $\limsup_n (x_n + y_n) \neq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$.

Exercice # 11. a) Montrer que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq n_0 \implies \limsup\limits_n x_n \leq \limsup\limits_n y_n$.

b) Quelles sont les hypothèses implicites de la question précédente ?

Exercice # 12. Trouver une suite réelle $(a_n)_n$ telle que $\sup_n a_n = 4$, $\limsup_n a_n = 2$, $\liminf_n a_n = 1$ et $\inf_n a_n = 0$.

Exercice # 13. Calculer $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$ pour les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ respectivement par les formules :

a) $x_n := 1/(n+1)$.

b) $x_n := (n+1)^{(-1)^n}$.

c) $x_n := \left(2 + \cos\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right) \dfrac{n}{2n+1}$.

d) $x_n := \dfrac{11n + 2\cos(n\pi)}{\sqrt{4n^2 + n - 1}}$.

Définitions. Soit $(A_n)_{n \geq n_0}$ une suite de parties d'un ensemble X. Les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ sont définis respectivement par les formules

$$\limsup_n A_n := \cap_{n \geq n_0} \cup_{k \geq n} A_k, \ \liminf_n A_n := \cup_{n \geq n_0} \cap_{k \geq n} A_k.$$

Exercice # 14. a) Montrer que $x \in \limsup_n A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité d'ensembles A_n.

b) Montrer que $x \in \liminf_n A_n$ si et seulement si il existe un n_1 (qui peut dépendre de $x \in X$) tel que $x \in A_n$, $\forall\, n \geq n_1$.

c) Pour tout $x \in X$, montrer les égalités

$$\chi_{\limsup\limits_n A_n}(x) = \limsup_n \chi_{A_n}(x), \ \chi_{\liminf\limits_n A_n}(x) = \liminf_n \chi_{A_n}(x).$$

d) Soit $(A_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante de parties de X. Montrer que

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \cup_{n \geq n_1} A_n, \ \forall\, n_1 \geq n_0.$$

Quel est l'analogue de cette formule pour une suite décroissante ?

e) Montrer que

$$\limsup_n A_n = \left(\limsup_n A_{2n}\right) \cup \left(\limsup_n A_{2n+1}\right),$$
$$\liminf_n A_n = \left(\liminf_n A_{2n}\right) \cap \left(\liminf_n A_{2n+1}\right).$$

Exercice # 15. Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites suivantes d'ensembles :

a) A_1 et A_2 donnés, $A_n = A_{n-2}$, $\forall\, n \geq 3$.

b) $A_{2n} := [-1, 2 + n^{-1}[$ et $A_{2n+1} :=] - 2 - n^{-1}, 1]$, $\forall\, n \geq 1$.

c) $A_n :=] - \infty, a_n]$ avec $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ suite monotone.

Exercice # 16. Soit $X := [0, 1[$. Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$n = 2^m + p \text{ avec } m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \leq p < 2^m. \tag{1}$$

Avec m et p déterminés (en fonction de n) par la formule (1), nous posons

$$A_n := \left[\frac{p}{2^m}, \frac{p+1}{2^m}\right[\subset X,\ \forall\, n \geq 1.$$

Trouver $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.

Exercice # 17. Comparer $\liminf_n (A_n \cup B_n)$ et $(\liminf_n A_n) \cup (\liminf_n B_n)$. Donner un exemple de suites telles que

$$\liminf_n (A_n \cup B_n) \neq (\liminf_n A_n) \cup (\liminf_n B_n).$$

Exercice # 18. Montrer que $(\limsup_n A_n) \backslash (\liminf_n A_n) \subset \limsup_n (A_n \triangle A_{n+1})$.

Rappels de cours. Dans les trois exercices suivants, on pourra utiliser sans preuve les faits suivants :

a) L'intervalle $[0, 1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas a. p. d.

b) Si $A \subset \mathbb{N}$ est infini, alors A est dénombrable.

c) S'il existe une bijection $\Phi : A \to B$, alors :

   (i) Soit A et B sont tous les deux finis ;

   (ii) Soit A et B sont tous les deux dénombrables ;

   (iii) Soit aucun des deux ensembles n'est a. p. d.

Exercice # 19. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.

b) L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.

c) L'ensemble $\mathbb{R}$ est dénombrable.

d) L'ensemble $\mathbb{C}$ est dénombrable.

e) L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.

f) L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{A\, ;\ A \subset \mathbb{N}\}$ est dénombrable.

Exercice # 20. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_n$ n nombres premiers distincts. Montrer, à l'aide de l'application

$$\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N},\ \mathbb{N}^n \ni (k_1, \ldots, k_n) \mapsto \varphi(k_1, \ldots, k_n) := p_1^{n_1} \cdots p_n^{k_n} \in \mathbb{N},$$

que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.

b) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini d'ensembles dénombrables ?

c) Montrer que $\mathscr{P}_f(\mathbb{N}) := \{A\,;\ A \subset \mathbb{N},\ A \text{ est fini}\}$ est dénombrable.

Exercice # 21. Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant*.

a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.

b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

c) Montrer que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice # 22. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Soit $B = \overline{A} \setminus A$ (avec $\overline{A}$ l'adhérence de A). Existe-t-il un A tel que :

a) B ait exactement n éléments, pour un $n \in \mathbb{N}$ donné ?

b) B soit dénombrable ?

c) B ne soit pas a. p. d. ?

Exercice # 23. Montrer qu'il existe un nombre réel qui ne peut pas être décrit par une définition mathématique.

Exercice # 24. Nous admettons le résultat suivant, qui sera démontré en topologie : tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ s'écrit $U = \bigsqcup_{i \in I} J_i$, avec les J_i intervalles ouverts non vides (et d. d. d). Montrer que I est a. p. d. Donc : *tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion a. p. d. d'intervalles ouverts d. d. d.*

Exercice # 25. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(m,n) := \dfrac{(m+n)(m+n+1)}{2} + n$, $\forall\, m, n \in N$. Montrer que f est bijective.

Feuille de TD # 2

Tribus, fonctions mesurables, mesures

Exercice # 1. a) $\mathscr{P}(X)$ est une tribu.

b) $\mathscr{T} := \{\varnothing, X\}$ est une tribu.

Exercice # 2. a) L'ensemble $\mathscr{C}_1$ des unions finies d'intervalles de $\mathbb{R}$ est un clan. De même si on remplace $\mathbb{R}$ par un intervalle I et nous considérons les intervalles contenus dans I.

b) Un *pavé de* $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de la forme $P = I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_n$, avec chaque I_j intervalle de $\mathbb{R}$. L'ensemble $\mathscr{C}_n$ des unions finies de pavés de $\mathbb{R}^n$ est un clan.

c) Tout élément de $\mathscr{C}_n$ est une union finie d. d. d. de pavés de $\mathbb{R}^n$.

Exercice # 3. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si X est dénombrable, alors toute tribu sur X est a. p. d.

b) Une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une tribu si elle vérifie :

(i) $\varnothing \in \mathscr{T}$.

(ii) $A \in \mathscr{T} \implies A^c \in \mathscr{T}$.

(iii) $[A_n \in \mathscr{T}, \forall n] \implies \cap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

Exercice # 4. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas nécessairement un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} := \{A \subset \mathbb{R} ; \ A \text{ a. p. d. ou } A^c \text{ a. p. d.}\}.$$

a) Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.

b) Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

c) Conclure.

Exercice # 5. Si $X := \{1, 2, 3\}$ et $\mathscr{A} := \{\{1\}\}$, alors :

a) le clan (et la tribu) engendré par $\mathscr{A}$ est $\{\varnothing, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$;

b) la classe monotone engendrée par $\mathscr{A}$ est $\mathscr{A}$.

L'item b) contredit-il le théorème de la classe monotone ?

Exercice # 6. Soient $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\} ; \ n \in \mathbb{N}\}$.

a) Montrer que $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

b) Montrer que $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \{A \subset \mathbb{N} ; \ A \text{ fini ou } A^c \text{ fini}\}$.

c) En déduire que, en général, $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \neq \mathscr{C}(\mathscr{A})$.

d) En déduire que si $\mathscr{C}$ est un clan et $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{C}$, alors en général $\cup_{n\geq 0} A_n \notin \mathscr{C}$ et $\cap_{n\geq 0} A_n \notin \mathscr{C}$.

e) Montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$.

Exercice # 7. Déterminer les tribus engendrées dans X par la famille $\mathscr{A}$, où :

a) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\mathbb{Z}\}$.

b) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$.

c) $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \ldots\}$.

Exercice # 8. a) Soit $\mathscr{C}$ un clan sur X. Soit $Y \subset X$. Alors $\mathscr{C}_Y := \{A \cap Y\,;\, A \in \mathscr{C}\}$ est un clan sur Y.

De même pour une tribu $\mathscr{T}$.

$\mathscr{C}_Y$ (respectivement $\mathscr{T}_Y$) est le *clan induit* par $\mathscr{C}$ sur Y (respectivement la *tribu induite* par $\mathscr{T}$ sur Y).

b) Si $Y \in \mathscr{C}$, alors $\mathscr{C}_Y = \{A\,;\, A \in \mathscr{C},\ A \subset Y\}$.

Exercice # 9. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $Y \subset X$, muni de la métrique induite par X. Montrer que $\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y\,;\, B \in \mathscr{B}_X\}$.

De manière équivalente, $\mathscr{B}_Y$ coïncide avec la tribu induite par $\mathscr{B}_X$ sur Y (voir l'exercice précédent).

Exercice # 10. Montrer que si $\mathscr{C}$ est un clan et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{C}$, alors $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{C}$. De même si on remplace clan par tribu.

Exercice # 11. a) Toute tribu est un clan.

b) Toute tribu est une classe monotone.

c) Si X est fini, alors tout clan est une tribu.

Exercice # 12. Montrer que $A_n \nearrow A$ si et seulement si : la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ est croissante et converge simplement vers χ_A.

De même, $A_n \searrow A$ si et seulement si : la suite de fonctions $(\chi_{A_n})_n$ est décroissante et converge simplement vers χ_A.

Exercice # 13. Si $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{P}(X)$ telle que chaque $\mathscr{A}_i$ soit un clan (ou tribu, ou classe monotone), alors $\cap_{i\in I}\mathscr{A}_i$ est un clan (ou tribu, ou classe monotone).

Exercice # 14. a) Si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\mathscr{C}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{C}(\mathscr{B})$, $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{B})$ et $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

b) On a $\mathscr{C}(\mathscr{C}(\mathscr{A})) = \mathscr{C}(\mathscr{A})$. Propriété analogue pour la classe monotone et la tribu engendrées.

Exercice # 15. Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Si $A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$, montrer qu'il existe une partie a. p. d. $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ telle que $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

Indication : considérer $\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})\,;\, \exists\, \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ a. p. d. tel que $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B})\}$.

Exercice # 16. a) Montrer que l'union de deux tribus n'est pas nécessairement une tribu.

b) Montrer que l'union d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu.

c) Ce dernier résultat ne passe pas à une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{T}_n$ la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathscr{P}(\{0, \ldots, n\})$. Montrer que $(\mathscr{T}_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$, mais que $\cup_{n\geq 0}\mathscr{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice # 17. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Un ouvert ou un fermé est un borélien.

b) Un borélien est un ouvert ou un fermé.

c) Un intervalle est dans $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Exercice # 18. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) L'ensemble $[2, 3[\cap \mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}\,;\, \cos x = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

c) Si $B \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $A \subset B$, alors A est borélien.

Exercice # 19. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est continue en $x \in X \iff \forall\, \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$[y, z \in V] \implies |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

b) En déduire que $\{x \in X\,;\, f \text{ continue en } x\}$ est un borélien.

Exercice # 20. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{x \in X\,;\, (f_n(x))_n \text{ converge}\}$ est un borélien.

Exercice # 21. Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme entre espaces métriques. Si $A \subset X$, alors $A \in \mathscr{B}_X$ si et seulement si $\Phi(A) \in \mathscr{B}_Y$.

Exercice # 22. a) Soient $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$. Montrer que $A \times B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

b) Plus généralement, si (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques et si nous munissons $X \times Y$ d'une métrique produit, alors $\mathscr{B}_X \times \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X \times Y}$.

Exercice # 23. Dans cet exercice, nous considérons un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.

b) Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est étagée.

c) Si $f : X \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, alors f est mesurable.

d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.

e) Si $A \subset X$, alors $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.

f) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, est borélienne.

g) La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable $\iff$ $|f|$ est mesurable.

Exercice # 24. Décrire les fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ suivants.
a) X est muni de $\mathscr{T} = \{\varnothing, X\}$.
b) X est muni de $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

Exercice # 25. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction croissante.

a) Montrer que f est borélienne.

b) Montrer que l'ensemble des points où f n'est pas continue est au plus dénombrable.

c) Plus généralement, si $f : I \to \mathbb{R}$ (avec $I \subset \mathbb{R}$ intervalle) est continue en dehors d'un ensemble au plus dénombrable, alors f est borélienne.

Exercice # 26. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' est borélienne.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) f est dérivable en x et $f'(x) = \ell$.

(ii) Nous avons la double égalité :

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{m\to\infty} \inf\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ ;\ h\in\mathbb{Q}^*,\ |h|<\frac{1}{m}\right\}\\ &= \lim_{m\to\infty} \sup\left\{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\ ;\ h\in\mathbb{Q}^*,\ |h|<\frac{1}{m}\right\}\ .\end{aligned}$$

c) En déduire que, si f est continue, alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} f'(x), & \text{si } f \text{ est dérivable en } x\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}$$

est borélienne.

d) Vrai ou faux ? Si $g = 0$, alors f est constante.

Dans les exercices suivants, $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ est une tribu. La mesurabilité des fonctions considérées s'entend par rapport à $\mathscr{T}$.

Exercice # 27. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } f(x)\in\mathbb{Q}\\ 0, & \text{sinon}\end{cases}.$$

Montrer que g est mesurable.

Exercice # 28. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. Montrer que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, $\forall\, B \subset \mathbb{R}$.

Exercice # 29. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonctions étagées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f + g$ et λf sont étagées.

Exercice # 30. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. On définit, pour tout $0 < M < \infty$, la fonction f_M par

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| < M\\ M, & \text{si } f(x) \geq M\\ -M, & \text{si } f(x)\leq -M\end{cases}.$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si f_M est mesurable pour tout $M > 0$.

Exercice # 31. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

a) Rappeler pourquoi $\liminf_n f_n$ et $\limsup_n f_n$ sont mesurables.

b) Montrer que $B := \{x \in X\ ;\ (f_n(x))_n \text{ est bornée}\}$ est mesurable.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $g : X \to [0,\infty]$ par $g(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}\ ;\ f_n(x) \geq a\}$, avec la convention $\inf\varnothing = \infty$. Montrer que g est mesurable.

Exercice # 32. Soit (X, d) un espace métrique.

a) Soient $A \in \mathscr{B}_X$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est borélienne.
En particulier, toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est borélienne.

b) Plus généralement, si f est continue en dehors d'une partie finie de X, alors f est borélienne.

c) Encore plus généralement. Soient $A_1, A_2, \dots,$ boréliens d. d. d. tels que $X = \sqcup_k A_k$. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est borélienne.

d) De même si, dans le point précédent, on remplace « f_k continue » par « f_k borélienne » (voir aussi le point f)).

e) De même pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

f) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soient $A_1, A_2, \dots,$ mesurables d. d. d. tels que $X = \sqcup_k A_k$. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est mesurable.

g) Montrer que les items a)–e) sont des cas particuliers de l'item f).

Exercice # 33. Soit $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(X)$ un clan tel que $\emptyset \in \mathscr{C}$. Si $\mu : \mathscr{C} \to [0, \infty]$ est σ-additive, alors ou bien $\mu(\emptyset) = 0$ (et donc μ vérifie les axiomes d'une mesure), ou bien $\mu(\emptyset) = \infty$ (et dans ce cas $\mu(A) = \infty$, $\forall\, A \in \mathscr{C}$).

Exercice # 34. Soit X un ensemble. Montrer que l'application $\mu : \mathscr{P}(X) \to [0, \infty]$,

$$\mu(A) := \begin{cases} \text{card } A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}$$

est une mesure sur $\mathscr{P}(X)$. C'est la *mesure de comptage*.

Exercice # 35. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \in \mathscr{T}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.

b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{T}$ et $\mu(A_2) < \infty$, alors

$$\mu\left(\cap_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

c) Si $A, B \in \mathscr{T}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.

d) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\,;\ A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 2\}$.

e) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$ tel que $\{\mu(A)\,;\ A \in \mathscr{T}\} = \{0, 1, 3\}$.

f) La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est finie, respectivement σ-finie.

g) Soient $\mathscr{A}$ une famille qui engendre $\mathscr{T}$ et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{T}$. On suppose que pour tout A dans $\mathscr{A}$ on a $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Alors pour tout T dans $\mathscr{T}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$. Pour cette dernière question : y a-t-il des hypothèses raisonnables à ajouter ou enlever ?

Exercice # 36. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ telle que $\mu(A_n) \not\to \mu\left(\cap_{n\geq 0} A_n\right)$.

Exercice # 37. Soit μ une mesure *finie* sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{S} := \{A \in \mathscr{T}\,;\ \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = \mu(X)\}.$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une tribu.

Exercice # 38. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{T})$. Montrer qu'il existe une suite d. d. d. $(X_n)_n \subset \mathscr{T}$ telle que $\mu(X_n) < \infty$, $\forall\, n$ et $X = \sqcup_n X_n$.

Exercice # 39. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $(X_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{T}$ avec $\mu(X_n) < \infty$, $\forall\, n \geq 1$ et $X = \cup_n X_n$. Posons $\mu_n(A) := \mu(A \cap (X_1 \cup \ldots \cup X_n))$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. Alors :

a) μ_n est une mesure finie, $\forall\, n \geq 1$.

b) $\mu_n \nearrow \mu$.

Exercice # 40. (Formule de Poincaré)

a) Montrer que si $\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) < \infty$ alors

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} \mu(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}).$$

b) Que devient cette formule dans le cas particulier de la mesure de comptage ?

Exercice # 41. Soit $\mathscr{T}$ une tribu contenant les singletons. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{T})$. Soit $D := \{x \in X\,;\, \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est a. p. d.

a) Si μ est finie ?

b) Si μ est σ-finie ?

c) Si μ est quelconque ?

Exercice # 42. a) Soit μ une mesure borélienne de probabilité sur $[0, 1]$, avec la propriété suivante :

$$\mu(B) > 0 \implies \mu([0, 1]\backslash B) = 0,\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{[0,1]}.$$

(i) Construire une suite d'intervalles fermés $(I_j)_{j\geq 0} \subset [0, 1]$ avec les propriétés suivantes : $I_0 = [0, 1]$, $I_{j+1} \subset I_j$, $\forall\, j \geq 0$, I_j est de longueur 2^{-j}, $\forall\, j \geq 0$, et $\mu(I_j) = 1$, $\forall\, j \geq 0$.

(ii) En déduire qu'il existe un point $a \in [0, 1]$ tel que $\mu = \delta_a$.

b) Soit ν une mesure borélienne σ-finie sur $\mathbb{R}$ avec la propriété suivante :

$$\nu(B) > 0 \implies \nu(\mathbb{R}\backslash B) = 0,\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \in [0, \infty[$ tels que $\nu = b\, \delta_a$.

Exercice # 43. (Mesures discrètes) Soit $\mathscr{T}$ une tribu contenant les singletons. La mesure μ sur $(X, \mathscr{T})$ est *diffuse* (ou *continue*) si, pour tout $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$. μ est *discrète* s'il existe un ensemble D a. p. d. tel que $\mu(D^c) = 0$.

a) Montrer que μ est diffuse si et seulement si toute partie a. p. d. A de X est $\mu-$négligeable.

b) Montrer que μ est discrète si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de points de X et une suite $(c_n)_{n\geq 1} \subset [0, \infty]$ telles que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$.

c) Supposons maintenant μ σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure diffuse et μ_d est une mesure discrète.

Exercice # 44. (Mesure image) Soient $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable. Soit μ une mesure sur $\mathscr{T}$. Nous définissons $f_*\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \to [0, \infty]$ par $f_*\mu(A) := \mu(f^{-1}(A))$, $\forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. Rappelons que $f_*\mu$ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$. C'est la *mesure image* de μ par f.

a) Déterminer $f_*\delta_a$, avec $a \in X$.

b) Soit μ une probabilité sur X (donc $\mu(X) = 1$). Nous prenons $n = 1$. Si $B \in \mathscr{T}$, déterminer $(\chi_B)_*\mu$.

Dans les quatre exercices suivants, λ est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}$. (Avec les notations du cours, $\lambda = \nu_1$.)

Exercice # 45. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Montrer que $\lambda(U) = 0$ si et seulement si $U = \emptyset$.

Exercice # 46. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) > 0$, alors il existe un ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}$ tel que $U \subset A$.

   Et réciproquement ?

b) Si $A \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $\lambda(A) < \infty$, alors A est borné.

Exercice # 47. Soit $B \in \mathscr{B}_R$ tel que $\lambda(B) > 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un borélien $A \subset B$ tel que $0 < \lambda(A) < \varepsilon$. Indication : recouvrir B avec des intervalles disjoints de taille $< \varepsilon$.

Exercice # 48. Le but de cet exercice est de donner une définition équivalente de λ comme la seule mesure borélienne normée et invariante par translations.

a) Montrer que, si $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, alors $x + A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

b) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Soit $\mu : \mathscr{B}_{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ définie par $\mu(A) := \lambda(x + A)$ pour $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

c) En déduire que $\lambda(x + A) = \lambda(A)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$, c'est-à-dire : *la mesure de Lebesgue est invariante par translations.*

d) Inversement, soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations et telle que $\mu([0, 1[) = 1$. Calculer $\mu([0, 1/n[)$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la mesure d'un intervalle arbitraire. Montrer que $\mu = \lambda$.

e) Prouver ou réfuter. Une mesure borélienne sur $\mathbb{R}$, invariante par translations, est un multiple de la mesure de Lebesgue.

Exercice # 49. Cet exercice fait suite au précédent. Nous nous proposons de montrer que, si μ est une mesure borélienne et invariante par translations sur $\mathbb{R}^n$ telle que $\mu([0, 1[^n) = 1$, alors $\mu = \nu_n$.

a) Montrer que $\mu([0, 1/k[^n) = (1/k)^n$, $\forall\, k \in \mathbb{N}^*$. Indication : recouvrir $[0, 1[^n$ avec des cubes d. d. d. de taille $1/k$.

b) Soit K_j comme dans le lemme 9.6 du cours. Montrer que $\mu(K_j) = \nu_n(K_j)$.

c) En déduire que $\mu(K) = \nu_n(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.

d) Conclure.

Exercice # 50. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une partie d'un ensemble négligeable est négligeable.

b) Une union a. p. d. d'ensembles négligeables est négligeable.

c) Une union d'ensembles négligeables est négligeable.

Exercice # 51. Pour des fonctions f, g définies sur X à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou $\mathbb{R}^n$, la relation $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ μ-p. p. est une équivalence.

Exercice # 52. Prouver ou réfuter. Une partie d'un ensemble Lebesgue mesurable de $\mathbb{R}^n$ est Lebesgue mesurable.

Exercice # 53. Soit $\lambda = \lambda_1$ la mesure de Lebesgue (complète) dans $\mathbb{R}$.

a) Soient f et g deux applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $f = g\ \lambda-$p. p. $\iff$ $f = g$.

De même pour $f, g : A \to \mathbb{R}$, avec $A \subset \mathbb{R}^n$ tel que $A \subset \overline{\mathring{A}}$.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nous considérons les deux propriétés suivantes.

(P1) f est continue λ-p. p.

(P2) Il existe une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $f = g$ λ-p. p.

Montrer que (P1) n'implique pas (P2), et que (P2) n'implique pas (P1).

c) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe un ouvert U dense dans $\mathbb{R}$ tel que $\lambda(U) \leq \varepsilon$.

Exercice # 54. a) Nous avons $\overline{\overline{\mu}} = \overline{\mu}$ et $\overline{\overline{\mathscr{T}}} = \overline{\mathscr{T}}$.

b) $\overline{\mathscr{T}}$ est complète par rapport à $\overline{\mu}$.

c) Une partie de X est μ-négligeable si et seulement sielle est $\overline{\mu}$-négligeable.

Exercice # 55. Soit λ_n la mesure (complète) de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_n$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que

a) λ_n est σ-finie.

b) λ_n est l'unique mesure sur $\mathscr{L}_n$ telle que $\lambda_n(P) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ pour tout pavé $P = \prod_{j=1}^n]a_j, b_j[$ de $\mathbb{R}^n$.

Feuille de TD # 3

Intégrale. Convergence monotone et dominée

Exercice # 1. Écrire de manière plus simple la quantité $\int f\, d\mu$ lorsque :

a) μ est une mesure de Dirac.

b) μ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$.

Exercice # 2. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $f = \chi_A$ avec $A \in \mathscr{T}$, alors $\int f\, d\mu = \mu(A)$.

b) Si $f = a\,\chi_A + b\,\chi_B$, avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $A, B \in \mathscr{T}$, alors $\int f\, d\mu = a\,\mu(A) + b\,\mu(B)$.

c) Si $f : X \to [0, \infty]$ est intégrable, alors $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$.

d) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$, alors f est intégrable.

e) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\int f = 0$, alors $f = 0$.

f) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $\int f = 0$, alors $f = 0$ μ-p. p.

g) Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable et satisfait $f = 0$ μ-p. p., alors $\int f = 0$.

h) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

Exercice # 3. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f : X \to [0, \infty]$ est mesurable, alors

$$\int f\, d\mu = \sup\left\{(1-\varepsilon)\int u\, d\mu\ ;\ u \text{ étagée}, 0 \le u \le f, 0 < \varepsilon < 1\right\}.$$

Exercice # 4. Dans cet exercice, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

a) Soit $I := \,]0, 1[$. Soit $0 < \alpha < \infty$. À quelle condition la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ est-elle intégrable sur I ?

b) Même question avec $I := [1, \infty[$ et $I := \,]0, \infty[$.

Exercice # 5. a) On considère la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[0, 1]$ et calculer son intégrale.

b) Mêmes questions pour la fonction $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Exercice # 6. Étudier l'existence et la finitude de :

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx$, avec $a = 1, 3/2$, ou 2, au sens des intégrales généralisées ou de Lebesgue.

b) La somme de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^a}$, avec $a = 1$ ou 2.

c) L'intégrale $\int_{\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^a}\, d\mu(n)$, avec $a = 1$ ou 2, et μ la mesure de comptage.

Exercice # 7. (Théorème de convergence décroissante) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite *décroissante* de fonctions mesurables *positives* sur X, avec f_0 intégrable.

a) Montrer (*via* le théorème de convergence monotone) que $\lim_n \int f_n\, d\mu = \int \lim_n f_n\, d\mu$.

b) Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse d'intégrabilité de f_0 est essentielle.

Exercice # 8. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $I_n := \int_{\mathbb{R}} (\cos \pi t)^{2n}\, dP(t)$.

a) Montrer que $I_n < \infty$, $\forall\, n$.

b) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 0}$ est décroissante.

c) Déterminer $\lim_n I_n$.

Exercice # 9. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et soit $f : X \to [0, \infty]$ une application mesurable.

a) Soient $A := \{x \in X \,;\, f(x) > 1\}$, $B := \{x \in X \,;\, f(x) = 1\}$ et $C := \{x \in X \,;\, f(x) < 1\}$. Déterminer $\lim_n \int_{A\cup B} f^n\, d\mu$.

b) Déterminer $\lim_n \int_X f^n\, d\mu$. On pourra commencer par le cas où $\int_X f\, d\mu < \infty$.

Exercice # 10. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$. Pour $x \geq 0$, soit $F(x) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt}\, dP(t)$.

a) Montrer que F est décroissante.

b) Déterminer $\lim_n F(n)$.

c) En déduire la valeur de $\lim_{x\to\infty} F(x)$.

Exercice # 11. a) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $(f_n)_{n\geq n_0}$ est une suite de fonctions boréliennes positives sur I, alors

$$\sum_{n\geq n_0} \int_I f_n\, d\nu_1 = \int_I \left(\sum_{n\geq n_0} f_n \right) d\nu_1.$$

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

Exercice # 12. Déterminer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_n \int_0^1 \left(x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx$.

Exercice # 13. Calculer $\lim_n \int_1^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3}\, dx$.

Exercice # 14. Dans cet exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ $(= \nu_1)$. Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur I et déterminer $\lim_n \int_I f_n\, d\lambda$.

a) $I := [0, 1]$, $f_n(x) := \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha}$, où $1 < \alpha < 2$.

b) $I := [A, \infty[$ (avec $A > 0$) et $f_n(x) := \dfrac{n^2 x \exp(-n^2 x^2)}{1 + x^2}$.

c) $I := [0, 1]$ et $f_n(x) := \sqrt{n}\, \chi_{[1/n, 2/n[}(x)$.

Exercice # 15. Soit f une fonction Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty f(x) \frac{x}{x+n}\, dx.$$

Exercice # 16. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{(\sin x)^n}{x^2}\, dx.$$

Exercice # 17. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit f une fonction mesurable positive sur X. Montrer que

$$\lim_n n \int_X \ln\left(1 + \frac{1}{n} f\right) d\mu = \int_X f\, d\mu.$$

Exercice # 18. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty \exp(-n \sin^2 x) f(x)\, dx.$$

Exercice # 19. Rappelons que, si $y \geq 0$, alors la suite $\left(\left(1 - \dfrac{y}{n}\right)^n\right)_{n \geq y}$ est croissante, de limite e^{-y}.

Soit $f_n(x) := n(1-x)^n \sin^2(nx) \chi_{[0,1]}(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Déterminer la limite simple (notée f) de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$.

b) Calculer, en utilisant le rappel et le théorème de convergence monotone, $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx$.

c) Montrer que $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\, dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x)\, dx$.

Exercice # 20. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable.

a) Pour $n \geq 0$, soit $A_n := \{x \in X\,;\, |f(x)| \geq n\}$. Déterminer $\lim_n \int_{A_n} f\, d\mu$.

b) Soit $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A) < \infty$. Déterminer $\lim_n \int_A |f|^{1/n}\, d\mu$.

c) Mêmes questions si $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$.

Exercice # 21. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$ telle que la fonction $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(a|t|)$ soit intégrable pour tout $a \in \mathbb{R}$.

a) Donner deux exemples de telles mesures « de nature différente ».

b) Montrer que $t \mapsto t^n$ est intégrable pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}$.

(i) Montrer que $t \mapsto \exp(zt)$ est intégrable.

(ii) Posons $F(z) := \int_{\mathbb{R}} \exp(zt)\, dP(t)$. Montrer que F admet un développement en série entière de la forme $F(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, où l'on explicitera les coefficients a_n.

Exercice # 22. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie. Soit $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable et, pour $n \geq 1$, soit $I_n := \displaystyle\int_X \frac{f^n}{1 + f^n}\, d\mu$. Calculer $\lim_n I_n$.

Exercice # 23. Rappelons que

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \nearrow e^x,\ \forall\, x \geq 0.$$

Nous considérons, pour tout $n \geq 2$, la fonction $f_n :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) := \frac{1}{x^{1/n}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n},\ \forall\, x > 0.$$

a) Démontrer que, pour $n \geq 2$ et $x \geq 1$, nous avons $f_n(x) \leq 4/x^2$.

b) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, f_n est Lebesgue intégrable sur $]0,\infty[$.

c) Calculer $\lim_n \int_0^\infty f_n(x)\,dx$.

Exercice # 24. Pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel x, soit $f_n(x) := e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

a) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est une série convergente pour tout $x > 0$, et calculer sa somme $f(x)$.

b) Comparer $\int_0^\infty \sum_{n\geq 1} f_n(x)\,dx$ et $\sum_{n\geq 1} \int_0^\infty f_n(x)\,dx$. Expliquer.

Exercice # 25. Nous munissons l'intervalle $[0,1]$ de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ ($= \nu_1$). Soit $(f_n)_{n\geq 2}$ la suite de fonctions définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x-2/n), & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Tracer le graphique de f_n.

b) Calculer et comparer $\liminf_n \int f_n\,d\lambda$, $\int \liminf_n f_n\,d\lambda$, $\limsup_n \int f_n\,d\lambda$ et $\int \limsup_n f_n\,d\lambda$.

c) Mêmes questions avec la suite de fonctions $(g_n)_{n\geq 1}$ définie par $g_{2p} := \chi_{[0,1/(2p)]}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}^*$, $g_{2p+1} := \chi_{[1/(2p+1),1]}$, $\forall\, p \in \mathbb{N}$.

Exercice # 26. a) Montrer que la fonction

$$f :]0,\infty[\to \mathbb{R},\ f(x) := \frac{\sin x}{e^x - 1},\ \forall\, x > 0,$$

est Lebesgue intégrable sur $]0,\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x > 0$, nous avons $f(x) = \sum_{n\geq 1} e^{-nx}\sin x$.

c) En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x-1}\,dx = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2+1}$.

Exercice # 27. Soient $(X,\mathscr{T},\mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0,\infty[$ une fonction mesurable.

a) Supposons μ finie. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $X_n := f^{-1}([n,n+1[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n\geq 0} n\,\mu(X_n) < \infty$.

b) Nous ne supposons plus μ finie. Pour $n \in \mathbb{Z}$, soit $F_n := f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n\,\mu(F_n) < \infty$.

Exercice # 28. Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to [0, \infty[$ une fonction mesurable. Posons

$$F_f(t) := \mu(f^{-1}(]t, \infty[)) = \mu([f > t]),\ \forall\, t \geq 0\,;$$

F_f est la *fonction de distribution* de f.

Pour traiter les questions suivantes, on pourra commencer par le cas où f est une fonction étagée.

a) Montrer que F_f est borélienne.

b) (Décomposition en tranches) Montrer que $\displaystyle\int_X f\, d\mu = \int_0^\infty F_f(t)\, dt$.

c) Plus généralement, soit $\Phi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ une fonction croissante de classe C^1 avec $\Phi(0) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_X \Phi(f)\, d\mu = \int_0^\infty \Phi'(t) F_f(t)\, dt$.

d) (Calcul de moments) Soient $1 \leq p < \infty$ et $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Montrer que

$$\int |f|^p = p \int_0^\infty t^{p-1}\, \mu([|f| > t])\, dt.$$

Exercice # 29. (L'exercice précédent, vue probabiliste) En théorie des probabilités, μ est une probabilité, et on travaille plutôt avec la *fonction de répartition* $G_f(t) := \mu([f \leq t])$, $\forall\, t \geq 0$. « Traduire » l'exercice précédent en fonction de G_f.

Exercice # 30. (Inégalité de Jensen) Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un *espace probabilisé*. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un *intervalle ouvert* et $\Phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction *convexe*.

Nous admettons dans la suite le fait suivant (qui caractérise la convexité de Φ). Pour tout $t \in I$, il existe une fonction affine Ψ (c'est-à-dire, une fonction de la forme $\Psi(s) = a\, s + b$, $\forall\, s \in \mathbb{R}$) telle que :

(i) $\Psi(s) \leq \Phi(s)$, $\forall\, s \in I$;

(ii) $\Psi(t) = \Phi(t)$.

Soit $f : X \to I$ une fonction intégrable.

a) Montrer que $\int f\, dP \in I$.

b) Si Ψ est affine, comparer les nombres $\int \Psi(f)\, dP$ et $\Psi\left(\int f\, dP\right)$.

c) En déduire l'*inégalité de Jensen* :

$$\int \Phi(f)\, dP \geq \Phi\left(\int f\, dP\right).$$

Exercice # 31. a) Écrire l'inégalité de Jensen dans les cas suivants :

(i) $I := \mathbb{R}$, $\Phi(t) := e^t$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

(ii) $I :=]0, \infty[$, $\Phi(t) := \ln t$, $\forall\, t \in]0, \infty[$.

(iii) $I := \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$, $\Phi(t) := |t|^p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

b) Obtenir, à partir de l'inégalité de Jensen appliquée à un espace probabilisé et à une fonction convexe convenables, le cas particulier suivant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$n \sum_{j=1}^n (a_j)^2 \geq \left(\sum_{j=1}^n a_j\right)^2,\ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 32. (Variables aléatoires indépendantes) Soient $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé et $f, g : X \to [0, \infty[$ des *variables aléatoires* (=fonctions mesurables). Nous supposons les variables aléatoires f et g *indépendantes*, au sens suivant :

$$P([f \in A, g \in B]) = P([f \in A]) \cdot P([g \in B]), \ \forall\, A, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}.$$

a) Soient $\Phi, \Psi : [0, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes. Montrer que $\Phi \circ f$ et $\Psi \circ g$ sont indépendantes.

b) Si f, g sont, de plus, étagées, montrer que $\int fg\, dP = \int f\, dP \cdot \int g\, dP$.

À partir de maintenant, f, g ne sont plus supposées étagées.

c) Montrer qu'il existe deux suites, $(f_n)_n$ et $(g_n)_n$, de fonctions étagées positives telles que f_n et g_m soient indépendantes, $\forall\, n, m$, $f_n \nearrow f$ et $g_n \nearrow g$.

(Indication : examiner le procédé d'approximation d'une fonction mesurable par des fonctions étagées et utiliser la question a)).

d) Montrer que $\int fg\, dP = \int f\, dP \cdot \int g\, dP$.

e) Si f, g sont intégrables, alors fg est intégrable. Contradiction ?

f) Pourquoi ne pas considérer des mesures plus générales que des probabilités ?

Exercice # 33. (Mesures à densité) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $g : X \to [0, \infty]$ une fonction mesurable.

a) Montrer que

$$\nu : \mathscr{T} \to [0, \infty],\ \nu(A) := \int_A g\, d\mu,\ \forall\, A \in \mathscr{T},$$

est une mesure (à *densité* g par rapport à μ).

b) Sous quelles hypothèses sur g cette mesure est-elle :

(i) Finie ?

(ii) σ-finie ?

c) Dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}})$, montrer que δ_0 n'est pas une mesure à densité par rapport à ν_1.

Exercice # 34. (Formule de transfert) Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to \mathbb{R}^n$ une fonction mesurable.

Rappelons que la *mesure image* $f_*\mu$ est la mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ définie par

$$f_*\mu(B) := \mu(f^{-1}(B)),\ \forall\, B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

a) Montrer que pour toute fonction borélienne $\Phi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty[$ nous avons la *formule de transfert*

$$\int_X \Phi \circ f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi\, df_*\mu.$$

On pourra commencer par Φ étagée.

b) Par souci de simplicité, nous étudions ce qui suit principalement pour $n = 1$. En théorie des probabilités :

1 μ est une probabilité sur X.

2 Si $f : X \to \mathbb{R}$ est une *variable aléatoire,* ce qui est connu n'est pas μ, mais la *loi de* f, c'est-à-dire la mesure image $f_*\mu$, notée P_f. (Pour ajouter à la confusion, f est notée X, et sa loi P_X, mais dans ce cours X est l'espace ambient des fonctions mesurables.)

3 L'intégrale d'une variable aléatoire f (si elle existe) est désignée comme l'*espérance de* f et notée $\mathbb{E}(f)$.

(i) Montrer que P_f est une probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R})$.

(ii) Écrire, sous réserve d'existence et à l'aide de P_f, $\mathbb{E}(f)$, $\mathbb{E}(f - \mathbb{E}(f))^2$, $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{E}(e^{\imath t f})$, qui, en langage probabiliste sont, respectivement, l'*espérance,* la *variance* et la *fonction caractéristique* de f.

(iii) Que deviennent ces formules si P_f est une probabilité à densité par rapport à ν_1 ?

c) Si $f = (f_1, \ldots, f_n) : X \to \mathbb{R}^n$ est un *vecteur aléatoire* (=fonction mesurable), exprimer, en fonction de la loi de f, la *fonction caractéristique* $\mathbb{R}^n \ni t \mapsto \mathbb{E}\left(e^{\imath \sum_{j=1}^n t_j f_j}\right)$.

Exercice # 35. (Suites croissantes de mesures)

a) Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $(a_{n,k})_{n\geq 0}$ une suite telle que

$$a_{n,k} \geq 0, \ \forall\, n, k \geq 0, \tag{H1}$$

$$(a_{n_k})_{k\geq 0} \text{ est croissante }, \ \forall\, n \geq 0. \tag{H2}$$

Soit $a_n := \lim_{k\to\infty} a_{n,k}$, $\forall\, n \geq 0$.
Montrer que $\lim_k \sum_{n\geq 0} a_{n,k} = \sum_{n\geq 0} a_n$.

b) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de mesures sur $\mathscr{T}$ telles que :

$$(\mu_k(A))_{k\geq 0} \text{ est croissante}, \ \forall\, A \in \mathscr{T}. \tag{H}$$

Pour $A \in \mathscr{T}$, soit $\mu(A) := \lim_k \mu_k(A)$.

(i) Montrer que μ est une mesure sur $\mathscr{T}$.

(ii) Montrer que pour toute fonction $\mathscr{T}$-mesurable $f : X \to [0, \infty]$, la suite $\left(\int f d\mu_k\right)_{k\geq 0}$ est croissante.
On pourra commencer par le cas où f est étagée.

(iii) Montrer que pour toute fonction $\mathscr{T}$-mesurable $f : X \to [0, \infty]$, on a

$$\lim_{k\to\infty} \int f\, d\mu_k = \int f\, d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où f est étagée.

Exercice # 36. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \begin{cases} x + n, & \text{si } x \leq -n \\ 0, & \text{si } x > -n \end{cases}$. Montrer que :

a) f_n a une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue μ.

b) $f_n \nearrow 0$.

c) $\int f_n d\mu \not\to \int 0\, d\mu$.

d) Quelle hypothèse de théorème de convergence monotone n'est pas satisfaite ?

Exercice # 37. En considérant, sur $\mathbb{R}$, les fonctions $f_n(x) := -(x + n)_-$, montrer que l'hypothèse $f_n \geq 0$ est essentielle pour avoir la conclusion du lemme de Fatou.

Exercice # 38. En considérant, dans $\mathbb{R}$, la suite $f_n := \chi_{[n,n+1[}$, montrer que l'hypothèse de domination est essentielle pour la validité du théorème de convergence dominée.

Exercice # 39. Nous munissons $[0,1]$ de la mesure de Lebesgue. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $m = m(n)$ l'unique entier tel que $m^2 \leq n < (m+1)^2$. Soient

$$A_n := \left[\frac{n-m^2}{2m+1}, \frac{n+1-m^2}{2m+1}\right], \; f_n := \sqrt{m}\,\chi_{A_n}.$$

Montrer que :

a) $\int |f_n| \to 0$.

b) Il n'existe pas g intégrable telle que $|f_n| \leq g$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) Pour tout $x \in [0,1]$, nous avons $f_n(x) \nrightarrow 0$.

En déduire qu'en général la conclusion de la réciproque du théorème de convergence dominée nécessite de passer à une sous-suite.

Feuille de TD # 4

Intégrales à paramètres

Exercice # 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue intégrable. Montrer que la *transformée de Fourier de* f, définie par

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath tx} f(x)\, dx,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

Exercice # 2. (Transformée de Laplace) Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Nous posons

$$\mathscr{L} f(x) := \int_0^\infty e^{-xt} f(t)\, dt,\ \forall\, x > 0\,;$$

c'est la *transformée de Laplace de* f.

a) Montrer que F est de classe C^∞ sur $]0, \infty[$ et calculer $\dfrac{d^k F}{dx^k}(x)$ pour tout $k \geq 1$ et $x > 0$.

b) Déduire de la question précédente la valeur de $\int_0^\infty t\, e^{-t}\, dt$.

c) Calculer $\int_0^\infty (t^2 + t + 1)\, e^{-t} dt$.

Exercice # 3. (Fonction zêta de Riemann) La *fonction zêta de Riemann* est donnée par la formule

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},\ \forall\, s > 1.$$

Montrer que $\zeta :]1, \infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^∞.

Exercice # 4. a) Retrouver la théorie des séries entières à partir de la théorie de l'intégration. Plus précisément, soit $(a_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombre réels (ou complexes). Soient

$$R := \sup\{r \geq 0\,;\ \lim_n a_n r^n = 0\}$$

et $I :=]-R, R[$. Posons $F(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$, $\forall\, x \in I$. Montrer que $F \in C^\infty(I)$ et que

$$F^{(k)}(x) = \sum_{n \geq k} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k},\ \forall\, x \in I.$$

b) Calculer $\sum_{n \geq 1} (-1)^n\, n\, x^{n-1}$, $|x| < 1$.

Exercice # 5. Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est finie si et seulement si $x > 0$.

b) Montrer que f est continue sur $]0, \infty[$.

c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim\limits_{x \searrow 0} x\, f(x)$.

Exercice # 6. Soit $f(x,t) := \dfrac{t-1}{\ln t}\, t^x$ pour $t \in]0,1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $F(x) := \int_0^1 f(x,t)\, dt$ est finie si et seulement si $x > -1$.

b) Montrer que F est dérivable sur $]-1, \infty[$ et calculer $F'(x)$.

c) Calculer $\lim_{x\to\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice # 7. a) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge. Notons K sa somme.

b) Soit $f(x) := \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{x^n}{n}$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,1[$ et calculer $f'(x)$.

c) Déterminer $f(x)$ et $\lim\limits_{x \searrow -1} f(x)$.

d) En déduire la valeur de K.

Exercice # 8. Pour $x \geq 0$, soient

$$F(x) := \left(\int_0^x \exp(-t^2)\, dt \right)^2 \quad \text{et} \quad G(x) := \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\, dt.$$

a) Montrer que F et G sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.

c) En déduire la valeur de $I := \int_0^\infty \exp(-t^2)\, dt$, ainsi que la valeur de $J := \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\, dt$.

Exercice # 9. Soit $I(\alpha) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\, dx$, $\alpha \geq 0$.

a) Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Donner la formule de $I'(\alpha)$ si $\alpha > 0$.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Décomposer la fraction $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

d) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

Exercice # 10. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\, dx$.

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer f'' et les limites à l'infini de f et f'.

c) En déduire une expression simple de f.

Exercice # 11. Soit P une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$.

a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)$ est P-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\, dP(t), \ \forall\, x \geq 0.$$

b) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Nous supposons que l'application $t \mapsto t^2$ est P-intégrable. Déterminer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-F(x)}{x^2}$. (On pourra établir et utiliser l'inégalité $1-\cos u \le u^2/2$.)

d) « Réciproquement », supposons $\liminf_{x\to 0} \dfrac{1-F(x)}{x^2} < \infty$. Montrer que l'application $t \mapsto t^2$ est P-intégrable. (On pourra utiliser le lemme de Fatou.)

Exercice # 12. Pour $x \in \mathbb{R}$, soient $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$ et $G(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\frac{dt}{1+t^2}$.

a) Montrer que F et G sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.

b) Montrer que

$$F(0) - F(x) + G(x) = C\,|x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{où } C := \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,dt.$$

c) (i) Montrer que G est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $G''(x) = F(x)$ pour tout réel x.

(ii) En utilisant la question b), en déduire que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.

(iii) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer que la fonction F est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel x.

d) Déduire de tout ceci la valeur de la constante C.

Exercice # 13. (Transformée de Fourier d'une gaussienne) Soit $a > 0$. Soit $g_a(x) := e^{-ax^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer la transformée de Fourier de g_a, donnée par $h_a(t) := \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath tx} g_a(x)\,dx$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Rappelons que $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$.

a) Montrer que g_a est Lebesgue intégrable et calculer $h_a(0)$.

b) Montrer que h_a est de classe C^1 et donner la formule de sa dérivée h_a'.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $h_a'(t) = (-t\,h_a(t))/(2a)$.

d) En déduire que $h_a(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\, e^{-t^2/(4a)}$.

Exercice # 14. Soit h_a la fonction de l'exercice précédent.
Soit $f(t) := \int_0^\infty e^{-a\,t}\, h_a(t)\,da$. Montrer que f est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

Exercice # 15. Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)\,dt$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.

d) En déduire la valeur de $F(x)$ pour x réel.

Exercice # 16. Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(t,x) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(t,x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t > 0$, soit $F(t) := \int_0^\infty f(t,x)\,dx$.

b) Montrer que F est continue sur $]0,\infty[$.

c) Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$.

d) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

Exercice # 17. Pour $y \geq 0$, soit $F(y) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2}\, dx$.

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F(0)$ et déterminer $\displaystyle\lim_{y\to\infty} F(y)$.

c) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que F est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I := \int_0^\infty \exp(-x^2)\, dx$.

e) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geq 0$.

f) Pour finir, retrouver (une n^{e} fois !) la valeur de I.

Exercice # 18. (Fonction Gamma d'Euler)

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. La *fonction Gamma d'Euler* est définie par

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\, dt,\ \forall\, x > 0.$$

b) Montrer que Γ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que Γ est strictement convexe.

Exercice # 19. Soit $F(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan(tx)}{x\,(1+x^2)}\, dx$.

a) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(t)$, puis $F(t)$.

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 dx$.

Exercice # 20. Nous admettons la convergence de l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx$.

Pour tout $t \geq 0$, posons $S(t) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\sin x\, dx$.

a) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0,\infty[$ et calculer $S'(t)$ pour $t > 0$.

b) Déterminer $\lim_{t\to\infty} S(t)$ et calculer $S(t)$ pour tout $t > 0$.

c) Soient $A > 0$ et $t > 0$.

(i) Montrer que $\displaystyle\left|\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\, dx\right| \leq \frac{2}{A}$.

(ii) Prouver que, pour tout $A > 0$, nous avons $\displaystyle\lim_{t\searrow 0}\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\, dx = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\, dx$.

(iii) En déduire la valeur de I.

Exercice # 21. (Extension harmonique) Soit

$$U := \mathbb{R}\times]0,\infty[= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y > 0\}.$$

Si $(x,y) \in U$, soit $P_y(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$; P_y est le *noyau de Poisson*. Si f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$, posons

$$u(x,y) := \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)\, f(t)\, dt,\ \forall\,(x,y) \in U.$$

a) Montrer que u est finie en tout point de U.

b) Montrer que u est de classe C^2 sur U.

c) Montrer que $\Delta u = 0$, où $\Delta u(x,y) := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est le *laplacien.*

d) Si f est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{y \searrow 0} u(x,y) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, u est « la » (en fait, une) solution du *problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}\times]0,\infty[\\ \lim_{y\searrow 0} u(x,y) = f(x), & \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Cet u est l'*extension harmonique* de f.

Exercice # 22. Posons $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{1+t^x}$.

a) Déterminer l'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R}\,;\ F(x) \in \mathbb{R}\}$. Montrer que F est continue sur D.

b) Démontrer que F est de classe C^1 sur D et que

$$F'(x) = \int_1^\infty \frac{t^x \ln t}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2} - 1\right) dt,\ \forall\, x \in D.$$

En déduire le sens de variation de F.

c) Déterminer la limite à l'infini de F.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\searrow 1} \int_1^\infty \frac{dt}{1+t^x}$ et $\displaystyle\lim_{x\searrow 1} F(x)$.

Exercice # 23. Le but de cet exercice est de démontrer, pour tout $x > 0$, l'identité

$$\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t} dt,$$

et d'en déduire (à nouveau !) la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$.

a) Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.

(i) Montrer que f est bien définie et continue sur $[0,\infty[$.

(ii) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0,\infty[$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x > 0$.

(iii) Montrer que $f(x) + f''(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x > 0$.

b) Soit $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\, dt$, $\forall\, x \geq 0$. Rappelons que $g(0)$ existe (en tant qu'intégrale généralisée).

(i) Montrer, par intégration par parties, que $g(x)$ existe pour tout $x > 0$ (en tant qu'intégrale généralisée).

(ii) Par un changement de variables, prouver que, pour $x > 0$, nous avons l'identité

$$g(x) = \cos x \int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\, du - \sin x \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\, du.$$

(iii) Montrer que $g(x)$ est de classe C^2 sur $]0,\infty[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x > 0$.

(iv) Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) + g''(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) Dans cette partie, nous nous proposons de montrer l'égalité de f et de g sur $]0,\infty[$.

(i) Montrer que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ et que $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(ii) À partir de l'équation différentielle du seconde ordre vérifiée par les deux fonctions, en déduire que $f(x) = g(x)$ pour $x > 0$.

d) Dans cette partie, nous nous proposons de trouver $g(0)$.

(i) Montrer que $\lim\limits_{x\searrow 0} g(x) = g(0)$.

(ii) En déduire la valeur de $g(0)$.

Exercice # 24. (Continuité de l'intégrale définie) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue intégrable. Posons

$$F(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\,dt, & \text{si } x \geq 0 \\ \displaystyle -\int_{[x,0]} f(t)\,dt, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si f est continue en 1, alors F est dérivable en 1 et $F'(1) = f(1)$.

c) De même si on suppose f *localement intégrable*, c'est-à-dire f est (Lebesgue) mesurable et $\int_K |f(t)|\,dt < \infty$, pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$.

Feuille de TD # 5

Mesures produit

Notations

1. ν_n est la la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$.
2. λ_n est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_n$ de $\mathbb{R}^n$.
3. λ est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_1$ de $\mathbb{R}$. (Donc $\lambda = \lambda_1$.)

Exercice # 1. Soient X, Y a. p. d., et μ, respectivement ν, la mesure de comptage sur X, respectivement Y.

a) Montrer que $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.

b) Montrer que $\mu \otimes \nu$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$.

Exercice # 2. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S} = \{A \times B\,;\ A \in \mathscr{T}, B \in \mathscr{S}\}$.

b) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

c) $\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_m = \mathscr{L}_{n+m}$.

d) $\nu_n \otimes \nu_m = \nu_{n+m}$.

e) $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$.

f) Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ des espaces mesurés, avec μ et ν σ-finies. Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Si $\nu(E_x) = 0$ pour (presque) tout $x \in X$, alors $\mu \otimes \nu(E) = 0$.

g) Si μ et ν sont des mesures σ-finies, alors $\mu \otimes \nu$ est σ-finie.

Exercice # 3. Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

a) Dessiner le domaine D dans le plan et déterminer D_x et D^y, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que D est borélien.

c) Calculer l'aire de D et $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$.

Exercice # 4. Calculer l'aire d'un disque.

Exercice # 5. a) Calculer $\int_{[0,1]^2} xe^{xy}\, dxdy$.

b) Calculer $\displaystyle\int_\Delta \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dxdy$, où $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \leq x, y \leq 1, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

Exercice # 6. Dans $\mathbb{R}^3$, nous considérons :

(i) La demi-boule fermée $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

(ii) Le cône plein $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$.

(iii) Le cylindre plein $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

En examinant les aires des coupes des ces trois solides à la hauteur z, retrouver l'*identité d'Archimède* :

$$\mathrm{vol}(C) = \mathrm{vol}(D) + \mathrm{vol}(K),$$

« vol » désignant le volume d'un solide.

Vérifier cette identité à l'aide de formules connues.

Exercice # 7. Dans $\mathbb{R}^3$, calculer le volume d'un cylindre (plein), pas nécessairement circulaire ou droit, en fonction de l'aire de sa base et de sa hauteur. Généralisation à $\mathbb{R}^n$?

Exercice # 8. a) Montrer que, si $\mathscr{H}$ est une homothétie de rapport k dans $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mu_n(\mathscr{H}(A)) = k^n\, \mu_n(A),\ \forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

b) Comme application, calculer le volume d'une pyramide dans $\mathbb{R}^3$ en fonction de l'aire de sa base et de sa hauteur.

c) Dans $\mathbb{R}^3$, deux pyramides qui ont la même base et la même hauteur ont le même volume.

d) Généralisation à d'autres formes et dimensions ?

Exercice # 9. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux cylindres (pleins) circulaires droits infinis de rayon 1. Si les axes des cylindres sont concurrents et orthogonaux, calculer le volume de leur intersection.

Exercice # 10. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, soit $f(x, y) := y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.

a) Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[a, b] \times [0, 1]$.

b) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y}\, dy$.

Exercice # 11. Pour $y > 0$, soit $f_y(x, t) := \dfrac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

b) Soit $g(y, t) := \int_0^1 f_y(x, t)\, dx$. Montrer que g est λ_2-intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

c) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt$.

Exercice # 12. a) Montrer que l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1}\, dx$ existe et que $I = 2\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1}\, dx$.

b) Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{dxdy}{(1 + y)(1 + x^2y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

c) Déduire des questions précédentes et d'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$ que

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice # 13. En calculant de deux façons différentes l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \left(\int_0^1 e^{-x} \sin(2xy)\, dy \right) dx,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$.

Exercice # 14. (Variables aléatoires indépendantes à densité) Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires indépendantes (voir l'exercice # 32 de la feuille # 3). Supposons que la loi $f_*P = P_f$ de f (respectivement la loi $g_*P = P_g$ de g) a la densité F (respectivement G) par rapport à ν_1 (voir les exercices # 33 et 34 de la feuille # 3).

Soit

$$F \otimes G : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty],\ F \otimes G(x, y) := F(x)\, G(y),\ \forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous considérons le couple $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ (qui est un *vecteur aléatoire*, en langage probabiliste). Montrer que la loi $(f, g)_*P = P_{(f,g)}$ de (f, g) a la densité $F \otimes G$ par rapport à ν_2.

Exercice # 15. (Transformée de Fourier d'une mesure) Soit μ une mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. La *transformée de Fourier de la mesure* μ est définie par

$$\varphi(x) := \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\imath x t\right) d\mu(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

(En théorie des probabilités, on travaille plutôt avec la *fonction caractéristique de* μ, définie par

$$\psi(x) := \varphi(-x) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\imath x t\right) d\mu(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.)$$

a) Montrer que la fonction φ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Soient $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \exp\left(\imath a x\right) \varphi(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} K_n(t - a)\, d\mu(t),$$

où K_n est une fonction que l'on explicitera.

c) Déterminer $\displaystyle\lim_n \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} \exp\left(\imath a x\right) \varphi(x)\, dx$.

d) En déduire que, si $\displaystyle\lim_{|x| \to \infty} \varphi(x) = 0$, alors μ est une mesure diffuse.

e) Même conclusion si φ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice # 16. Soit μ la mesure de comptage sur $([0, 1], \mathscr{B}_{[0,1]})$.

a) Soit $\Delta := \{(x, x)\,;\, x \in [0, 1]\}$. Δ est-il un borélien de $\mathbb{R}^2$? De $[0, 1]^2$?

b) Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes, et les calculer.

$$I_1 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x, y)\, d\lambda(x) \right) d\mu(y),$$

$$I_2 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x, y)\, d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

c) Quelle hypothèse d'un théorème important n'est pas satisfaite ?

Exercice # 17. a) Énoncer les hypothèses et les conclusions des théorèmes de Tonelli et Fubini pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Soit

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \;\; f(n, m) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = m - 1 \\ -1, & \text{si } n = m + 1 \\ 0, & \text{si } n \neq m \pm 1 \end{cases}.$$

Calculer $\sum_n \sum_m f(n, m)$ et $\sum_m \sum_n f(n, m)$, et vérifier si les conditions de point précédent sont satisfaites.

Exercice # 18. Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, soit

$$f(x, y) := \begin{cases} (xy)/(x^2 + y^2)^2, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
b) La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1, 1]^2$?

Exercice # 19. Soient μ_1, μ_2 deux mesures boréliennes, σ-finies, non nulles, sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\mu_1 \otimes \mu_2(\mathbb{R}^2 \backslash \Delta) = 0, \text{ où } \Delta := \{(x, x) \,;\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 \in]0, \infty[$ tels que $\mu_1 = b_1\, \delta_a$ et $\mu_2 = b_2\, \delta_a$. (Et réciproquement.)

a) Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$, alors $\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) > 0$.

b) Avec A_1, A_2 comme ci-dessus, en déduire que $(A_1 \times A_2) \cap \Delta \neq \emptyset$, puis que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

c) Soit $A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ tel que $\mu_1(A) > 0$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\mu_2(\mathbb{R} \backslash A) = 0$, puis que $\mu_2(A) > 0$, et enfin que $\mu_1(\mathbb{R} \backslash A) = 0$.

d) Conclure en utilisant l'exercice # 42 de la feuille #2.

Exercice # 20. Soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, ν une mesure σ-finie sur X, et soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonction mesurables, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Soit $f(n, x) := f_n(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in X$.

a) Quelles hypothèses supplémentaires doit-on ajouter pour pouvoir appliquer le théorème de Tonelli à $\mu \otimes \nu$ et à f, et quelle est l'identité obtenue ?

b) Quelles hypothèses supplémentaires doit-on ajouter pour appliquer le théorème de Fubini à $\mu \otimes \nu$ et à f, et quelle est l'identité obtenue ?

c) Les identités obtenues dans les deux questions précédentes restent-elles valides si ν n'est plus supposée σ-finie ?

Exercice # 21. Soient μ, ν deux probabilités sur $\mathscr{B}_\mathbb{R}$. Soient

$$F_\mu(t) := \mu(]t, \infty[), \; G_\mu(t) := \mu(] - \infty, t]), \; H_\mu(t) := \mu(\{t\}), \; \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On définit de manière analogue F_ν, G_ν et H_ν.

a) Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.

b) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} F_\mu \, d\nu = \int_{\mathbb{R}} (G_\nu - H_\nu) \, d\mu$.

c) Soient $D_\mu := \{t \in \mathbb{R}\,;\ H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu := \{t \in \mathbb{R}\,;\ H_\nu(t) \neq 0\}$.

(i) Expliquer pourquoi les ensembles D_μ et D_ν sont a. p. d.

(ii) Montrer l'égalité suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} F_\mu \, d\nu + \int_{\mathbb{R}} F_\nu \, d\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} H_\mu(t) \, H_\nu(t) = 1.$$

Exercice # 22. Soit μ une mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. Soit

$$H_\mu(x, y) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2 + (x - t)^2} \, d\mu(t), \ \forall\, x \in \mathbb{R}, \ \forall\, y > 0.$$

Par analogie avec l'exercice # 21 de la feuille # 4, H_μ est l'*extension harmonique de* μ.

Le but de cet exercice est de montrer que si $H_\mu = H_\nu$, alors $\mu = \nu$.

a) Montrer que H_μ est continue.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{y \searrow 0} y \, H_\mu(x, y)$.

c) Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim\limits_{y \searrow 0} \int_a^b H_\mu(x, y) \, dx$.

d) Soit ν une autre mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. On suppose que $H_\mu = H_\nu$. Montrer que $\mu = \nu$.

Feuille de TD # 6

Changement de variables

Notations

a) Pour $x > 0$, $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \in]0, \infty[$ (c'est la *fonction Gamma d'Euler*).

b) ν_n est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de $\mathbb{R}^n$.

c) λ_n est la mesure de Lebesgue (complète) dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice # 1. On demande de calculer

$$I := \int_0^\pi \frac{dx}{1+\cos^2 x}.$$

Voici une « solution ».

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1+\dfrac{1}{1+\tan^2 x}} = \int_0^\pi \frac{1+\tan^2 x}{2+\tan^2 x}\,dx.$$

En posant $t := \tan x$, nous avons $dt = \dfrac{1}{\cos^2 x}\,dx = (1+\tan^2 x)\,dx$, d'où

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan \pi} \frac{dt}{2+t^2} = \int_0^0 \frac{dt}{2+t^2} = 0.$$

a) Pourquoi est-ce manifestement faux ?

b) Où est l'erreur de raisonnement ?

c) Quelle est la valeur de I ?

Exercice # 2. Vrai ou faux. Si $\Phi :]a, b[\to]c, d[$ est un C^1-difféomorphisme et $f :]c, d[\to \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(\Phi(y))\,\Phi'(y)\,dy$$

au sens du théorème de changement de variables.

Exercice # 3. (Fonction Bêta d'Euler)

a) Montrer que, $\forall\, x > 0, \forall\, y > 0$, l'application $t \to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est λ_1-intégrable sur $]0, 1[$.

La *fonction Bêta d'Euler* est définie par

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,dt,\ \forall\, x, y > 0.$$

b) Soient $x > 0, y > 0$ et $I := \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} t^{x-1}\, s^{y-1}\, e^{-(t+s)}\, dsdt$. Calculer I en utilisant le changement de variables dans $\mathbb{R}^2$: $u = t$ et $v = t + s$.

c) En calculant I d'une autre manière, établir, pour $x, y > 0$, l'identité

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}. \tag{1}$$

Exercice # 4. a) Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(u,v) := (s,t)$, avec $s := uv$ et $t := u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,\infty[\times]0,1[$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Calculer l'intégrale I de l'exercice précédent en utilisant le changement de variables H, et retrouver l'identité (1).

Exercice # 5. a) Calculer $\displaystyle\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$, où $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 \le x, y \le 1,\ 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$.

b) Calculer l'aire de $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1;\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$ (avec $a, b > 0$ paramètres).

c) Calculer $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$.

d) Soient $a, b > 1$. Calculer l'aire de B, où B est l'ouvert délimité par les courbes d'équation $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$ et $y = 1/(bx)$ et contenant le point $(1,1)$.

Exercice # 6. Pour $n \ge 1$, soit $U_n := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0, x_1 + \cdots + x_n < 1\}$. Soit $S_n := \lambda_n(U_n)$. Etablir une relation entre S_n et S_{n-1}. En déduire la valeur de S_n.

Exercice # 7. Soient $0 \le a < b$. Soit

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

a) Montrer que D est un borélien.

b) À l'aide du changement de variables $u := y^2 - x^2$, $v := xy$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I := \int_D (y^2 - x^2)^{xy}\, (x^2 + y^2)\, dxdy$ en fonction de a et b.

Exercice # 8. Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$U := \{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3\,;\ u > 0, v > 0, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\}.$$

a) Montrer que U est borélien.

b) Calculer $I := \int_U u\, v\, w\, dudvdw$. On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant :

$$(x,y,z) = \Phi(u,v,w) := (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice # 9. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Pour $a, b, c > 0$ fixés, soit

$$I_{a,b,c} := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^3} x^{a-1}\, y^{b-1}\, z^{c-1}\, f(x+y+z)\, dxdydz.$$

a) Soit $(x,y,z) \overset{H}{\longmapsto} (u,v,w)$, où $u := x + y + z$, $v := \dfrac{x}{x+y}$ et $w := \dfrac{x+y}{x+y+z}$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

b) En utilisant H et la formule (1), en déduire que

$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^\infty u^{a+b+c-1}\, f(u)\, du. \tag{2}$$

Exercice # 10. Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Soit

$$J := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^3} \frac{dxdydz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}.$$

A quelle condition sur α, β, γ, l'intégrale J est-elle finie ?

Trouver la réponse de deux façons différentes :

a) En utilisant le théorème de Tonelli.

b) En utilisant (2).

Exercice # 11. Soit $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\ x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

a) Calculer

$$L := \int_B |x|^{a-1}\,|y|^{b-1}\,|z|^{c-1}\, dxdydz\ :$$

(a) En utilisant les coordonnées sphériques.

(b) En utilisant (2).

b) Que retrouve-t-on dans le cas $a = b = c = 1$?

Exercice # 12. Rappelons que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Soit

$$H_a(x) := \int_0^\infty e^{-(at^2 + x/t^2)}\, dt,\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x \geq 0.$$

a) Montrer que la fonction $H_a : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est continue.

b) Calculer $H_a(0)$.

c) Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, \infty[$.

d) Calculer, pour $x > 0$, $H_a'(x)$ en fonction de $H_a(x)$. Indication : utiliser le changement de variable $t := \dfrac{\alpha}{s}$, avec α convenablement choisi.

e) En déduire que

$$H_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ax}},\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x \geq 0. \tag{3}$$

Exercice # 13. Pour $\alpha > 0$, soit

$$J(\alpha) := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2 + x/y^2)}\, x^{\alpha - 1/2}\, dxdy.$$

a) En utilisant (3), montrer que $J(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha)$.

b) En utilisant le changement de variables $u := xy^2$, $v := x/y^2$, que l'on justifiera, montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

c) En déduire la formule $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}}\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Exercice # 14. Rappelons que la fonction *cosinus hyperbolique* est définie par $\cosh x := \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

a) Nous considérons les intégrales suivantes

$$A := \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{ds dt}{\cosh s + \cosh t},\quad B := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{ds dt}{\cosh s + \cosh t},\quad C := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{du dv}{\cosh u \, \cosh v}.$$

(i) Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.

(ii) En utilisant le changement de variables $s := u - v$, $t := u + v$, calculer B, puis A.

b) Soit $H : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, définie par $H(x) := \int_0^\infty \exp(-x\cosh t)\, dt$.

(i) Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, \infty[$. Déterminer les limites de H en 0 et à l'infini.

(ii) Montrer que $\int_0^\infty H(x)\, dx = \pi/2$.

(iii) En utilisant l'intégrale A, montrer que $\int_0^\infty [H(x)]^2\, dx = \pi^2/4$.

Exercice # 15. Soit $J := \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy}$.

a) Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

b) Effectuer le changement de variables $x := u - v$ et $y := u + v$ et en déduire que

$$J = \int_Q \frac{2\, dudv}{1 - u^2 + v^2},$$

où Q est un quadrilatère du plan que l'on déterminera.

c) Effectuer le changement de variable $u := \cos t$ et en déduire que $J = \pi^2/6$. Rappels : $\dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\pi\,\mathbb{Z}$, et $\arctan(z) + \arctan(1/z) = \pi/2$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$.

Exercice # 16. (Théorème du changement de variable dans $\mathbb{R}$) Soit $\Phi\ :]a,b[\to]c,d[$, avec $]a,b[,]c,d[\subset \mathbb{R}$. Nous supposons Φ un C^1-difféomorphisme, c'est-à-dire : $\Phi \in C^1$, Φ bijectif et $\Phi'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in]a,b[$.

a) Montrer que Φ' est de signe constant sur $]a,b[$.

Dans la suite nous supposons $\Phi'(x) > 0$, $\forall\, x \in]a,b[$. Nous nous proposons de montrer la validité du théorème du changement de variable : si $f\ :]c,d[\to \mathbb{R}$ est borélienne et si $g(y) := f(\Phi(y))\,\Phi'(y)$, $\forall\, y \in]a,b[$, alors f a une intégrale de Lebesgue si et seulement si g en a une et dans ce cas

$$\int_{]c,d[} f\, d\nu_1 = \int_{]a,b[} g\, d\nu_1, \text{ ou encore } \int_c^d f(x)\, dx = \int_a^b f(\Phi(y))\,\Phi'(y)\, dy. \tag{4}$$

b) Montrer la validité de (4) si $f := \chi_I$, avec $I \subset]c,d[$ intervalle.

c) En déduire que (4) est vraie si $f = \chi_B$, avec $B \in \mathscr{B}_{]c,d[}$. Indication : classe monotone.

d) En déduire que (4) est vraie si f est borélienne positive.

e) Conclure.

f) Et si f est Lebesgue mesurable ?

g) Et si $\Phi'(x) < 0, \forall\, x \in]a,b[$?

Exercice # 17. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions Lebesgue mesurables. Nous nous proposons de montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, g(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\, g(x-y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n. \tag{5}$$

a) Donner un sens à l'égalité (5).

b) La justifier.

Exercice # 18. Soit $|\ |$ la norme euclidienne standard sur $\mathbb{R}^n$. Soit $f :]0,\infty[\to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne.

a) Nous nous proposons de montrer qu'il existe une constante $C \in]0,\infty[$ (dépendant uniquement de n, en particulier indépendante de f) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(|x|)\, dx = C \int_0^\infty r^{n-1}\, f(r)\, dr. \tag{6}$$

(i) Donner un sens à l'égalité (6).

(ii) La justifier (pour C convenable).

b) En calculant de deux façons différentes $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\, dx$, montrer que $C = \dfrac{2\,\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

c) Calculer, en fonction de la fonction Γ, le volume de la boule euclidienne unité.

Exercice # 19. Soit $\|\ \|$ une norme quelconque sur $\mathbb{R}^n$. Nous nous proposons de trouver un analogue de l'égalité (6) de l'exercice précédent pour le calcul de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, dx$, où $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est borélienne.

a) Supposons d'abord $f \geq 0$. En utilisant les coordonnées sphériques, montrer l'existence d'une constante $C' \in]0,\infty[$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|)\, dx = C' \int_0^\infty r^{n-1}\, f(r)\, dr. \tag{7}$$

b) Montrer que (7) reste encore vraie (dans un sens à expliquer) si f n'est plus supposée positive.

c) Soient $U := \{x \in \mathbb{R}^n\, ;\, \|x\| > 1\}$ et $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\int_U \|x\|^{-a}\, dx$?

Exercice # 20. Soit $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(x - 1/x)\, dx.$$

Exercice # 21. Pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée, soit

$$I(F) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x+y)}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\, dxdy.$$

a) Montrer que $I(F)$ est bien définie.

b) Calculer $I(F)$ si $F(x) := \sin x, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer, en utilisant un changement de variables, que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x+y)}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)}\, dxdy = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F(z)}{\pi(4+z^2)}\, dz.$$

d) Soit $F_\lambda(x) := \cos(\lambda x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ paramètre. Soit $G(\lambda) := I(F_\lambda)$. Écrire G comme la transformée de Fourier d'une fonction que l'on précisera.

e) Montrer que, pour toute fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et bornée, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{x}{y}\right) e^{-x^2/2 - y^2/2}\, dx dy = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F(z)}{1+z^2}\, dz.$$

Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques 3$^{\text{e}}$ année
UE Mesure et intégration & Éléments d'analyse fonctionnelle — Année 2023–2024

Feuille de TD # 7

Espaces L^p. Convolution

Cadre. Sauf mention contraire, nous travaillons dans un espace mesuré $(X, \mathscr{T}, \mu)$. Les espaces $\mathscr{L}^p$ et L^p, $1 \leq p \leq \infty$, sont relatifs à cet espace mesuré.

Exercice # 1. (Inégalité de Young) Soient $1 < p, q < \infty$ exposants conjugués. Alors

$$a\,b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},\ \forall\, a, b \in [0, \infty[.$$

Indication : étudier, pour b fixé, la fonction $a \mapsto a^p/p + b^q/q - ab$.

Exercice # 2. Soient $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mesurables. Montrer les propriétés suivantes.

a) $\|tf\|_p = |t|\,\|f\|_p$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (avec la convention $0 \cdot \infty = 0$).

b) Si $f = g$ p. p., alors $\|f - g\|_p = 0$ et $\|f\|_p = \|g\|_p$.

c) $\|f\|_p = 0$ si et seulement si $f = 0$ p. p.

d) La définition de $\|f\|_\infty$ est correcte, au sens suivant. Soit $A := \{M \in [0, \infty]\,;\, |f(x)| \leq M \text{ p. p.}\}$. Alors A est non vide et A a un plus petit élément, m. Cet m est le plus petit nombre C de $[0, \infty]$ avec la propriété $|f(x)| \leq C$ p. p.

e) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ pour $p = 1$ et $p = \infty$. (Ici, $f, g : X \to \mathbb{R}$.)

Exercice # 3. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$, muni de la mesure de Lebesgue sur $\mathscr{B}_U$. Si $f \in C(U)$, montrer que $\|f\|_\infty = \sup_U |f|$.

Exercice # 4. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Nous considérons des fonctions $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (pas nécessairement mesurables). Montrer que la relation d'équivalence $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ p. p. a les propriétés suivantes.

a) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f + t\,g \sim f_1 + t\,g_1$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$ (à condition que les fonctions soient finies en tout point).

b) Si $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$, alors $f\,g \sim f_1\,g_1$.

c) Si $f \sim g$ et si $\Phi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$, alors $\Phi \circ f \sim \Phi \circ g$.

d) Dans cette question, $X := \mathbb{R}^n$ et $\mu := \lambda_n$.
   (i) Soit $\tau_h f(x) := f(x - h)$, $\forall\, x, h \in \mathbb{R}^n$. Si $f \sim g$, alors $\tau_h f \sim \tau_h g$, $\forall\, h$.
   (ii) Soient $f, g, f_1, g_1 : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, avec $f \sim f_1$ et $g \sim g_1$. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Alors $h \sim h_1$, où

$$h(y) := f(x - y)\, g(y),\ h_1(y) := f_1(x - y)\, g_1(y),\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 5. Nous considérons la relation d'équivalence de l'exercice précédent, mais uniquement pour des fonctions mesurables.

a) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Montrer que toute classe d'équivalence contient un représentant borélien.

b) Même propriété si à la place de $\mathbb{R}^n$ nous considérons une partie borélienne de $\mathbb{R}^n$.

c) Généralisation ?

Exercice # 6. Donner un sens aux expressions suivantes.

a) « $f \in L^p$, $f \geq 0$ ».

b) « $[f \in L^p,\ \|f\|_p = 0] \implies f = 0$ ».

Exercice # 7. Donner un sens aux affirmations suivantes, puis les prouver ou les réfuter.

a) Si $f \in L^p$, alors f est mesurable.

b) Si $f \in L^p$, avec $1 \leq p < \infty$, alors f est finie p. p.

c) $f \in L^1 \implies \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_1/t,\ \forall\, t > 0$.
Plus généralement, si $1 \leq p < \infty$ et $f \in L^p$, alors

$$f \in L^p \implies \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\}) \leq \|f\|_p^p/t^p,\ \forall\, t > 0 \text{ (\textit{inégalité de Markov})}.$$

Exercice # 8. Nous munissons les parties boréliennes U de $\mathbb{R}^n$ de la mesure de Lebesgue λ_n. Décider pour quelles valeurs de p nous avons $f \in \mathscr{L}^p(U, \lambda_n)$ si :

a) $U :=]0,1]$, $f(x) := \dfrac{1}{x^a}$, $a \in \mathbb{R}$.

b) $U := \mathbb{R}$, $f := \chi_{\mathbb{Q}}$.

c) $U :=]0, \infty[$, $f(x) := \dfrac{\sin x}{x}$.

d) $U := \{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |x| \geq 1\}$, $f(x) := \dfrac{\sin |x|}{|x|^a}$, $a \in \mathbb{R}$ (avec « $|\ |$ » la norme euclidienne standard).

Exercice # 9. Soit $1 \leq p < \infty$. Si f est mesurable, soit

$$F_f(t) := \mu(\{x \in X\,;\, |f(x)| > t\})$$

la *fonction de répartition de f*.

a) Si μ est σ-finie, montrer la *formule du gâteau en étages*

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1} F_f(t)\, dt. \tag{1}$$

b) Montrer que (1) reste vraie sans l'hypothèse μ σ-finie. Indications : commencer par une fonction étagée, et traiter le cas général par convergence monotone.

Exercice # 10. (Espaces ℓ^p)

a) Si μ est la mesure de comptage, alors l'égalité p. p. équivaut à l'égalité. Ainsi, nous pouvons identifier naturellement $\mathscr{L}^p$ et L^p.
Si $X = \mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage sur $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, alors nous définissons

$$\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}) := \mathscr{L}^p = L^p,\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Nous définissons de même $\ell^p(A)$, avec A a. p. d. (Cas particuliers importants : $A = \mathbb{Z}$, $A = \mathbb{N}^*$.)

b) Si $(a_n)_n$ est une suite indexée sur $n \in \mathbb{N}$, montrer que

$$\|(a_n)_n\|_p = \begin{cases} \left(\sum_n |a_n|^p\right)^{1/p}, & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_n |a_n|, & \text{si } p = \infty \end{cases}.$$

c) Montrer que, si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $\ell^1 \subset \ell^{p_1} \subset \ell^{p_2} \subset \ell^\infty$. De plus, ces inclusions sont « continues » : si $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|(a_n)_n\|_r \leq \|(a_n)_n\|_p$.

d) Soit $(a_n)_n \in \ell^p$, avec $p < \infty$. Montrer que pour tout $r > p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.

e) Si $1 \leq r < \infty$ et $(a_n)_n$ est une suite arbitraire, alors $\lim_{s \searrow r} \|(a_n)_n\|_s = \|(a_n)_n\|_r$.

Exercice # 11. (Espaces L^p quand la mesure est finie) Nous supposons μ finie.

a) Montrer que si $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, alors $L^\infty \subset L^{p_2} \subset L^{p_1} \subset L^1$.
Plus spécifiquement, montrer que, $1 \leq p \leq r \leq \infty$, alors $\|f\|_p \leq (\mu(X))^{1/p - 1/r} \|f\|_r$, $\forall f$.

b) Soit $f \in L^p$, avec $p > 1$. Montrer que pour tout $1 \leq r < p$ nous avons $\lim_{s \to r} \|f\|_s = \|f\|_r$.

c) Si $f \in L^\infty$, alors :
   (i) $f \in L^p, \forall\, 1 \leq p < \infty$.
   (ii) L'application $[1, \infty] \ni p \mapsto \|f\|_p$ est continue. En particulier, $\lim\limits_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice # 12. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $f \in L^p(I)$. Posons $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt, \forall\, x \geq 0$.

a) Donner un sens à cette définition. Montrer que F est bien définie.

b) Si $p = \infty$, montrer que F est lipschitzienne.

c) Si $1 < p < \infty$, montrer que F est « hölderienne » : il existe $C < \infty$ et $\alpha \in]0, 1[$ (que l'on déterminera) tels que $|F(x) - F(y)| \leq C\, |x - y|^\alpha$, $\forall\, x, y \geq 0$.

d) Si $p = 1$, montrer que F est continue.

e) Si $p = 1$, montrer que F est « absolument continue » : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $0 \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_n < b_n$ sont tels que $(b_1 - a_1) + (b_2 - a_2) + \cdots + (b_n - a_n) < \delta$, alors $|F(b_1) - F(a_1)| + |F(b_2) - F(a_2)| + \cdots + |F(b_n) - F(a_n)| < \varepsilon$.
Indication : lemme de Lebesgue.

Exercice # 13. (Lemme de Brezis-Lieb) Soit $1 \leq p < \infty$. Nous considérons une suite $(f_j) \subset \mathscr{L}^p$ telle que :

i) $\|f_j\|_p \leq C_0 < \infty, \forall\, j$.

ii) $f_j \to f$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{L}^p$.

b) A-t-on nécessairement $f_j \to f$ dans $\mathscr{L}^p$?
Dans la suite, nous nous proposons de montrer le *lemme de Brezis-Lieb*

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2}$$

En fait, nous allons montrer la conclusion plus forte

$$\int ||f_n|^p - |f|^p - |f_n - f|^p| \to 0. \tag{3}$$

c) Expliquer pourquoi (3) $\Longrightarrow$ (2).

d) Si $p = 1$, montrer que

$$||f_n| - |f - f_n|| \le |f|$$

et conclure via le théorème de convergence dominée.

e) Si $1 < p < \infty$, montrer que :

(i) Il existe $C < \infty$ telle que

$$||t|^p - |t-1|^p - 1| \le \begin{cases} C, & \text{si } |t| \le 1 \\ C|t|^{p-1}, & \text{si } |t| \ge 1 \end{cases}.$$

(ii) En déduire que

$$||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| \le \begin{cases} C|f|^p, & \text{si } |f_n| \le |f| \\ C|f_n|^{p-1}|f|, & \text{si } |f_n| \ge |f| \end{cases}. \tag{4}$$

(iii) Soit $M \ge 1$. On définit

$$\begin{aligned} A_{n,M} &:= \{x \in X \,;\, |f_n(x)| \le M|f(x)|\}, \\ B_{n,M} &:= \{x \in X \,;\, |f_n(x)| > M|f(x)|\}. \end{aligned}$$

En utilisant (4) et le théorème de convergence dominée, montrer que

$$\int_{A_{n,M}} ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p| \to 0.$$

(iv) Montrer que

$$\int_{B_{n,M}} |f|^p \le \frac{C_0^p}{M^p}. \tag{5}$$

(v) Utiliser (5), la deuxième inégalité de (4) et l'inégalité de Hölder pour montrer que

$$\lim_{M\to\infty} \sup_n \int_{B_{n,M}} ||f_n|^p - |f_n - f|^p - |f|^p|| = 0.$$

(vi) Conclure.

Exercice # 14. Soit $1 \le p \le \infty$. Si $f_n \to f$ dans $\mathscr{L}^p$ et $f_n \to g$ p. p., quelle est la relation entre f et g ?

Exercice # 15. a) En examinant la preuve de l'inégalité de Hölder, montrer le résultat suivant.
Soient $f \in L^p \backslash \{0\}$ et $g \in L^q \backslash \{0\}$, avec $1 < p, q < \infty$ conjugués et $f, g \ge 0$. Alors

$$\int fg = \|f\|_p \|g\|_q \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } f^p = C\, g^q].$$

b) Si nous ne supposons plus $f, g \ge 0$, montrer que

$$\int fg = \|f\|_p \|g\|_q \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } |f|^{p-1} f = C\, |g|^{q-1} g].$$

Exercice # 16. a) En utilisant éventuellement l'exercice précédent, montrer le résultat suivant.

Si $1 < p < \infty$ et $f, g \in L^p\backslash\{0\}$, alors

$$\|f + g\|_p = \|f\|_p + \|g\|_p \iff [\exists\, C \in]0, \infty[\text{ tel que } f = C\, g].$$

b) Que devient cette condition si $p = 1$?

Exercice # 17. Soient $1 \leq p_2, \ldots, p_k \leq \infty$ tels que $\sum_{j=1}^k 1/p_j = 1$. Alors

$$\|f_1 f_2 \cdots f_k\|_1 \leq \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \cdots \|f_k\|_{p_k},\ \forall\, f_1, f_2, \ldots, f_k : X \to \overline{\mathbb{R}}.$$

Exercice # 18. Soient $1 \leq p_0 < p < p_1 \leq \infty$.

a) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, 1[$ tel que $\dfrac{1}{p} = \dfrac{\theta}{p_0} + \dfrac{1-\theta}{p_1}$.

b) Montrer que $\|f\|_p \leq \|f\|_{p_0}^{\theta} \|f\|_{p_1}^{1-\theta}$, $\forall\, f$.

Exercice # 19. (Inégalités pour des opérateurs à noyau) Nous travaillons dans un espace produit $(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$, avec μ et ν σ-finies. Toutes les fonctions considérées sont *mesurables* et, par souci de simplicité, *positives*. Un *noyau* est une fonction $K : X \times Y \to \mathbb{R}_+$.

Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants conjugués. Nous voulons majorer les quantités

$$A = A(f, g) := \int_{X \times Y} K(x, y)\, f(x)\, g(y)\, d\mu \otimes \nu(x, y), \text{ avec } f : X \to \mathbb{R}_+,\ g : Y \to \mathbb{R}_+,$$

$$B = B(f) := \left\| y \mapsto \int_Y K(x, y)\, f(x)\, d\mu(x) \right\|_p \text{ avec } f : X \to \mathbb{R}_+.$$

a) Montrer que

$$B(f) = \sup\{A(f, g)\,;\ g \in \mathscr{L}^q(Y; \mathbb{R}_+),\ \|g\|_q \leq 1\}.$$

b) Soient $\alpha : X \to \mathbb{R}_+^*$, $\gamma : Y \to \mathbb{R}_+^*$. En utilisant l'identité (évidente)

$$K(x, y)\, f(x)\, g(y) = \left([K(x, y)]^{1/p} \frac{\alpha(x)}{\gamma(y)} f(x)\right) \times \left([K(x, y)]^{1/q} \frac{\gamma(y)}{\alpha(x)} g(y)\right),$$

l'inégalité de Hölder (avec les exposants p et q) et le théorème de Tonelli, obtenir l'inégalité

$$\begin{aligned} A(f, g) \leq & \left(\int_X F(x)\, \alpha^p(x)\, f^p(x)\, d\mu(x)\right)^{1/p} \\ & \times \left(\int_Y G(y)\, \gamma^q(y)\, g^p(y)\, d\nu(y)\right)^{1/q}, \end{aligned} \tag{6}$$

où

$$F(x) := \int_Y \frac{K(x, y)}{\gamma^p(y)} d\nu(y),\ G(y) := \int_X \frac{K(x, y)}{\alpha^q(x)}\, d\mu(x).$$

c) (Inégalité de Schur) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$, $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir l'*inégalité de Schur*

$$B(f) \leq \left[\sup_{x \in X} \int_Y K(x, y)\, d\nu(y)\right]^{1/p} \left[\sup_{y \in Y} \int_X K(x, y)\, d\mu(x)\right]^{1/q} \|f\|_p.$$

d) (Inégalité de Young) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$ et $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir, pour $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, l'*inégalité de Young* $\|h * f\|_p \leq \|h\|_1 \|f\|_p$.

e) (Inégalité de Hardy) En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, obtenir l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^p} \left(\int_0^x f(y)\, dy \right)^p dx \leq q^p \int_0^\infty f^p(x)\, dx.$$

f) (Inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz) *Préliminaire.* Nous admettons la *formule des compléments* (due à Euler)

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)\, t^a}\, dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},\ \forall\, 0 < a < 1.^{*}$$

En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, montrer les *inégalités de Hilbert-Schur-Hardy-Riesz*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \|f\|_p \|g\|_q,$$
$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty \frac{f(x)}{x+y}\, dx \right|^p dy \leq \left(\frac{\pi}{\sin(\pi/p)} \right)^p \|f\|_p^p.$$

Exercice # 20. (Inégalité de Hardy, encore) Nous proposons ici une autre approche pour montrer l'inégalité de Hardy obtenue dans l'item e) de l'exercice précédent. Nous travaillons dans $I =]0, \infty[$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $1 < p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p = \mathscr{L}^p(I)$, nous posons $F(x) := \int_0^x f(t)\, dt$, $\forall\, x > 0$.

a) Si $f \in C_c^\infty(I)$, montrer à l'aide d'une intégration par parties l'*inégalité de Hardy*

$$\int_0^\infty \frac{|F(x)|^p}{x^p}\, dx \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \int_0^\infty |f(x)|^p\, dx. \tag{7}$$

b) Montrer que l'inégalité (7) reste vraie pour tout $f \in \mathscr{L}^p$.

Exercice # 21. (Inégalité de Landau)

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est Lebesgue intégrable, montrer qu'il existe une suite $(R_n)_n$ telle que :
   (i) $2n \leq R_n \leq 2n+1$, $\forall\, n$.
   (ii) $f(R_n) \to 0$.

b) Si, de plus, f est dérivable, montrer qu'il existe une suite $(S_n)_n$ telle que
   (i) $R_n < S_n < R_{n+1}$, $\forall\, n$ (et donc $S_n \to \infty$).
   (ii) $f(S_n)\, f'(S_n) \to 0$.

   Indication : appliquer le théorème des accroissements finis à f^2.
   De même, il existe $(T_n)_n$ telle que $T_n \to -\infty$ et $f(T_n)\, f'(T_n) \to 0$.

c) (Inégalité de Landau) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que f soit (Lebesgue) intégrable et f'' soit bornée. Montrer que $f' \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}, \nu_1)$ et l'*inégalité de Landau*

$$\int_{\mathbb{R}} (f')^2 \leq \|f''\|_\infty \int_{\mathbb{R}} |f|.$$

On pourra commencer par calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{T_n}^{S_n} (f')^2(x)\, dx$ si, de plus, $f \in C^2$.

*. Cette identité peut s'obtenir, par exemple, en appliquant le théorème des résidus en analyse complexe.

Exercice # 22. a) Soit $1 \leq p \leq \infty$. Montrer que $\{f \in \mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)\,;\ f \text{ étagée}\}$ est dense dans $\mathscr{L}^p(X, \mathscr{T}, \mu)$. Il convient de distinguer les cas $1 \leq p < \infty$ et $p = \infty$.

b) On travaille dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$, avec μ mesure de Radon. Si $1 \leq p < \infty$, montrer que

$$\left\{ \sum_{j=1}^{k} a_j \chi_{K_j}\ ;\ k \in \mathbb{N}^*,\ a_j \in \mathbb{R},\ K_j \text{ compact},\ \forall\, j \right\}$$

est dense dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \mu)$.

Exercice # 23. a) Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient $f, g : X \to]0, \infty[$ deux fonctions mesurables telles que $f \cdot g \geq 1$. Montrer que $\int f\, dP \cdot \int g\, dP \geq 1$. Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz, c'est-à-dire l'inégalité de Hölder avec $p = q = 2$.

b) Si $a_1, \ldots, a_n > 0$, alors $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{a_j} \geq n^2$.

Exercice # 24. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions mesurables. Nous avons $f * g(x) = g * f(x)$, au sens du théorème du changement de variables.

Exercice # 25. Soit ρ un noyau régularisant standard. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons :

a) $\rho_\varepsilon(x) \geq 0$ si $|x| < \varepsilon$.

b) $\rho_\varepsilon(x) = 0$ si $|x| \geq \varepsilon$.

c) $\int \rho_\varepsilon = 1$.

Exercice # 26. Une *approximation de l'identité* est une famille $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ telle que :

i) $\zeta^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est (Lebesgue) intégrable, $\forall\, \varepsilon > 0$.

ii) $\int \zeta^\varepsilon = 1, \forall\, \varepsilon > 0$.

iii) Il existe une constante $M < \infty$ telle que $\int |\zeta^\varepsilon| \leq M, \forall\, \varepsilon > 0$.

iv) Pour tout $\delta > 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(0,\delta)} |\zeta^\varepsilon| = 0$.

a) Montrer que, si $\rho \in \mathscr{L}^1(R^N)$ (avec la mesure de Lebesgue) et $\int \rho = 1$, alors $\rho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\rho(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $x \in \mathbb{R}^n$, est une approximation de l'identité.

b) Soit $(\zeta^\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ une approximation de l'identité.

(i) Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est bornée et uniformément continue, montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ uniformément sur $\mathbb{R}^n$.

(ii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$, montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

(iii) Si $1 \leq p < \infty$ et $f \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$ (avec la mesure de Lebesgue), montrer que $f * \zeta^\varepsilon \to f$ dans $\mathscr{L}^p(\mathbb{R}^n)$.

Exercice # 27. Soient $f \in C^k(\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Alors :

a) $f * \varphi$ est défini en tout point.

b) $f * \varphi \in C^k$.

c) Pour toute dérivée partielle ∂^α d'ordre $\leq k$, $\partial^\alpha(f * \varphi) = (\partial^\alpha f) * \varphi$.

d) Si f est un polynôme (de n variables) de degré $\leq m$, alors $f * \varphi$ est un polynôme de degré $\leq m$.

Exercice # 28. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_k < \infty$. Soit $f \in \mathscr{L}^{p_1}(\Omega) \cap \ldots \cap \mathscr{L}^{p_k}(\Omega)$. Montrer qu'il existe une suite $(\varphi_j)_j \subset C_c^\infty(\Omega)$ telle que $\varphi_j \to f$ quand $j \to \infty$ dans $\mathscr{L}^{p_i}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, k$.

Exercice # 29. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que $C^\infty(\Omega) \cap \mathscr{L}^\infty(\Omega)$ et $C_c^\infty(\Omega)$ ne sont pas denses dans $\mathscr{L}^\infty(\Omega)$.

Exercice # 30. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Soient p, q deux exposants conjugués. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$, montrer que $f * g$ est continue.

Exercice # 31. Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_{\mathbb{R}^n}, \lambda_n)$. Nous nous proposons de montrer le résultat suivant : si $A, B \in \mathscr{L}_n$ satisfont $\lambda_n(A) > 0$, $\lambda_n(B) > 0$, alors l'ensemble $A + B$ contient une boule ouverte non vide.

a) Montrer que l'on peut supposer A et B compacts.

b) Montrer que $f := \chi_A * \chi_B$ est continue.

c) Calculer $\int f$ et conclure.

Exercice # 32. (Résolution de l'équation de la chaleur dans le demi-espace) Nous travaillons dans $(R^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. $|\ |$ désigne la longueur euclidienne standard dans $\mathbb{R}^n$. (Donc $|x| = \|x\|_2$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$.) Soit

$$K_t(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-|x|^2/(4t)},\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0,$$

le *noyau de la chaleur*.

Soient $1 \le p \le \infty$ et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{L}^p$. Sous réserve d'existence, soit

$$u(x,t) := f * K_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) K_t(x-y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, t > 0.$$

a) Montrer que :

(i) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, \infty[)$.

(ii) u vérifie l'*équation de la chaleur* homogène

$$Lu := \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^n \times]0, \infty[.$$

b) Si $1 \le p < \infty$, montrer que « $u(\cdot, 0) = f$ »†, au sens où

$$\lim_{t \to 0} u(\cdot, t) = f \text{ dans } \mathscr{L}^p.$$

c) Si f est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{t \to 0} u(x,t) = f(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

d) Si f est uniformément continue et bornée, montrer que

$$u(\cdot, t) \to f \text{ uniformément sur } \mathbb{R}^n \text{ quand } t \to 0.$$

Exercice # 33. (Produit de convolution de deux mesures) Soient μ, ν deux mesures boréliennes σ-finies sur $\mathbb{R}^n$. À chaque ensemble borélien de $\mathbb{R}^n$, nous associons l'ensemble

$$F = F(E) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n\ ;\ x + y \in E\}.$$

a) Montrer que F est borélien.

†. Noter que u n'est pas définie pour $t = 0$.

b) Montrer que la formule $\xi(E) := \mu \otimes \nu(F)$, $\forall\, E \in \mathscr{B}_{R^n}$, définit une mesure borélienne ξ sur $\mathbb{R}^n$. Cette mesure est le *produit de convolution* des mesures μ et ν, noté $\mu * \nu$.

c) Montrer que le produit de convolution est commutatif.

d) Si les mesures boréliennes μ, ν, η sont finies, alors leur produit est associatif.

e) Montrer que δ_0 (la mesure de Dirac en 0) est l'élément neutre de la convolution.

f) Si μ et ν sont des mesures à densités f, respectivement g, par rapport à ν_n, montrer que $\mu * \nu$ a la densité $f * g$.

g) Si μ est à densité f par rapport à ν_n, alors $\mu * \nu$ a la densité $f * \nu$, où

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice # 34. (Convolution d'une fonction et d'une mesure) Cet exercice fait suite à l'exercice précédent. Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne, et μ est une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$, nous posons, sous réserve d'existence,

$$f * \nu(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\, d\nu(y),\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Si f est Lebesgue intégrable et μ est finie, alors $f*\mu$ est définie ν_n-p. p., et est une fonction Lebesgue intégrable. Indication : théorème de Fubini.

b) Si $f \in C_c^k(\mathbb{R}^n)$ et μ est une mesure de Radon, alors $f * \mu$ est définie en tout point, et est une fonction de classe C^k.

Exercice # 35. (Équations de Cauchy) Nous considérons les *équations fonctionnelles* (de Cauchy) suivantes :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{8}$$

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z| = 1\},\ g(x+y) = g(x)\, g(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Un résultat très connu affirme que, si f est une solution *continue* de (8), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = Ax,\ \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{10}$$

Un résultat un peu moins connu affirme que, si g est une solution *continue* de (9), alors

$$\text{il existe } A \in \mathbb{R} \text{ tel que } g(x) = e^{\imath Ax},\ \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ (et réciproquement).} \tag{11}$$

Ces conclusions ne sont plus vraies s'il n'y a aucune hypothèse sur f et g, mais donner des contre-exemples sort du cadre de cet enseignement. (En demander en algèbre.)

Nous nous proposons de montrer que (10) et (11) restent vraies sous l'hypothèse plus faible que f (ou g) est *Lebesgue mesurable*. Nous assumons cette hypothèse dans ce qui suit, et nous travaillons avec la mesure de Lebesgue.

Pour commencer, nous admettons la propriété qui suit, qui sera démontrée plus loin.

$$\text{Si } g \in L^\infty(\mathbb{R}) \setminus \{0\},\ \text{alors il existe } \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}) \text{ telle que } \int_{\mathbb{R}} g(y)\, \psi(y)\, dy \neq 0. \tag{12}$$

a) Soit g solution Lebesgue mesurable de (9). En multipliant (9) par $\psi(y)$, avec ψ comme dans (12) (avec $n = 1$), et en intégrant dans la variable y, montrer que $g \in C^\infty(\mathbb{R})$. Puis conclure grâce au préambule de l'exercice.

b) Soit f une solution Lebesgue mesurable de (8). Soit $g := e^{\imath f}$. En utilisant la question précédente pour g, montrer qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ tels que

$$f(x) = Ax + 2\pi\, h(x),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

c) (i) Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ une fonction telle que

$$h(x + y) = h(x) + h(y),\ \forall\, x, y \in \mathbb{R}$$

(aucune hypothèse de mesurabilité).
Montrer que $h(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

(ii) Conclusion ?

d) Montrons (12). Soit $A := \{y \in \mathbb{R}\,;\ g(y) \neq 0\}$.

(i) Expliquer pourquoi $\lambda_1(A) > 0$.

(ii) Montrer qu'il existe $K \subset A$ un compact tel que $\nu_1(K) > 0$. Indication : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon.

(iii) Soit ρ un noyau régularisant. Montrer que (12) est vraie si $\psi := (\operatorname{sgn} g\, \chi_K) * \rho_\varepsilon$, avec ε suffisamment petit. Indication : convergence dominée.

e) Généraliser ce qui précède à des fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{T}$.

Feuille de TD # 8

Espaces de Hilbert

Cadre. Dans ce qui suit, H est un *espace de Hilbert réel* (sauf si l'énoncé précise qu'il s'agit d'un espace de Hilbert complexe), et E un *espace préhilbertien réel*. Le produit scalaire, respectivement la norme induite sur H ou E, sont notés $\langle\, ,\rangle$, respectivement $\|\ \|$.

Exercice # 1. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et dérivable. Montrer l'équivalence

$$0 \text{ est un point de minimum de } f \iff f'(0) \geq 0.$$

Exercice # 2. Montrer que, pour tout $x \in E$,

$$\|x\| = \max\{\langle x, y\rangle ;\, y \in E, \|y\| \leq 1\}.$$

Exercice # 3. Montrer que

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right], \ \forall\, x, y \in E.$$

Exercice # 4. On considère un espace vectoriel réel X muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité du parallélogramme :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \ \forall\, x, y \in X.$$

L'objectif est de montrer que X muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire induisant $\|\ \|$. Compte tenu de l'exercice précédent, posons

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right], \ \forall\, x, y \in X.$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

a) Montrer que, pour tout $x, y \in X$, on a $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$, $\langle x, x\rangle = \|x\|^2$ et $\langle -x, y\rangle = \langle x, -y\rangle = -\langle x, y\rangle$.

b) Montrer que, pour tout $x, y, z \in X$, on a $\langle x+y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$. (On pourra montrer d'abord l'égalité suivante : $\langle x+y, z\rangle = 2\langle y, z\rangle + \langle x-y, z\rangle$.)

c) Montrer, en utilisant b), que, si $x, y \in X$ et $r \in \mathbb{Q}$, on a $\langle rx, y\rangle = r\langle x, y\rangle$. En utilisant un argument de continuité, montrer que cette égalité reste encore vraie pour tout $r \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que $\langle\, ,\rangle$ est bien un produit scalaire sur X qui induit la norme $\|\ \|$.

Exercice # 5. (Inégalité de Bessel) Soit $(e_j)_{1\leq j<N} \subset E$ (avec $N = 2, 3, \ldots, \infty$) une famille orthonormée. Montrer l'*inégalité de Bessel*

$$\sum_{1\leq j<N} \langle x, e_j\rangle^2 \leq \|x\|^2, \ \forall\, x \in E.$$

Exercice # 6. Soit $(e_j)_{j\geq 1} \subset H$ une suite orthonormée. Soit $(a_j)_{j\geq 1} \subset \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence

$$\sum_{j\geq 1} a_j e_j \text{ converge } \iff \sum_{j\geq 1} a_j^2 < \infty.$$

En cas de convergence de l'une des séries, montrer que $\left\|\sum_{j\geq 1} a_j e_j\right\|^2 = \sum_{j\geq 1} a_j^2$.

Exercice # 7. Soient F et G deux sous-espaces fermés orthogonaux de H. Montrer que $F + G$ est fermé.

Exercice # 8. Soit F une partie non-vide de H. Montrer que :

a) $F^\perp$ est un sous-espace fermé de H.

b) $\overline{\text{Vect}\,(F)}^\perp = F^\perp$.

c) $F^{\perp\perp} = \overline{\text{Vect}\,(F)}$. En particulier, si F est un sous-espace fermé de H, alors $F^{\perp\perp} = F$.

Exercice # 9. Soit F un sous-espace de H. Montrer l'équivalence

$$F \text{ est dense dans } H \iff F^\perp = \{0\}.$$

Exercice # 10. Soient F et G deux sous-espaces fermés de H. Montrer que $(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$ et $(F \cap G)^\perp = \overline{F^\perp + G^\perp}$.

Exercice # 11. Soit $H = L^2(\mathbb{R})$, muni de sa norme usuelle.

a) Montrer que

$$G := \left\{ f \in H\, ;\, \int_0^1 f = 0 \right\}$$

est un sous-espace fermé de H, et déterminer $G^\perp$.

b) Soient $C_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions continues à support compact, et

$$F := \left\{ f \in C_c(\mathbb{R})\, ;\, \int_0^1 f = 0 \right\}.$$

Montrer que $\overline{F} = G$.

c) Déterminer l'ensemble $\{g \in C_c(\mathbb{R})\, ;\, g \in F^\perp\}$.

Exercice # 12. Soient $H = L^2(]0, 1[)$ muni de sa norme usuelle et

$$V := \left\{ f \in H\, ;\, \int_0^1 f = \int_0^{1/2} f = 0 \right\}.$$

a) Montrer que V est un sous-espace fermé de H. Déterminer une base de $V^\perp$.

b) Soit $f(x) := x$. Calculer la projection orthogonale de f sur V, puis $d(f, V)$.

Exercice # 13. Déterminer la quantité suivante

$$\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{2\pi} |\sin x - a - bx|^2\, dx.$$

La borne inférieure est-elle atteinte ?

Exercice # 14. a) Déterminer la projection orthogonale sur la boule unité fermée de H.

b) Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace engendré par une famille orthonormée finie de H.

Exercice # 15. Soit $e_n(x) := e^{\imath nx}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in]0, 2\pi[$. Montrer que $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(]0, 2\pi[, \mathscr{B}_{]0,2\pi[}, 1/(2\pi)\nu_1)$.

Exercice # 16. Montrer qu'un espace préhilbertien qui a une base algébrique orthonormée infinie $\mathscr{B}$ n'est pas complet. Indication : soit $(e_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{B}$ une suite orthonormée. Soit $x_n := \sum_{j=1}^{n}(1/j^2)e_j$, $\forall\, n \geq 1$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy, mais ne converge pas.

Exercice # 17. On considère $\mathbb{R}[X]$ muni de

$$< P, Q >:= \int_0^1 P(x)Q(x)\, dx,\ \forall\, P, Q \in \mathbb{R}[X].$$

a) Montrer que $<\,,\,>$ est bien un produit scalaire.

b) Montrer qu'il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers $\exp$ sur $[0, 1]$.

   Montrer que cette suite est de Cauchy dans $(\mathbb{R}[X], <\,,\,>)$.

c) En déduire sur $(\mathbb{R}[X], <\,,\,>)$ n'est pas complet.

Exercice # 18. Soit X l'espace vectoriel complexe engendré par les fonctions de la forme $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{iwt} \in \mathbb{C}$ où w parcourt $\mathbb{R}$. Pour $f, g \in X$, soit

$$< f, g >:= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t)\overline{g(t)}\, dt.$$

a) Montrer que $<\,,\,>$ définit un produit scalaire sur X.

b) Vérifier que la famille $(t \mapsto e^{\imath wt})_{w\in\mathbb{R}}$ est orthonormée.

c) X est-il un espace de Hilbert ?

Exercice # 19. Soit V un sous-espace de H. Montrer que toute forme linéaire et continue sur V se prolonge en une forme linéaire et continue sur H.

Exercice # 20. Montrer que tout convexe fermé non-vide de H admet un unique élément de norme minimale.

Exercice # 21. Donner un exemple d'une partie A fermée de ℓ^2, telle que $\operatorname{dist}(0, A) = 1$, mais ne contenant pas d'élément a vérifiant $\|a\|_2 = 1$.

Exercice # 22. Soit $F \subset H$ un sous-espace fermé *non-nul*. Soit P une projection de H sur F (c'est-à-dire : P est un endomorphisme de H, $P \circ P = P$ et $P(H) = F$).

Montrer l'équivalence entre

1. P est la projection orthogonale sur F.
2. P est continu et $\|P\| = 1$.
3. $|\langle P(x), x\rangle| \leq \|x\|^2$ pour tout $x \in H$.

Exercice # 23. (Polynômes de Laguerre) Soit μ la mesure sur $[0, \infty[$ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue (c'est-à-dire $\mu(B) = \int_B e^{-x} dx$, $\forall\, B \in \mathscr{B}_{[0,\infty[}$). Les *polynômes de Laguerre* sont définis par

$$L_n = \frac{e^x}{n!} \left(\frac{d}{dx}\right)^n (e^{-x} x^n), \forall\, n \geq 0.$$

Montrer que les L_n est un polynôme, $\forall\, n \geq 0$, et que $(L_n)_{n\geq 0}$ est une suite orthonormée de $L^2([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \mu)$.

Exercice # 24. (Deux identités généralisées du parallélogramme) Soient $x_1, \ldots, x_n \in H$.

a) Montrer que

$$\|tx_1 + (1-t)x_2\|^2 + t(1-t)\|x_1 - x_2\|^2 = t\|x_1\|^2 + (1-t)\|x_2\|^2, \ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$\frac{1}{2^n} \sum_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)\in\{-1,1\}^n} \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_n x_n\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2.$$

c) Montrer que, si $p \neq 2$, alors il n'existe pas d'isomorphisme linéaire entre ℓ^p et ℓ^2. (Supposer par l'absurde qu'il existe un tel isomorphisme $T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ et considérer $x_i = T(e_i)$.)

Exercice # 25. Soit $H = L^2(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$. Soit $C = \{f \in H\,; f \geq 0\}$. Montrer que C est un convexe fermé et que $P_C(f) = f\chi_{\{f\geq 0\}}$, $\forall\, f \in H$.

Exercice # 26. Soit $u \in \mathscr{L}(H)$. Montrer l'équivalence entre

1. u est une isométrie, c'est à dire $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in H$.
2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $u^* u = \mathrm{Id}$.

(Indication : penser à l'identité de polarisation).

Exercice # 27. Si H est *séparable*, montrer que tout ensemble orthonormé $E \subset H$ est au plus dénombrable. Indication : si G est dénombrable et dense, construire une injection de E dans G en considérant des boules de rayon $1/2$.

Exercice # 28. a) Soient $x, y \in E$ tels que $\langle x, y\rangle = \|x\|^2 = \|y\|^2$. Montrer que $x = y$.

b) Soient (x_n) et (y_n) deux suites de E vérifiant $\|x_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1$, $\forall\, n$.

1. On suppose que $\langle x_n, y_n\rangle \to 1$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.
2. On suppose que $\|x_n + y_n\| \to 2$. Montrer que $x_n - y_n \to 0$.

Exercice # 29. Soient H *séparable*, $(e_n)_{n\geq 0} \subset H$ une base hilbertienne et $(f_n)_{n\geq 0} \subset H$ une suite orthonormée. On suppose que

$$\sum_{n\geq 0} \|e_n - f_n\|^2 < \infty.$$

Le but de cet exercice est de démontrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ est également une base hilbertienne.

a) Soient $N \geq 0$ et $g \in H$ tel que $f_n \perp g$ pour tout $n \geq N$. Montrer l'inégalité

$$\left\| \sum_{n \geq N} \langle g, e_n \rangle e_n \right\|^2 \leq \|g\|^2 \sum_{n \geq N} \|e_n - f_n\|^2.$$

On choisit maintenant un $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{n \geq N} \|e_n - f_n\|^2 < 1.$$

b) Montrer que tout vecteur g orthogonal à $e_0, e_1, \ldots, e_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \ldots$, est nul.

c) On considère les vecteurs

$$\eta_n = e_n - \sum_{k \geq N} < e_n, f_k f_k, \; \forall \, n < N.$$

Montrer que tout vecteur g orthogonal à $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{N-1}, f_N, f_{N+1}, \ldots$, est nul.

d) Soit W l'orthogonal de l'espace V engendré par les vecteurs $f_N, f_{N+1}, \ldots$ Montrer que $\eta_n \in W$ pour tout $n < N$ et que W est engendré par $\eta_0, \ldots, \eta_{N-1}$.

e) Conclure.

Exercice # 30. Soient $(e_n)_{n \geq 0}$ une suite orthonormée de H et $A := \{e_n \, ; \, n \geq 0\}$.

a) Montrer que A est fermé et borné. A est-il compact ?

b) Soit (α_n) une suite de réels positifs de carrés sommables. On note K l'ensemble des éléments $x \in H$ qui s'écrivent sous la forme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e_n$ où $|a_n| \leq \alpha_n$ pour tout n. Montrer que l'ensemble K est compact.

Feuille de TD # 9

Séries de Fourier

Notations, cadre

a) Si $f :]0, 2\pi[\to \mathbb{C}$ est Lebesgue intégrable, nous posons

$$c_n(f) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-\imath n x}\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{Z},$$
$$S_N(f)(x) := \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{\imath n x},\ \forall\, N \in \mathbb{N},$$
$$Sf(x) := \lim_{N\to\infty} S_N(f)(x) \text{ (si cette limite existe)},$$
$$T_N(f)(x) := \frac{S_0(f)(x) + \cdots + S_N(f)(x)}{N+1},\ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

b) La série *formelle* $Sf := \sum_{-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath n \cdot}$ est le *développement en série de Fourier* (ou la *série de Fourier*) de f.

c) Les espaces et normes L^p sont considérés par rapport à $I =]0, 2\pi]$ muni de la mesure $1/(2\pi)\, \lambda_1$, avec λ_1 la mesure de Lebesgue.

Exercice # 1. a) Montrer que $\langle f, g\rangle := \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\, \overline{g}(x)\, dx$ définit un produit scalaire sur L^2.

b) Posons $e_n(x) := e^{\imath n x}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$, $\forall\, x \in]0, 2\pi[$. Montrer que la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est orthonormée.

c) Exprimer $c_n(f)$ à l'aide de e_n et du produit scalaire ci-dessus, et retrouver l'inégalité de Bessel.

Exercice # 2. Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Alors :

a) f est intégrable sur tout intervalle borné.

b) $\int_0^{2\pi} f(y)\, dy = \int_a^{a+2\pi} f(y)\, dy$, $\forall\, a \in \mathbb{R}$.

Exercice # 3. Soit $P = \sum_{n\in I} a_n\, e^{\imath n \cdot} = \sum_{n\in I} a_n\, e_n$ (avec $I \subset \mathbb{Z}$ fini) un *polynôme trigonométrique*. Montrer que $P \in L^1$ et que $c_n(P) = \begin{cases} a_n, & \text{si } n \in I \\ 0, & \text{si } n \notin I \end{cases}$.

Exercice # 4. Si f est localement intégrable et 2π-périodique, montrer que $c_n(f(\cdot + h)) = e^{\imath n h} c_n(f)$, $\forall\, h \in \mathbb{R}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

Exercice # 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{pour } x \in [0, \pi] \\ 0, & \text{pour } x \in]\pi, 2\pi[\end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Déterminer Sf.

c) Calculer, en fonction de $x \in \mathbb{R}$, la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{2n+1}$.

Exercice # 6. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique donnée par $f(x) := x$ pour $x \in [0, 2\pi[$. Que donne l'égalité de Parseval ?

Exercice # 7. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par $f(x) := |\sin x|$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{4n^2-1}$.

Exercice # 8. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := |x|$. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par $f(x) := x^2$.

a) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

b) En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$.

Exercice # 10. Soit $\alpha \in]0, \pi[$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie sur $]-\pi, \pi]$ par

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in [-\alpha, \alpha] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Dessiner le graphe f sur $[-2\pi, 2\pi]$.

b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\alpha)^2}{n^2}$.

Exercice # 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, impaire et telle que $f(x) = (\pi - x)/2$ sur $]0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de f sur une période.

b) Calculer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur des sommes suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

Exercice # 12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique, paire et telle que $f(x) = 2x - \pi$ sur $[0, \pi]$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$ et exprimer $f(x)$ sur $[\pi, 2\pi]$.

b) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Exercice # 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique et vérifiant $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$.

a) Dessiner le graphe de f sur $[-3\pi, 3\pi]$.

b) Déterminer Sf et $Sf(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

c) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice # 14. Développer en série de Fourier la fonction 2π-périodique impaire définie sur $[0,\pi]$ par $f(x) = x(\pi - x)$. En déduire les valeurs des séries $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n+1)^6}$.

Exercice # 15. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^1 telle que $f(0) = f(2\pi)$ et $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = 0$.

a) Exprimer $c_n(f')$ en fonction de $c_n(f)$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, et calculer $c_0(f')$.

b) En déduire que

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\, dt.$$

c) Dans quel cas a-t-on égalité ?

Exercice # 16. La conclusion de l'item 3 de cet exercice suit du corollaire 12.25 du cours, mais le but ici est d'en obtenir un preuves plus directe et élémentaire.

a) Soit $f \in C^k(\mathbb{R})$ une fonction 2π-périodique. Montrer que $|c_n(f)| \leq \dfrac{\left\|f^{(k)}\right\|_\infty}{|n|^k}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^*$.

   En particulier, si $f \in C^2$, montrer que sa série de Fourier $x \mapsto \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{\imath nx}$ converge normalement, et que la somme de la série est f.

b) Dans cet item, nous améliorons la conclusion de l'item a). Nous supposons $f \in C^{k-1}(\mathbb{R})$, f 2π-périodique, et $f^{(k-1)}$ de classe C^1 sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\sum |n|^{2k}\, |c_n(f)|^2$ converge.

c) Si f est continue, 2π-périodique, et de classe C^1 par morceaux, montrer que sa série de Fourier converge normalement vers f.

Exercice # 17. (Noyau de Dirichlet) Soit f 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$. Soit

$$D_N(x) := \sum_{k=-N}^{N} e^{\imath kx},\ \forall\, x \in \mathbb{R}\,;$$

D_N est le *noyau de Dirichlet*.

a) Montrer que

$$S_N f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, D_N(y)\, dy,\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) Montrer que

$$\begin{aligned} D_N(y) &= \begin{cases} \dfrac{\sin((N+1/2)y)}{\sin(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sin(Ny)\ \operatorname{cotan}(y/2) + \cos(Ny), & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ 2N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}. \end{aligned}$$

c) Montrer que $\int_0^{\pi} D_N(y)\, dy = \int_{-\pi}^{0} D_N(y)\, dy = \pi$.

Exercice # 18. (Noyau de Fejér) Soit

$$F_N := \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_N}{N+1}, \ \forall\, N \in \mathbb{N},$$

où D_j est le noyau de Dirichlet (F_N est le *noyau de Fejér*). Soit

$$T_N(f) := \frac{S_0(f) + S_1(f) + \cdots + S_N(f)}{N+1}, \ \forall\, N \in \mathbb{N}.$$

Montrer les propriétés suivantes.

a) Si f est 2π-périodique et intégrable sur $]0, 2\pi[$, alors

$$T_N(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-y)\, F_N(y)\, dy = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-y)\, F_N(y)\, dy, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

b) $F_N(y) = \begin{cases} \dfrac{\sin^2[(N+1)y/2]}{(N+1)\, \sin^2(y/2)}, & \text{si } y \notin 2\pi\,\mathbb{Z} \\ N+1, & \text{si } y \in 2\pi\,\mathbb{Z} \end{cases}.$

En particulier, $F_N(y) \geq 0$, $\forall\, y$, $\forall\, N$.

c) $\int_{-\pi}^{\pi} F_N(y)\, dy = 2\pi$.

d) Pour tout $0 < \delta < \pi$, $F_N \to 0$ uniformément sur $[-\pi, -\delta] \cup [\delta, \pi]$ quand $N \to \infty$.
En particulier, pour tout $0 < \delta < \pi$,

$$\int_{[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]} F_N(y)\, dy \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

Définition. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est continue et 2π-périodique, son *module de continuité* ω est

$$\omega(\delta) := \sup\{|f(x) - f(y)|\,;\ x, y \in \mathbb{R},\ |x-y| \leq \delta\},\ \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{1}$$

Exercice # 19. a) Montrer que, dans (1), le $\sup$ est un $\max$.

b) Montrer que ω est continue et croissante.

Exercice # 20. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction α-hölderienne telle que $f(0) = f(2\pi)$. Nous notons encore f son prolongement par 2π-périodicité.

a) Montrer que

$$\omega(\delta) \leq 2\, |f|_{C^\alpha} \delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi. \tag{2}$$

b) Améliorer (2) à $\omega(\delta) \leq 2^{1-\alpha}\, |f|_{C^\alpha} \delta^\alpha, \forall\, 0 < \delta \leq 2\pi$.

Exercice # 21. Soit $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction telle que $\omega(\delta) \ll \delta$ quand $\delta \to 0$. Montrer que f est constante (et réciproquement).

Exercice # 22. Montrer que $S_n(T_n(f)) = T_n(f)$.

Exercice # 23. (Pour une mise en perspective de cet exercice, voir l'exercice 26.) Montrer que

$$\|S_n(f)\|_\infty \leq \|D_n\|_1 \|f\|_\infty,\ \forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \text{ mesurable, bornée, } 2\pi\text{-périodique}.$$

Exercice # 24.

a) Montrer que

$$|D_n(y)| \leq \frac{\pi}{|y|} \min\left((n+1/2)|y|, 1\right), \ \forall\, n \geq 0, \ \forall\, 0 < |y| \leq \pi.$$

On pourra utiliser les inégalités suivantes :

$$|\sin t| \leq \min\left(|t|, 1\right), \forall\, t \in \mathbb{R}, \ \sin t \geq \frac{2}{\pi} t, \ \forall\, t \in [0, \pi/2].$$

b) En déduire que

$$\|D_n\|_1 \leq 1 + \ln \pi + \ln(n + 1/2), \ \forall\, n \geq 0.$$

Exercice # 25. Montrer que

$$|F_n(y)| \leq \frac{\pi^2}{(n+1)y^2} \min\left(((n+1)y/2)^2, 1\right), \ \forall\, n \geq 0, \ \forall\, 0 < |y| \leq \pi.$$

Exercice # 26. (Produit de convolution de fonctions périodiques) Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ deux fonctions 2π-périodiques, avec f intégrable sur $]0, 2\pi[$ et g continue. Nous définissons

$$f * g(x) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x-t) g(t)\, dt, \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Montrer que le *produit de convolution* $f * g(x)$ est bien défini, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que $f * g$ est 2π-périodique.

c) Calculer les coefficients de Fourier de $x \mapsto f(x-t)$ en fonction de t et de ceux de f.

d) En déduire les coefficients de Fourier de $f * g$ en fonction de ceux de f et g.

e) Généraliser ce qui précède au cas où $f \in \mathscr{L}^p$ et $g \in \mathscr{L}^q$, avec p et q conjugués.

Exercice # 27.

a) Montrer que $T_N(f) = f * F_N$, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$, $\forall\, f \in \mathscr{L}^p(I)$, f 2π-périodique.

b) Avec p et f comme dans la question précédente, montrer que $T_N(f)$ est 2π-périodique, $T_N(f) \in \mathscr{L}^p(I)$ et $\|T_N(f)\|_p \leq \|f\|_p$.

c) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $f \in C_c^\infty(I)$ et f est prolongée par 2π-périodicité à $\mathbb{R}$, montrer que $\|T_N(f) - f\|_p \to 0$ quand $N \to \infty$. Indication : utiliser le théorème de Fejér.

d) Soit $1 \leq p < \infty$. Si $f \in \mathscr{L}^p(I)$ et f est 2π-périodique, montrer que $\|T_N(f) - f\|_p \to 0$ quand $N \to \infty$. Indication : utiliser la question précédente et la densité de $C_c^\infty(I)$ dans $\mathscr{L}^p(I)$.

e) Calculer $c_n(T_N(f))$, $\forall\, N \in \mathbb{N}$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}$.

f) En déduire que « les coefficients de Fourier d'une fonction déterminent la fonction » : si $f \in L^1(I)$ et f est 2π-périodique, alors $[c_n(f) = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{Z}] \implies f = 0$.

Exercice # 28. (Inégalités faibles de Bernstein (I)) Commençons par la fin de l'histoire, qui dépasse le cadre de cet enseignement. En général, l'ordre de grandeur d'une fonction ne donne aucune information sur l'ordre de grandeur de sa dérivée. Par exemple, les fonctions $x \mapsto f_n(x) := \sin(nx)$ satisfont toutes $|f_n| \leq 1$, mais leurs dérivées peuvent être arbitrairement grandes quand $n \to \infty$. Le *théorème de Bernstein* donne une inégalité entre f' et f *si f est un polynôme trigonométrique de degré fixé*. Il affirme que, si f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$, alors

$$\max_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| \leq n \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|. \tag{3}$$

Nous allons montrer une forme plus faible, avec un facteur supplémentaire 3, de cette inégalité, et une version L^p de celle-ci :

$$\|f'\|_p \leq 3n\,\|f\|_p,\ \forall\, 1 \leq p \leq \infty,\ \forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n. \tag{4}$$

a) Soit $g(x) := e^{\imath nx}\, f(x)$. Si f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$, montrer l'identité suivante (avec F_n le polynôme de Fejér, et T_n comme dans l'exercice précédent) :

$$f'(x) = \imath n\, f(x) - 2\imath n\, e^{-\imath nx}\,(g * F_n)(x) = \imath n\, f(x) - 2\imath n\, e^{-\imath nx}\,(T_n(g))(x), \forall\, x \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

b) En déduire (4).

Pour la suite de cet exercice (inégalités faibles de Bernstein (II)), voir l'exercice $\#$ 42 de la feuille d'exercices de synthèse et avancés.

Exercices de synthèse et avancés

Exercice # 1. (Combien de points y a-t-il dans $[0,1[$?) Si $x \in [0,1[$, soit $x = 0, a_1 a_2 \ldots$ son écriture en base 2. Soit

$$f : [0,1[\to \mathscr{P}(\mathbb{N}^*),\ f(x) := \{n \in \mathbb{N}^* \, ; \, a_n = 0\}.$$

a) Montrer que f est injective.

b) Montrer que

$$\mathscr{P}(\mathbb{N}^*) \backslash f([0,1[) = \mathscr{P}_f(\mathbb{N}^*) := \{A \subset \mathbb{N}^* \, ; \, A \text{ est finie}\}.$$

c) Montrer que $\mathscr{P}_f(\mathbb{N}^*)$ est dénombrable. Il existe donc une bijection $\Phi : \mathbb{N} \to \mathscr{P}_f(\mathbb{N}^*)$.

d) Donner un exemple de fonction injective $\Psi : \mathbb{N} \to [0,1[$.

e) Soit

$$F : [0,1[\to \mathscr{P}(\mathbb{N}^*), F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } x \notin \Psi(\mathbb{N}) \\ f(\Psi(n)), & \text{si } x = \Psi(2n) \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ \Phi(n), & \text{si } x = \Psi(2n+1) \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \end{cases}.$$

Montrer que F est bijective. Il y a donc « autant » de points dans $[0,1[$ que de parties de $\mathbb{N}^*$.

Exercice # 2. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes.

1. $\limsup_n A_n = \liminf_n A_n$.
2. Pour tout $x \in X$: soit $\exists\, n_0$ (dépendant de x) tel que $x \in A_n$, $\forall\, n \geq n_0$, soit $\exists\, n_0$ (dépendant de x) tel que $x \notin A_n$, $\forall\, n \geq n_0$.

Exercice # 3. (Exemple d'ensemble non borélien) Définissons, pour $x, y \in [0,1]$, la relation $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$.

a) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

Nous pouvons donc écrire $[0,1]$ comme l'union des classes d'équivalence, qui sont deux à deux disjointes : $[0,1] = \cup_{i \in I} C_i$.

Prenons, pour chaque i, un élément et un seul $x_i \in C_i$ et définissons $A := \{x_i \, ; \, i \in I\}$.

Posons $A_q := \{q\} + A$, $\forall\, q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]$.

b) Montrer que $A_q \cap A_r = \varnothing$ si $q \neq r$.

c) Montrer que $[0,1] \subset \cup_{q \in \mathbb{Q} \cap [-1,1]} A_q \subset [-1,2]$.

d) En supposant A borélien, calculer $\nu_1(A_q)$ en fonction de $\nu_1(A)$.

e) En déduire que $1 \leq \infty \cdot \nu_1(A) \leq 3$.

f) Conclusion : A n'est pas borélien.

g) Renforcer la conclusion à : A n'est pas Lebesgue mesurable.

h) (On ne peut pas bien mesurer toutes les parties de $\mathbb{R}$) Si $\mu : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to [0,\infty]$ est une mesure invariante par translations, alors soit $\mu = 0$, soit $\mu(I) = \infty$ pour tout intervalle non dégénéré $I \subset \mathbb{R}$.

Exercice # 4. (Caractérisation des tribus sur les ensembles a. p. d.) Rappelons, pour commencer, quelques propriétés des relations d'équivalence.

1. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur X. Soient $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ les classes d'équivalence relatives à $\mathscr{R}$. Alors ces classes forment une *partition* de X.
2. Réciproquement, si $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ est une partition de X, et si nous définissons la relation

$$x \sim y \text{ si et seulement si il existe un } i \in I \text{ tel que } x, y \in \mathscr{X}_i,$$

alors $\sim$ est une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont précisément $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$.

Montrer les résultats suivants.

a) Si $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ est une partition a. p. d. de X et si nous posons $\mathscr{A} := \{\mathscr{X}_i\,;\, i \in I\}$, alors

$$\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \{\cup_{J\subset I}\mathscr{X}_i\,;\, J \subset I\}.$$

b) Si, dans la question précédente, I est finie, alors $\mathscr{C}(\mathscr{A}) = \mathscr{T}(\mathscr{A})$.

c) Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur X. Définissons une relation, de manière négative, par :

$$x \not\sim y \text{ si et seulement si } \exists\, A \in \mathscr{T} \text{ tel que } x \in A \text{ et } y \notin A.$$

(i) Écrire la condition $x \sim y$.

(ii) Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

(iii) Supposons X a. p. d. Notons $(\mathscr{X}_i)_{i\in I}$ les classes d'équivalence de $\sim$. Montrer que

$$\mathscr{T} = \{\cup_{J\subset I}\mathscr{X}_i\,;\, J \subset I\}.$$

d) Comment obtient-on *toutes* les tribus sur un ensemble a. p. d. ?

Exercice # 5. Montrer que λ_1, la mesure de Lebesgue (complète) sur $\mathbb{R}$, est donnée par la formule

$$\lambda_1(A) = \inf\left\{\sum(b_j - a_j)\,;\, A \subset \cup]a_j, b_j[\right\},\ \forall\, A \in \mathscr{L}_1.$$

Exercice # 6. (Ensemble *maigre* de Cantor) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$, avec la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$ et la mesure de Lebesgue ν_1.

a) Si I est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors nous notons $\widetilde{I}$ l'union des deux intervalles obtenus en enlevant de I l'intervalle ouvert qui a le même centre que I et dont la longueur est un tiers de celle de I. Exemple : si $I := [-3, 3]$ (de centre 0), alors l'intervalle ouvert qui est enlevé est $]-1, 1[$, et donc $\widetilde{I} = [-3, -1] \cup [1, 3]$.

De manière équivalente, si $I := [a, b]$ alors $\widetilde{I} := [a, a + (b-a)/3] \sqcup [a + 2(b-a)/3, b]$. Montrer que $\widetilde{I}$ est un borélien, et calculer $\nu_1(\widetilde{I})$ en fonction de $\nu_1(I)$.

b) Nous construisons par récurrence une suite $(C_j)_{j\geq 0}$ décroissante d'ensembles de la manière suivante :

(i) $C_0 = [0, 1]$

(ii) Si C_j s'écrit comme une union finie d'intervalles fermés d. d. d. : $C_j = \sqcup_{\ell=1}^m I_\ell$, alors C_{j+1} est défini comme $C_{j+1} := \sqcup_{\ell=1}^m \widetilde{I}_\ell$.

c) Dessiner C_0, C_1, C_2.

d) Montrer que C_j est un borélien, $\forall\, j$.

e) Calculer $\nu_1(C_j)$, $j = 0, 1, 2$.

f) Proposer et montrer une formule pour $\nu_1(C_j)$.

g) Posons $C := \cap_{j\geq 0} C_j$. Montrer que C est un compact non vide infini.

h) Calculer $\nu_1(C)$.

i) En examinant l'écriture en base 3 des points de chaque C_j, puis de C, montrer qu'il y a « autant » de points dans C que dans $[0, 1]$. Plus précisément, en utilisant les bases 3 et 2, déterminer une surjection entre C et $[0, 1]$. Puis, conclure en utilisant le théorème de Cantor-Bernstein.

Exercice # 7. (Théorème d'Egoroff) † Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ *finie*. Soient $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles que $f_n \to f$ (convergence simple). Le théorème d'Egoroff affirme que $f_n \to f$ « presque uniformément », au sens suivant :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, C \in \mathscr{T} \text{ tel que } \mu(C) < \varepsilon \text{ et } f_n \to f \text{ uniformément sur } X \backslash C.$$

(La convergence uniforme reviendrait à $C = \emptyset$.)

Prouver ce résultat comme suit.

Soit $(N_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$. Posons

$$A_{k,N_k} := \left\{ x \in X\, ;\, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},\ \forall\, n \geq N_k \right\},$$
$$B := \cap_{k\geq 1} A_{k,N(k)}.$$

(L'ensemble B dépend à la fois de la suite $(f_n)_n$ et de la suite $(N_k)_k$.)

a) Montrer que $A_{k,N_k}, B \in \mathscr{T}$.

b) Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur B.

c) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que $\mu(X \backslash A_{k,N_k}) < \varepsilon/2^k$.

d) Pour N_k comme dans la question précédente, montrer que $\mu(X\backslash B) < \varepsilon$. Conclure.

Exercice # 8. (Une partie borélienne bornée de $\mathbb{R}$ est « proche » d'une union finie d'intervalles)

a) Soit $B \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ un ensemble borné. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe des intervalles ouverts et d. d. d. $I_1, \ldots, I_k$ tels que $U := \sqcup I_j$ soit « proche » de B, au sens suivant :

$$\lambda_1(B\backslash U) < \varepsilon \text{ et } \lambda_1(U\backslash B) < \varepsilon.$$

b) Même conclusion si $B \in \mathscr{L}_1(\mathbb{R})$ est de mesure finie.

c) Une propriété similaire est vraie pour la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ (avec des pavés de $\mathbb{R}^n$ à la place des intervalles). Essayer de montrer ce résultat en utilisant les ingrédients suivants : la mesure de Lebesgue est une mesure de Radon, et le lemme 9.7 du support de cours.

†. Ou Egorov.

Exercice # 9. (Théorème de Louzine[‡]) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable. Le théorème de Louzine affirme que f est « presque continue », au sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction *continue* $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ et un ensemble borélien $B \subset [0,1]$ tels que $\nu_1(B) < \varepsilon$ et $f = g$ sur $[0,1]\backslash B$.

Nous nous proposons d'établir une forme plus faible de ce résultat, prouvée par Vitali : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble borélien $B \subset [0,1]$ tel que $\nu_1(B) < \varepsilon$ et tel que la restriction de f à $[0,1]\backslash B$ soit continue.

Le passage du résultat de Vitali à celui de Louzine nécessite un résultat de topologie, dû à Urîsohn, que nous ne donnerons pas ici. Un cas particulier de ce résultat nous sera utile pour la question a) : si F, G sont des *fermés non vides* et *disjoints* dans un espace métrique X, alors la fonction

$$X \ni x \mapsto \frac{\operatorname{dist}(x,G)}{\operatorname{dist}(x,f) + \operatorname{dist}(x,G)}$$

est continue sur X, vaut 1 sur F et 0 sur G.

a) Montrer le théorème de Louzine si f est la fonction caractéristique d'un ensemble Lebesgue mesurable A. Indication : « encadrer » A grâce à un fermé et un ouvert.
b) Montrer le théorème de Louzine pour une fonction étagée.
c) En utilisant les questions précédentes et le théorème d'Egoroff, montrer le théorème de Vitali.

Exercice # 10. (Lemme de Brezis-Lieb si $0 < p \leq 1$) Cet exercice fait echo à l'exercice # 13 de la feuille # 7. *Préliminaire.* Un cas particulier du lemme de Fatou est le suivant. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f_n \geq 0$ est mesurable, $\forall\, n$, et $f_n \to f$ (simplement), alors $\int f \leq \liminf_n \int f_n$. Le lemme de Brezis-Lieb, qui s'applique à des situations plus générales, permet, dans ce cas particulier, de « mesurer » l'écart entre $\displaystyle\int f$ et $\displaystyle\liminf_n \int f_n$.

Dans ce qui suit, les fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ sont supposées mesurables, avec $(X, \mathscr{T}, \mu)$ mesuré.

a) Supposons $f_n \to f$ et f intégrable. Montrer que

$$\int |f_n| = \int |f| + \int |f_n - f| + o(1) \text{ quand } n \to \infty.$$

On pourra commencer par établir l'inégalité

$$-|f| \leq |f_n| - |f_n - f| \leq |f|$$

et utiliser le théorème de convergence dominée.
b) De même si μ est complète et la convergence $f_n \to f$ est p. p.
c) En déduire le corollaire suivant : si u_n, u sont des fonctions mesurables positives telles que $u_n \to u$ p. p., et si $\int u_n \to \int u < \infty$, alors $\int |u_n - u| \to 0$.
d) (Attention, hypothèse inhabituelle concernant p) Soit $0 < p < 1$. En reprenant la preuve de a), montrer le résultat suivant. Si $f_n \to f$ et $\int |f|^p < \infty$, alors

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \to \infty.$$

‡. Ou Luzin, ou Lusin.

Exercice # 11. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\,dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}.$$

Exercice # 12. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré tel que $0 < \mu(X) < \infty$. Si $f : X \to \mathbb{R}$ est intégrable, montrer qu'il existe $x_0, y_0 \in X$ tels que

$$f(y_0) \leq ⨍ f := \frac{\displaystyle\int_X f\,d\mu}{\mu(X)} \leq f(x_0).$$

Exercice # 13. Dans ce qui suit, $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes. Le problème que nous étudions est le suivant : montrer qu'il existe $J \subset [\![1, \ldots, n]\!]$ tel que la somme $S_J := \left|\sum_{j\in J} z_j\right|$ soit « grande ». Précisons d'abord le problème. Nous avons

$$S_J \leq \sum_{j\in J} |z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| := S,$$

et donc S_J ne peut pas dépasser S. Nous nous proposons de montrer qu'il existe J tel que « S_J soit une partie significative de S ».

Clairement, pour $n = 1$ le meilleur choix est de prendre $J := \{1\}$, et dans ce cas $S_1 = S = |z_1|$. Étudions le cas $n \geq 2$.

a) Si $n = 2$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} |z_j|,$$

et que la constante $\frac{1}{2}$ est la meilleure possible.

b) Si $n = 3$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} |z_j|,$$

et que la constante $\frac{1}{3}$ est la meilleure possible.

c) (Je ne connais pas la réponse) Quelle est la meilleure constante si $n = 4$?

En tout cas, elle n'est pas $\frac{1}{4}$. En effet, nous allons montrer le résultat suivant.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ \exists\, J \subset [\![1, n]\!] \text{ tel que } S_J \geq \frac{1}{\pi} S. \tag{1}$$

Dans ce qui suit, le produit scalaire des nombres complexes $\langle\ ,\ \rangle$ est le *produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^2$.

d) Soit $\omega = e^{\imath t}$ un nombre complexe de module 1. Posons

$$J_t := \{j \in [\![1, n]\!]\,;\ \langle z_j, \omega\rangle \geq 0\}.$$

(Donc J_t contient les j tels que l'angle entre z_j et ω soit $\leq \pi/2$.)
Montrer que

$$\left|\sum_{j\in J_t} z_j\right| \geq \sum_{j\in J_t}\langle z_j, \omega\rangle = \sum_{j=1}^{n}\langle z_j, \omega\rangle_+. \tag{2}$$

Rappelons que x_+ est la partie positive de x : $x_+ := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

e) Calculer

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n}\langle z_j, e^{\imath t}\rangle_+ \, dt$$

et obtenir (1) grâce à (2) et à l'exercice précédent.

Exercice # 14. Obtenir, à partir de l'inégalité de Jensen, l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\sum_{j=1}^{n}(a_j)^2 \sum_{j=1}^{n}(b_j)^2 \geq \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\, b_j\right)^2, \ \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, a_1, \ldots a_n,\ b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}.$$

On pourra commencer par le cas où $b_j > 0$, $\forall\, j$.

Exercice # 15. (Lemme de Lebesgue) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré.

a) Soit $(A_n)_{n\geq 0} \subset \mathscr{T}$ une suite telle que $\sum_{n\geq 0} \mu(A_n) < \infty$. Montrer que $\chi_{A_n} \to 0$ μ-p. p.
b) Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une application intégrable. Montrer, à l'aide de la question précédente, le *lemme de Lebesgue* :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0 \text{ tel que } [A \in \mathscr{T},\ \mu(A) \leq \delta] \implies \int_A |f|\, d\mu < \varepsilon.$$

Voici une autre approche pour montrer ce lemme.

c) Montrer le résultat lorsque f est étagée, en prenant $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\max|f|}$.
d) Soit f intégrable.
   (i) Montrer qu'il existe g étagée positive telle que $g \leq |f|$ et $\int g > \int |f| - \varepsilon/2$.
   (ii) Montrer que nous pouvons prendre $\delta(\varepsilon, f) := \delta(\varepsilon/2, g)$.

Exercice # 16. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions μ-intégrables qui convergent vers 0 μ-p. p. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n \int f_n = \int \sum_{n\geq 0}(-1)^n f_n.$$

On pourra utiliser la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.

Exercice # 17. Nous nous plaçons dans le cadre du théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre(s) (théorème 7.14). Supposons que Λ est connexe. Montrer que nous pouvons, dans les hypothèses du théorème, remplacer l'hypothèse (i) par l'hypothèse plus faible
(i') pour tout $\lambda \in \Lambda$, la fonction $f(\cdot, \lambda)$ est mesurable, et il existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tel que $f(\cdot, \lambda_0)$ soit intégrable.

Exercice # 18. (Unicité des mesures *à la* Lebesgue)

I. Soit (X,d) un espace métrique tel que

$$\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X = \mathscr{B}_{X\times X} \tag{3}$$

(nous verrons en partie II de l'exercice une condition *suffisante* pour la validité de (3)).

Exemple : $X = \mathbb{R}^n$ muni de l'une des métriques induites par une norme $\| \ \|$.

Une mesure borélienne μ sur X est *uniformément répartie* si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall\, x, y \in X, \forall\, r > 0,\ 0 < \mu(B(x,r)) = \mu(B(y,r)) < \infty.$$

Le but de cet exercice est de montrer que deux mesures uniformément réparties sont proportionnelles.

En admettant cette conclusion, nous obtenons une autre caractérisation de la mesure de Lebesgue (voir l'item i) ci-dessous).

Soient μ et ν deux mesures uniformément réparties. Soient $g(r) := \mu(B(x,r))$, $h(r) := \nu(B(x,r))$, $\forall\, r > 0$ (ces fonctions dépendent de r, mais pas de $x \in X$).

Dans ce qui suit, U désigne un ouvert non vide et borné de X.

a) Montrer que μ et ν sont σ-finies.

b) Montrer que $0 < \mu(U) < \infty$ et $0 < \nu(U) < \infty$.

c) Montrer que $V := \{(x,y)\,;\, x,\ y \in U,\ d(x,y) < r\}$ est un borélien de $X \times X$.

d) Montrer que

$$U \ni x \mapsto \nu(U \cap B(x,r))$$

est borélienne.

e) Montrer que

$$\int_U \nu(U \cap B(x,r))\, d\mu(x) = \int_U \mu(U \cap B(y,r))\, d\nu(y).$$

(On pourra calculer $\mu \otimes \nu(V)$.)

f) Montrer que

$$\mu(U) = \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U (\nu(U \cap B(x,r)))\ d\mu(x),$$
$$\nu(U) = \lim_{r\searrow 0} \frac{1}{g(r)} \int_U (\mu(U \cap B(y,r)))\ d\nu(y).$$

g) En déduire qu'il existe un réel $0 < C < \infty$ (indépendant de U) tel que $\mu(U) = C\,\nu(U)$.

h) Conclure.

i) Soit d la distance induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence suivante :

  (i) μ est uniformément répartie sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

  (ii) Il existe $0 < C < \infty$ telle que $\mu = C\,\nu_n$.

II. Nous donnons ici une condition *suffisante* pour la validité de (3), condition qui est satisfaite en particulier par $\mathbb{R}^n$ avec l'une de ses métriques usuelles.

Voici une question d'échauffement (voir l'exercice # 22 de la feuille # 2).

a) Montrer que, si (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques *arbitraires*, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X\times Y}$. (Penser à la preuve de l'inclusion $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.)
Donc si une inclusion pose problème dans la vérification de (3), il s'agit de $\mathscr{B}_{X\times Y} \subset \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$. *En général, cette inclusion est fausse,* mais donner un contre-exemple dépasse le cadre de cet exercice.

Un espace métrique (X, d) est *séparable* s'il existe un ensemble a. p. d. $A \subset X$ dense dans X, donc tel que $\overline{A} = X$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est séparable.

c) Si X est séparable, montrer que pour tout ouvert U nous avons

$$U = \cup_{\substack{a\in A, r\in\mathbb{Q}\\ B(a,r)\subset U}} B(a, r).$$

d) Si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, montrer que $X \times Y$ est séparable.

e) Si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, montrer que les ouverts de $X \times Y$ appartiennent à $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$.

f) En déduire que, si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_{X\times Y}$.
Cas particulier : $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

Exercice # 19. (Changement de variables) Soient $f, g :]0, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes. Montrer que

$$\int_{]0,\infty[^2} f\left(\frac{x}{y}\right) g(xy)\, dxdy = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx \int_0^\infty g(x)\, dx.$$

Exercice # 20. (Difféomorphisme qui préserve la mesure) Soit $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un C^1-difféomorphisme.

Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

1. Φ *préserve la mesure,* au sens suivant :

$$\nu_n(\Phi(U)) = \nu_n(U),\ \forall\, U \subset \mathbb{R}^n \text{ ouvert.}$$

2. $[J_\Phi(x) = 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n]$ ou $[J_\Phi(x) = -1,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^n]$.

Exercice # 21. (Mesure superficielle) Si $S \subset \mathbb{R}^3$, nous définissons la *mesure superficielle* (aire) $\mathscr{A}(S)$ de S par

$$\mathscr{A}(S) := \lim_{\varepsilon\to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}\, \nu_3(\{x \in \mathbb{R}^3\, ;\, \mathrm{dist}(x, S) \le \varepsilon\})$$

(si l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3\, ;\, \mathrm{dist}(x, S) \le \varepsilon\}$ est borélien pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et si la limite existe). Calculer $\mathscr{A}(S)$ si :

a) S est une sphère.

b) S est un compact contenu dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$).

Exercice # 22. (Mesurabilité) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{L}_n, \lambda_n)$. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable. Soient $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $g(x) := f(x - y)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$ (avec $y \in \mathbb{R}^n$ fixé), $h(x, y) := f(x - y)$, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}^n$.

a) Peut-on invoquer un résultat théorique et en déduire que g et h sont Lebesgue mesurables ?

b) Que peut-on dire de g et h si f est borélienne ?

c) Montrer que g et h sont Lebesgue mesurables.

Exercice # 23. (Intégration par parties (I)) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$ et $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

a) Soit $g \in C(\mathbb{R})$ intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(R_j)_j \subset [0, \infty[$ telle que $R_j \to \infty$, $g(R_j) \to 0$ et $g(-R_j) \to 0$.

b) Soit $h \in C^1(\mathbb{R})$, avec h et h' intégrables.

  (i) Montrer que $\int_{\mathbb{R}} h' = 0$.

  (ii) Montrer que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\eta} h'(x)\, dx = \imath\eta \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\eta} h(x)\, dx$.

c) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, avec f et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ intégrables. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx = \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

d) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $0 < M < \infty$. Proposer et montrer une formule de la forme

$$\begin{aligned}\int_{[-M,M]^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = &\int_{[-M,M]^{n-1}} h(x_2, \ldots, x_n)\, d(x_2, \ldots, x_n)\\ &- \int_{[-M,M]^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.\end{aligned}$$

e) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ bornées telles que f, g, $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, $\dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ soient intégrables. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.$$

Exercice # 24. (Intégration par parties (II)) Nous travaillons dans $([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1$. Soient $F(x) := \int_{[0,x]} f(t)\, dt$, $G(x) := \int_{[0,x]} g(t)\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.

a) Montrer que F et G sont bien définies.

b) Montrer que F et G sont continues et bornées.

c) Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_0^\infty F(x) g(x)\, dx = \int_0^\infty f(x)\, dx \int_0^\infty g(x)\, dx - \int_0^\infty f(x) G(x)\, dx.$$

Exercice # 25. (Calcul d'intégrales oscillantes) Pour $0 < a < 2$, soit

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx \text{ (intégrale généralisée).}$$

1. En établissant et utilisant l'identité

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt}\, dt,\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x > 0,$$

montrer que

$$I(a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2 + 1}\, dt.$$

2. En se ramenant à un calcul de fonction Bêta d'Euler, montrer que

$$I(a) = \frac{\Gamma(a/2)\,\Gamma(1-a/2)}{2\,\Gamma(a)}.$$

Exercice # 26. (Pseudo-changement de variables) Soit $\phi \in C^1([a,b],[c,d])$ telle que $\phi(a) = c$ et $\phi(b) = d$. Nous nous proposons de montrer l'égalité

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(y))\,\phi'(y)\,dy,\ \forall\, f : [c,d] \to \mathbb{R} \text{ borélienne et bornée.} \tag{4}$$

a) Soit $K \subset \mathbb{R}$ un compact. Montrer qu'il existe une suite $(f_j)_j \subset C_c^\infty(\mathbb{R},[0,1])$ telle que $f_j \searrow \chi_K$. Indication : lemme d'Urîsohn.

b) (i) Prouver (4) si $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ est continue.
 (ii) Prouver (4) si $f := \chi_K$, avec $K \subset [c,d]$ compact.
 (iii) Soit

$$\mathscr{A} := \{B \in \mathscr{B}_{[c,d]}\,;\, f = \chi_B \text{ satisfait (4)}\}.$$

 Montrer que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_{[c,d]}$. Indication : classe monotone.
 (iv) Prouver (4) si $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ est borélienne et bornée.

Exercice # 27. (Formule de l'indicatrice de Banach (I)) Soient $I :=]a,b[\subset \mathbb{R}$ et $\Phi \in C^1(I,\mathbb{R})$. Soient

$$F := \{x \in I\,;\, \Phi'(x) = 0\},\ V := I\backslash F,\ Y := \Phi(V) \text{ et } W := \Phi(I).$$

Soit $\#A := \begin{cases} \text{card}\, A, & \text{si } A \text{ est fini} \\ \infty, & \text{sinon} \end{cases}.$

Nous nous proposons de montrer les propriétés suivantes.

1. $W \subset \mathbb{R}$ est borélien.
2. Si $f : W \to [0,\infty[$ est borélienne, alors

$$W \ni x \mapsto f(x)\,\#\Phi^{-1}(x) \in [0,\infty] \text{ et } I \ni y \mapsto f(\Phi(y))\,|\Phi'(y)| \in [0,\infty[$$

 sont Lebesgue mesurables.
3. La *formule de l'indicatrice de Banach* :

$$\int_W f(x)\,\#\Phi^{-1}(x)\,dx = \int_I f(\Phi(y))\,|\Phi'(y)|\,dy.$$

Voici la démarche proposée.

a) Montrer que Y est un ouvert.
b) Montrer que $Y \ni x \mapsto \#[\Phi^{-1}(x) \cap V] \in [0,\infty]$ est borélienne.
c) Montrer que, avec f comme ci-dessus,

$$\int_V f(\Phi(y))\,|\Phi'(y)|\,dy = \int_{\Phi(V)} f(x)\,\#[\Phi^{-1}(x) \cap V]\,dx.$$

d) Soit $K \subset U$ un compact. Montrer que

$$\nu_1(\Phi(K)) \leq \max_{x \in K} |\Phi'(x)| \, \nu_1(K).$$

Indication : recouvrir K avec des intervalles disjoints, chacun de longueur ε.

e) Montrer que $\Phi(F)$ est borélien et que $\nu_1(\Phi(F)) = 0$.

f) Obtenir les résultats désirés.

g) Montrer que les résultats restent vrais en supposant f Lebesgue mesurable au lieu de borélienne.

Exercice # 28. (Formule de l'indicatrice de Banach (II)) Soient $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $\Phi \in C^1(U, \mathbb{R}^n)$. Soient

$$F := \{x \in U \, ; \, J_\Phi(x) = 0\}, \ V := U \backslash F, \ Y := \Phi(V) \text{ et } W := \Phi(U).$$

Nous nous proposons de montrer les propriétés suivantes.

1. $W \subset \mathbb{R}^n$ est borélien.
2. Si $f : W \to [0, \infty[$ est borélienne, alors

$$W \ni x \mapsto f(x) \, \#\Phi^{-1}(x) \in [0, \infty] \text{ et } U \ni y \mapsto f(\Phi(y)) \, |J_\Phi(y)| \in [0, \infty[$$

sont Lebesgue mesurables.

3. La *formule de l'indicatrice de Banach* :

$$\int_W f(x) \, \#\Phi^{-1}(x) \, dx = \int_U f(\Phi(y)) \, |J_\Phi(y)| \, dy.$$

Voici la démarche proposée.

a) Montrer que Y est un ouvert. Indication : théorème d'inversion locale.

b) Montrer que $Y \ni x \mapsto \#[\Phi^{-1}(x) \cap V] \in [0, \infty]$ est borélienne.

c) Montrer que, avec f comme ci-dessus,

$$\int_V f(\Phi(y)) \, |J_\Phi(y)| \, dy = \int_{\Phi(V)} f(x) \, \#[\Phi^{-1}(x) \cap V] \, dx.$$

d) Question d'échauffement. Supposons $0 \in F$. Montrer que

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\nu_n(\Phi([0, \varepsilon[^n)}{\varepsilon^n} = 0.$$

e) Soit $K \subset F$ un compact. Montrer que

$$\nu_n(\Phi(K)) = 0.$$

Indications : recouvrir K avec des cubes de taille ε et utiliser le raisonnement de la question précédente.

f) Montrer que $\Phi(F)$ est borélien et que $\nu_n(\Phi(F)) = 0$.

g) Obtenir les résultats désirés.

h) Montrer que les résultats restent vrais en supposant f Lebesgue mesurable au lieu de borélienne.

Exercice # 29. (Dérivée de l'intégrale) Nous travaillons dans $([0,\infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soit $f \in \mathscr{L}^1$. Soit $F(x) := \int_{[0,x]} f(t)\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.

Soit $g \in C([0,\infty[)$.

a) Montrer que $[0,\infty[\ni x \mapsto h(x) := \int_{[0,x]} g(t) f(x-t)\, dt$ est continue.

b) Montrer que $x \mapsto \int_0^x g(t)F(x-t)\, dt$ est de classe C^1, de dérivée h.

Exercice # 30. (Inégalités pour des opérateurs à noyau ; cas des exposants non-conjugués) Cet exercice fait suite à l'exercice # 19 de la feuille # 7. Nous travaillons dans un espace produit $(X \times Y, \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}, \mu \otimes \nu)$, avec μ et ν σ-finies. Toutes les fonctions considérées sont *mesurables* et, par souci de simplicité, *positives*. Un *noyau* est une fonction $K : X \times Y \to \mathbb{R}_+$. Le conjugué d'un exposant s sera noté s'.

Soient $1 < p, q < \infty$ deux exposants. Nous supposons que

$$\lambda := 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{q} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} < 1,$$

ce qui, en particulier, implique que p et q ne sont pas conjugués. Nous voulons majorer les quantités

$$A = A(f,g) := \int_{X\times Y} K^\lambda(x,y)\, f(x)\, g(y)\, d\mu \otimes \nu(x,y), \text{ avec } f : X \to \mathbb{R}_+,\ g : Y \to \mathbb{R}_+,$$

$$B = B(f) := \left\| y \mapsto \int_Y K^\lambda(x,y)\, f(x)\, d\mu(x) \right\|_{q'} \text{ avec } f : X \to \mathbb{R}_+.$$

a) À quelle condition sur λ correspond l'exercice # 19 de la feuille # 7 ?

b) Rappeler pourquoi

$$B(f) = \sup\{A(f,g)\,;\, g \in \mathscr{L}^q(Y;R_+),\ \|g\|_q \leq 1\}.$$

c) Montrer les identités suivantes :

$$1 = \frac{p}{q'} + p(1-\lambda) \text{ et } 1 = \frac{q}{p'} + q(1-\lambda).$$

d) Soient $\alpha, \beta : X \to \mathbb{R}_+^*$, $\gamma, \delta : Y \to \mathbb{R}_+^*$. En utilisant les identités précédentes, montrer l'identité

$$\begin{aligned} K^\lambda(x,y)\, f(x)\, g(y) = &\left([K(x,y)]^{1/q'}\, \frac{\beta(x)}{\gamma(y)}\, f^{p/q'}(x) \right) \\ &\times \left([K(x,y)]^{1/p'}\, \frac{\delta(y)}{\alpha(x)}\, g^{q/p'}(y) \right) \\ &\times \left(f^{p(1-\lambda)}(x)\, g^{q(1-\lambda)}(y)\, \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \frac{\gamma(y)}{\delta(y)} \right). \end{aligned} \tag{5}$$

e) En utilisant (5), l'inégalité de Hölder à trois exposants (q', p' et $1/(1-\lambda)$) et le théorème de Tonelli, obtenir l'inégalité

$$
\begin{aligned}
A(f,g) \le & \left(\int_X F(x)\,\beta^{q'}(x)\,f^p(x)\,d\mu(x)\right)^{1/q'} \\
& \times \left(\int_Y G(y)\,\delta^{p'}(y)\,g^q(y)\,d\nu(y)\right)^{1/p'} \\
& \times \left(\int_X \left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^{1/(1-\lambda)} f^p(x)\,d\mu(x)\right)^{1-\lambda} \\
& \times \left(\int_Y \left(\frac{\gamma(y)}{\delta(y)}\right)^{1/(1-\lambda)} g^q(y)\,d\nu(y)\right)^{1-\lambda},
\end{aligned} \tag{6}
$$

où

$$F(x) := \int_Y \frac{K(x,y)}{\gamma^{q'}(y)} d\nu(y),\ G(y) := \int_X \frac{K(x,y)}{\alpha^{p'}(x)}\, d\mu(x).$$

f) Notons que F dépend de K et γ, respectivement G dépend de K et α. Pour α et γ fixées, on *définit* β et δ par les équations

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right)^{1/(1-\lambda)} &= F(x)\,\beta^{q'}(x),\ \forall\, x \in X,\\
\left(\frac{\gamma(y)}{\delta(y)}\right)^{1/(1-\lambda)} &= G(y)\,\delta^{p'}(y),\ \forall\, y \in Y.
\end{aligned}
$$

Montrer que ces équations permettent en effet de définir β et δ et que, pour ce choix, (6) devient

$$
\begin{aligned}
A(f,g) \le & \left(\int_X [F(x)]^{p/q'}\,\alpha^p(x)\,f^p(x)\,d\mu(x)\right)^{1/p} \\
& \times \left(\int_Y [G(y)]^{q/p'}\,\gamma^q(y)\,g^q(y)\,d\nu(y)\right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{7}
$$

g) Comparer (7) à l'exercice # 19 de la feuille # 7 et montrer que (7) est vraie si

$$1 < p, q < \infty \text{ et } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \ge 1.$$

h) (Inégalité de Schur) En prenant $\alpha(x) \equiv 1$, $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir l'*inégalité de Schur*

$$B(f) \le \left[\sup_{x\in X} \int_Y K(x,y)\,d\nu(y)\right]^{1/p} \left[\sup_{y\in Y} \int_X K(x,y)\,d\mu(x)\right]^{1/q} \|f\|_p.$$

i) (Inégalité de Young) Soient $1 < P, Q < \infty$ tels que $\dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{Q} > 1$. On définit $1 < R < \infty$ par l'égalité $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{P} + \dfrac{1}{Q} - 1$.
En choisissant convenablement p et q, et en prenant $\alpha(x) \equiv 1$ et $\gamma(y) \equiv 1$, obtenir, pour $f, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$, l'*inégalité de Young* $\|h * f\|_R \le \|h\|_Q \|f\|_P$.

j) (Inégalité de Hardy à poids en 0) Soient $1 < p < \infty$, $0 < r < \infty$, et $h :]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$. En choisissant convenablement f et q et en prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, obtenir l'*inégalité de Hardy à poids en* 0

$$\int_0^\infty x^{-r-1}\left(\int_0^x h(y)\,dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{-r+p-1}h^p(x)\,dx.$$

k) (Inégalité de Hardy à poids à l'infini) Soient $1 < p < \infty$, $0 < r < \infty$, et $h :]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$. En choisissant convenablement f et q et en prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p+q)}$, obtenir l'*inégalité de Hardy à poids à l'infini*

$$\int_0^\infty x^{r-1}\left(\int_x^\infty h(y)\,dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{r+p-1}h^p(x)\,dx.$$

l) (Inégalités de Hardy-Littlewood-Pólya-Levin) On suppose $1 < p, q < \infty$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} \ge 1$. *Préliminaire.* Nous admettons la *formule des compléments* (due à Euler)

$$\int_0^\infty \frac{1}{(t+1)\,t^a}\,dt = \frac{\pi}{\sin(\pi a)},\ \forall\, 0 < a < 1.^{\ddagger}$$

En prenant $\alpha(x) = \gamma(x) = x^{1/(p'+q')}$, montrer les *inégalités de Hardy-Littlewood-Pólya-Levin*

$$\int_{]0,\infty[^2} \frac{f(x)g(y)}{(x+y)^\lambda}\,dxdy \le \left(\frac{\pi}{\sin(\pi p'/(p'+q'))}\right)^\lambda \|f\|_p\|g\|_q,$$
$$\int_0^\infty \left|\int_0^\infty \frac{f(x)}{(x+y)^\lambda}\,dx\right|^{q'} dy \le \left(\frac{\pi}{\sin(\pi p'/(p'+q'))}\right)^{(p'+q')/p'} \|f\|_p^{q'}.$$

Exercice # 31. (Inégalités de Hardy générales, encore) Cet exercice fait suite aux exercices # 19 e) et 20 de la feuille # 7, et aux items j) et k) de l'exercice précédent. Soient $1 \le p < \infty$, $0 < r < \infty$, et $h :]0,\infty[\to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Montrer l'*inégalité de Hardy à poids en* 0

$$\int_0^\infty x^{-r-1}\left(\int_0^x h(y)\,dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{-r+p-1}h^p(x)\,dx \tag{8}$$

et l'*inégalité de Hardy à poids à l'infini*

$$\int_0^\infty x^{r-1}\left(\int_x^\infty h(y)\,dy\right)^p dx \le \left(\frac{p}{r}\right)^p \int_0^\infty x^{r+p-1}h^p(x)\,dx. \tag{9}$$

Indications : si $p = 1$, il suffit d'utiliser le théorème de Tonelli. Si $1 < p < \infty$, on peut procéder comme dans l'exercice # 20 feuille # 7 : (i) établir d'abord (8) et (9) pour $h \in C_c^\infty([0,\infty[)$, *via* une intégration par parties ; (ii) établir le cas général par approximation.

Par ailleurs, pour $1 < p < \infty$, nous avons vu, dans l'exercice précédent, une preuve basée sur l'inégalité de Hölder à trois exposants. On peut également utiliser l'exercice # 19 de la feuille # 7 et se ramener à une inégalité de Hölder à deux exposants. Pour une troisième preuve, valide y compris pour $p = 1$, basée sur l'inégalité de Jensen, voir Stein et Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, chapitre 5, lemme 3.14.

‡. Cette identité peut s'obtenir, par exemple, en appliquant le théorème des résidus en analyse complexe.

Exercice # 32. (Construction d'une fonction dans $C_c^\infty(\mathbb{R})$) Nous travaillons dans $\mathbb{R}$ muni de la mesure de Lebesgue. Soit $G := \chi_{[0,1]}$. Pour $\varepsilon > 0$, soit

$$G_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} G\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

a) Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$, montrer que $f * G_\varepsilon \in C(\mathbb{R})$.

b) Plus généralement, si $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_j > 0$, montrer que $f * G_{\varepsilon_1} * \cdots * G_{\varepsilon_j} \in C^{j-1}(\mathbb{R})$. Et si $f \in C(\mathbb{R})$?

c) Soit $(\varepsilon_j)_{j \geq 0} \subset]0, \infty[$ une suite telle que $S := \sum_j \varepsilon_j < \infty$. Soit

$$f_0(x) := \begin{cases} (2/\varepsilon_0) - (2/\varepsilon_0)^2 \, |x - \varepsilon_0/2|, & \text{si } 0 \leq x \leq \varepsilon_0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Pour $j \geq 1$, soit $f_j := f_0 * G_{\varepsilon_1} * \cdots * G_{\varepsilon_j}$. Montrer que :
   (i) $f_j(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou si $x \geq \varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_j$.
   (ii) $f_j \in C^j$, $\forall\, j \geq 0$.
   (iii) $\left|(f_j)^{(k)}(x)\right| \leq 2^{k+1}/(\varepsilon_0\, \varepsilon_1 \ldots \varepsilon_k)$, $\forall\, x$, $\forall\, k \geq 0$, $\forall\, j \geq k$.
   (iv) $|f_{j+\ell}(x) - f_j(x)| \leq 2(\varepsilon_{j+1} + \cdots + \varepsilon_{j+\ell})/(\varepsilon_0\, \varepsilon_1)$, $\forall\, x$, $\forall\, j \geq 1$, $\forall\, \ell \geq 1$.
   (v) Trouver une majoration analogue à celle du point précédent pour $|f_{j+\ell}^{(k)}(x) - f_j^{(k)}(x)|$, $\forall\, x$, $\forall\, k \geq 0$, $\forall\, j \geq k+1$, $\forall\, \ell \geq 1$.

d) En déduire que la suite $(f_j)_j$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f avec les propriétés suivantes :
   i) $f \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, \infty[)$.
   ii) $f(x) = 0$ si $x \leq 0$ ou $x \geq S$.
   iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx = 1$ d'où, en particulier, $f \not\equiv 0$.

Exercice # 33. (Bases hilbertiennes de polynômes (I)) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide borné muni de la mesure de Lebesgue. Nous munissons $L^2 := L^2(I; \mathbb{R})$ du produit scalaire « usuel », $(f, g) := \int_I f\, g$.

a) Montrer que si deux fonctions polynomiales coïncident p. p. sur I, alors les polynômes correspondants sont égaux. Ainsi, nous pouvons identifier tout polynôme avec la fonction polynomiale associée sur I. (Expliquer.)

b) Montrer que nous avons l'appartenance « naturelle » (que l'on expliquera) $P \in L^p(I)$, $\forall\, 1 \leq p \leq \infty$, $\forall\, P \in \mathbb{R}[X]$.
   Soit $(P_k)_{k \geq 0} \subset \mathbb{R}[X]$ une suite de polynômes telle que :
   i) $\deg P_k = k$, $\forall\, k$.
   ii) (P_k) est une suite orthonormée dans L^2; c'est-à-dire, $(P_j, P_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } j \neq k \\ 1, & \text{si } j = k \end{cases}$, $\forall\, j, k \in \mathbb{N}$.

c) Montrer que $(P_k)_{k=0,\ldots,n}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$. †

d) En déduire que

$$P = \sum_{k=0}^{N} (P, P_k)\, P_k, \ \forall\, n \geq 0, \ \forall\, N \geq n, \ \forall\, P \in \mathbb{R}_n[X].$$

†. Ici, nous considérons $\mathbb{R}_n[X]$ comme un sous espace de L^2 – voir le début de l'item b).

e) Soient $f \in L^2$ et $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\|f - P\|_{L^2} < \varepsilon$. On pourra utiliser, par exemple, le théorème de Weierstrass : si $g \in C([a, b])$, alors il existe une suite de polynômes $(Q_n)_n$ telle que $Q_n \to g$ uniformément sur $[a, b]$.

f) En utilisant les questions précédentes, montrer que pour tout $f \in L^2$ nous avons

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, P_k)\, P_k, \text{ au sens où } \sum_{k=0}^{N} (f, P_k)\, P_k \to f \text{ dans } L^2 \text{ quand } N \to \infty \tag{10}$$

et donc $(P_k)_{k \geq 0}$ est une base hilbertienne de $L^2(I)$.

g) (Polynômes de Legendre) Soient $I :=]-1, 1[$ et $P_k \in \mathbb{R}[X]$ donnés par $P_k(x) := \alpha_k \dfrac{d^k}{dx^k} \left[(x^2 - 1)^k\right]$ (avec l'identification entre polynômes et fonctions polynomiales). Montrer que pour $\alpha_k > 0$ convenablement choisis (que l'on déterminera), la suite (P_k) satisfait i) et ii) et donc nous avons (10). Les P_k sont (à des constantes multiplicatives près) les *polynômes de Legendre*.

On pourra utiliser sans preuve la formule

$$\int_{-1}^{1} (1 - x^2)^k\, dx = \frac{2^{k+1}\, k!}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2k + 1)},\ \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

Pour d'autres exemples, voir l'exercice # 35.

Exercice # 34. Cet exercice prépare aux questions b) et c) de l'exercice 35. Soient $1 \leq p \leq \infty$ et $g \in L^p([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \lambda_{[0,\infty[})$.

a) Soit $\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C}\,;\ \operatorname{Re} z > 0\}$. Montrer que la fonction

$$\mathbb{H} \ni z \mapsto F(z) := \int_0^\infty g(t)\, e^{-zt}\, dt \in \mathbb{C}$$

est holomorphe.

b) Soit $a > 0$. On suppose que

$$\int_0^\infty t^n\, g(t)\, e^{-at}\, dt = 0,\ \forall\, n \geq 0. \tag{11}$$

(i) Montrer que

$$\int_0^\infty g(t)\, e^{-bt}\, dt = 0,\ \forall\, b \in]0, a].$$

(ii) En déduire que $F(z) = 0$, $\forall\, z \in \mathbb{H}$.

(iii) En utilisant le fait que la transformée de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ est injective, en déduire que $g = 0$.

c) De même, si $g \in L^p(\mathbb{R}, \mathscr{B}_\mathbb{R}, \lambda)$ et on remplace (11) par l'hypothèse

$$\int_\mathbb{R} t^n\, g(t)\, e^{-at^2}\, dt = 0,\ \forall\, n \geq 0,$$

avec $a > 0$, alors $g = 0$.

Exercice # 35. (Bases hilbertiennes de polynômes (II))

a) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle non-dégénéré et soit H un espace de Hilbert de (classes d'équivalence de) fonctions sur I tel que l'espace des fonctions polynomiales sur I : (i) s'identifie avec $\mathbb{R}[X]$, (ii) soit contenu dans H, et (iii) soit dense dans H. Si $(P_n)_{n\geq 0}$ est une famille orthonormée de fonctions polynomiales, avec $\deg P_n = n$, $\forall\, n \geq 0$, montrer que $(P_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de H.

b) (Polynômes de Laguerre) On munit $I := [0, \infty[$ de la tribu borélienne et de la mesure μ de densité e^{-x} par rapport à la mesure de Lebesgue. Montrer que, dans $L^2([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \mu)$, les *polynômes de Laguerre* :

$$Q_n(x) := \beta_n e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n\, e^{-x}),\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, x \geq 0,$$

(avec $\beta_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.

c) (Polynômes d'Hermite) On munit $\mathbb{R}$ de la tribu borélienne et de la mesure ν de densité $e^{-x^2/2}$. Montrer que , dans $L^2(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu)$, les *polynômes d'Hermite*

$$R_n(x) := (-1)^n \gamma_n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n}[e^{-x^2/2}],\ \forall\, n \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},$$

(avec $\gamma_n > 0$ constantes convenables) forment une base hilbertienne.

Exercice # 36. Cet exercice prépare aux questions c) et d) de l'exercice # 37.

Soit $(E_n)_{n\geq 0}$ une suite de sous-espaces de l'espace de Hilbert H telle que :

(i) E_n est de dimension finie, $\forall\, n \geq 0$.

(ii) $E_n \subset E_{n+1}$, $\forall\, n \geq 0$.

(iii) $E_0 \cup E_1 \cup \cdots$ est dense dans H.

On pose $E_{-1} := \{0\}$. Soit $\mathscr{F}_n$ une base orthonormée de $E_n \ominus E_{n-1}$, $n \geq 0$. Montrer que $\mathscr{F}_0 \cup \mathscr{F}_1 \cup \cdots$ est une base hilbertienne de H.

Exercice # 37. (Bases de Walsh et Haar) Soit $H := L^2([0, 1[, \mathscr{B}_{[0,1[}, \lambda_{[0,1[})$. Pour $n \geq 0$, soit

$$E_n := \{f : [0, 1[\to \mathbb{R}\,;\ f \text{ est constante sur } [j/2^n, (j+1)/2^n[,\ \forall\, j = 0, 1, \ldots, 2^n - 1\}.$$

a) Montrer que les E_n vérifient les hypothèses de l'exercice précédent.
Indication pour (iii) : si $f \in C_c(]0, 1[)$ et

$$f_n(x) := f(j/2^n), \forall\, n \geq 0,\ \forall\, 0 \leq j \leq 2^n - 1,\ \forall\, x \in [j/2^n, (j+1)/2^n[,$$

alors $f_n \to f$ uniformément sur $[0, 1[$.

b) Calculer $\dim E_n$, $n \geq 0$.

c) (Base de Walsh) Soit E la fonction partie entière. Montrer que les fonctions

$$\begin{aligned} w_I(x) &:= (-1)^{E(2^{n_1}x)}(-1)^{E(2^{n_2}x)} \cdots (-1)^{E(2^{n_k}x)}, \\ &\quad \forall\, k \geq 0,\ \forall\, I = \{n_1 < n_2 < \ldots < n_k\} \subset \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

(avec la convention $w_\varnothing = 1$), forment une base hilbertienne de H. C'est la *base de Walsh*.
Indication : si $n \geq 1$, montrer que $\{w_I\,;\ \max I = n\}$ est une famille orthonormée contenue dans $E_n \ominus E_{n-1}$.

d) (Base de Haar) Si $H_0 := 1$ et, pour $n \geq 0$ et $0 \leq j \leq 2^n - 1$,

$$H_{j+2^n}(x) := \begin{cases} 2^{n/2}, & \text{si } 2j/2^{n+1} \leq x < (2j+1)/2^{n+1} \\ -2^{n/2}, & \text{si } (2j+1)/2^{n+1} \leq x < (2j+2)/2^{n+1} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

montrer que $(H_k)_{k\geq 0}$ est une base hilbertienne de H. C'est la *base de Haar*.

Exercice # 38. (Théorème d'Orlicz) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide muni de la mesure de Lebesgue. Nous considérons une base hilbertienne $(e_k)_{k\geq 0} \subset \mathscr{L}^2$ de $L^2 = L^2(I)$. (De telles bases existent : voir, par exemple, l'exercice # 33.)

a) Montrer que, pour tout $f \in \mathscr{L}^2$, il existe une suite extraite (N_ℓ) (qui en principe dépend de f) telle que

$$\sum_{k=0}^{N_\ell} (f, e_k)\, e_k \to f \text{ p. p. quand } \ell \to \infty.$$

b) En déduire que, pour tout $f \in \mathscr{L}^2$, nous avons

$$[f(x)]^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} [(f, e_k)]^2 \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 = \|f\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 \quad \text{pour presque tout } x \in I. \tag{12}$$

c) En prenant, dans (12), $f := \chi_A$, avec A convenable, en déduire le *théorème d'Orlicz* : pour presque tout $x \in I$ nous avons $\sum_k [e_k(x)]^2 = \infty$.
Indication : commencer par l'ensemble

$$B := \left\{ x \in I \,;\, \sum_k [e_k(x)]^2 < \infty \right\}$$

et utiliser l'exercice # 47 de la feuille # 2 pour construire A.

Les définitions suivantes préparent aux exercices # 39– 41.

Définitions. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable.

i) Soient μ, ν deux mesures sur $\mathscr{T}$. ν est *absolument continue* par rapport à μ (et on écrit $\nu \ll \mu$) si, pour tout $A \in \mathscr{T}$, $\mu(A) = 0 \implies \nu(A) = 0$.

ii) Soient μ, ν deux mesures sur $\mathscr{T}$. μ et ν sont *étrangères* (et on écrit $\mu \perp \nu$) si on a $X = A \sqcup B$, avec $A, B \in \mathscr{T}$, $\mu(B) = 0$ et $\nu(A) = 0$.

iii) Soit $\mu : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$. (Notons que l'*on ne demande pas la positivité* de μ.) μ est une *mesure signée* si $\mu(\sqcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$, pour toute suite d. d. d. $(A_n) \subset \mathscr{T}$.

Exercice # 39. (Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue (I)) Nous nous proposons de montrer le

Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue. Soient μ, ν deux mesures σ-finies sur $\mathscr{T}$. Alors :

(a) Il existe une *fonction mesurable positive* $h : X \to [0, \infty]$ et une *mesure* ξ *étrangère à* μ telles que $\nu = h\,\mu + \xi$.

(b) h est unique μ-p. p. et ξ est unique.

(c) Si ν est absolument continue par rapport à μ, alors $\xi = 0$, et donc $\nu = h\,\mu$.

Dans les parties I et II, *nous supposons μ et ν finies*. Le cas général est traité dans la partie III.

I. *Existence de h et ξ*. Voici stratégie de preuve due à von Neumann. (Pour l'approche originale de Lebesgue et Hahn, voir l'exercice # 41.) Soit $\lambda := \mu + \nu$. Soit $H := L^2(X, \mathscr{T}, \lambda)$.

a) Montrer qu'il existe $g \in H$ tel que

$$\int_X f(x)\,d\nu(x) = \int_X f(x)\,g(x)\,d\lambda(x),\ \forall\, f \in H.$$

(Penser au théorème de représentation de Riesz.)

b) En déduire que $0 \leq g(x) \leq 1$ à la fois λ-p. p., ν-p. p. et μ-p. p. En déduire que l'on peut supposer $0 \leq g \leq 1$ partout.

c) Montrer que

$$\int_X f\,(1-g)\,d\nu = \int_X f\,g\,d\mu,\ \forall\, f \in H. \tag{13}$$

d) Montrer que (13) reste vraie pour toute fonction mesurable et positive f.

Soit $B := \{x \in X\,;\, g(x) = 1\}$.

e) Si $\nu \ll \mu$, montrer que B est μ- et ν-négligeable, et que l'on peut supposer $B = \varnothing$ et donc $0 \leq g < 1$.

f) Revenons au cas général. Posons $\xi(A) := \nu(A \cap B)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$ et

$$h(x) := \begin{cases} g(x)/(1-g(x)), & \text{si } x \notin B \\ 0, & \text{si } x \in B. \end{cases}$$

Montrer que $\xi \perp \mu$, que h est mesurable, et que, pour toute fonction mesurable positive f,

$$\int_X f\,d\nu = \int_B f\,d\xi + \int_{B^c} f\,d\nu = \int_X f\,d\xi + \int_X f\,h\,d\mu.$$

(Pour la dernière égalité, appliquer (13) à $f\chi_{B^c}/(1-g)$.)

g) En déduire les parties (a) et (c) du théorème.

II. *Unicité*. Soient $\nu = h_1\,\mu + \xi_1 = h_2\,\mu + \xi_2$ deux décompositions de ν comme dans le théorème.

a) Soient $A_1, A_2 \in \mathscr{T}$ tels que $\mu(A_j) = 0$ et $\xi_j(A_j^c) = 0$, $j = 1, 2$. Montrer que $\xi_1(A) = \xi_2(A)$: d'abord pour $A \in \mathscr{T}$ tel que $A \subset A_1 \cup A_2$; (ii) ensuite, pour tout $A \in \mathscr{T}$. En déduire que $\xi_1 = \xi_2$.

b) Montrer que $h_1 = h_2$ μ-p. p. et en déduire la partie (b) du théorème.

III. *Le cas des mesures σ-finies.* Traiter le cas général (où μ et ν sont σ-finies) en considérant une partition $X = \sqcup_n X_n$ avec $X_n \in \mathscr{T}$, $\mu(X_n) < \infty$, $\nu(X_n) < \infty$, $\forall\, n$.

Exercice # 40. (Théorème de Hahn-Jordan)

Nous nous proposons de montrer le

Théorème de Hahn-Jordan. Soit $\mu : \mathscr{T} \to \mathbb{R}$ une mesure signée. Alors :

a) Il existe deux mesures sur $\mathscr{T}$, *finies* et *étrangères* (l'une à l'autre) μ_1, μ_2 telles que $\mu = \mu_1 - \mu_2$.

b) μ_1 et μ_2 sont uniques.

Au passage, nous allons utiliser le résultat suivant : une série réelle *commutativement convergente* est *absolument convergente*.

Voici la stratégie proposée pour montrer le théorème de Hahn-Jordan.

a) Posons, pour $A \in \mathscr{T}$,

$$|\mu|(A) := \sup \left\{ \sum_k |\mu(B_k)| \, ; \, (B_k) \subset \mathscr{T}, \, A = \sqcup_k B_k \right\}.$$

Montrer que $|\mu|$ est une mesure finie sur $\mathscr{T}$.

b) Soit $\nu := |\mu| - \mu$. Montrer que ν est une mesure finie et que $\nu \ll |\mu|$.
Soit $h \in \mathscr{L}^1(X, \mathscr{T}, |\mu|)$ telle que $\nu = h\, d|\mu|$ (voir l'exercice # 39).

c) Pour $0 < \varepsilon < 1/2$, soit $A := \{x \in X \, ; \, 1 + \varepsilon \leq h(x) \leq 2 - \varepsilon\}$. Montrer que

$$[B \in \mathscr{T}, \, B \subset A] \implies \varepsilon|\mu|(B) \leq \mu(B) \leq (1 - \varepsilon)|\mu|(B),$$

et en déduire que $|\mu|(A) = 0$.

d) S'inspirer de la question précédente et montrer que $h(x) \in \{0, 1, 2\}$ $|\mu|$-p. p. Montrer que nous pouvons supposer que $h(x) \in \{0, 1, 2\}$ en tout point $x \in X$.

e) Soient $A_+ := \{x \in X \, ; \, h(x) = 0\}$, $A_- := \{x \in X \, ; \, h(x) = 2\}$. Soient $\mu_1 := \mu(A \cap A_+)$, $\mu_2 := \mu(A \cap A_-)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. Montrer que μ_1, μ_2 vérifient la partie (a) du théorème.

f) Soient μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 mesures positives comme dans la partie (a) du théorème telles que $\mu = \mu_1 - \mu_2 = \nu_1 - \nu_2$. Soient $A_1, A_2 \in \mathscr{T}$ tels que $\mu_1(A_1^c) = \mu_2(A_1) = 0$ et $\nu_1(A_2^c) = \nu_2(A_1) = 0$. Montrer que $\mu_1(A) = \nu_1(A) = \mu(A \cap A_1 \cap A_2)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$. En déduire la partie (b) du théorème.

Exercice # 41. (Théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue (II)) Le cadre est celui de l'exercice # 39. Nous supposons μ et ν finies. Voici la stratégie originale de preuve de l'existence de h et ξ, due à Lebesgue (pour la construction de ξ) et Nikodym (pour la construction de h). L'argument de Nikodym *repose sur le théorème de Hahn-Jordan*. Ceci semble un cercle vicieux, dans la mesure où nos avons établi ce théorème *via* le théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue. Néanmoins, on peut le montrer sans utiliser le théorème de Radon-Nikodym-Lebesgue (voir, par exemple, V. I. Bogachev, Measure theory, vol. I, preuve du théorème 3.1.1).

I. *Construction de* ξ. Soit $m := \inf\{\nu(B) \, ; \, B \in \mathscr{T}, \, \mu(B^c) = 0\}$.

a) Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $\mu(A^c) = 0$ et $\nu(A) = m$.

b) Montrer, en utilisant la définition de m, que

$$[C \in \mathscr{T}, C \subset A] \implies \nu(C) = 0.$$

c) Soit $\xi(C) := \nu(C \cap A^c)$, $\forall\, C \in \mathscr{T}$. Montrer que ξ et $\nu - \xi$ sont des mesures satisfaisant $\xi \perp \mu$ et $\nu - \xi \ll \mu$.

II. *Construction de* h. Compte tenu de la partie I, il suffit de travailler avec $\nu - \xi$ au lieu de ν. Nous pouvons donc supposer que $\nu \ll \mu$; sous cette hypothèse, nous construisons h telle que $\nu = h\mu$.

Soit

$$\mathscr{F} := \{f : X \to [0, \infty] \, ; \, f \text{ mesurable et } f\mu \leq \nu\}.$$

(Le sens de $f\mu \leq \nu$ est : $\int_A f\, d\mu \leq \nu(A)$, $\forall\, A \in \mathscr{T}$.)

a) Montrer que $\mathscr{F}$ est non-vide, et que

$$[f, g \in \mathscr{F}] \implies \max(f, g) \in \mathscr{F}.$$

b) Soit $M := \sup_{f \in \mathscr{F}} \int_X f\, d\mu$. Montrer, en utilisant la question précédente, qu'il existe $h \in \mathscr{F}$ telle que $\int_X h\, d\mu = M$.

c) Soit $\lambda := \nu - h\mu$. Montrer que λ est une mesure.
Pour conclure, il suffit de montrer que $\lambda = 0$. Si $\mu = 0$, montrer que $\nu = 0$ et conclure. Si $\mu \neq 0$, nous obtenons la conclusion $\lambda = 0$ en raisonnant par l'absurde. Soit $a := \lambda(X) > 0$. Soit $b := \mu(X) \in]0, \infty[$ (car $\mu \neq 0$ et μ est finie). Soient $0 < \varepsilon < a/b$ et $\eta := \lambda - \varepsilon\mu = \nu - (h + \varepsilon)\mu$.

d) Montrer que : (i) η est une mesure signée; (ii) $\eta(X) > 0$; (iii) il existe $A \in \mathscr{T}$ tel que $\eta(A) < 0$.

e) En utilisant le théorème de Hahn-Jordan et l'hypothèse $\nu \ll \mu$, trouver $A \in \mathscr{T}$ tel que : (i) $\eta(B) \geq 0, \forall\, B \in \mathscr{T}$ tel que $B \subset A$; (ii) $\eta(A) > 0$; (iii) $\mu(A) > 0$.

f) Considérer le fonction $h + \varepsilon\chi_A$ est obtenir une contradiction avec le choix de h.

Exercice # 42. (Inégalités faibles de Bernstein (II)) Cet exercice continue l'exercice # 28 de la feuille # 9. La philosophie générale est la même : des inégalités qui ne sont pas vraies pour des fonctions *quelconques* sont valides pour des polynômes trigonométriques. Prenons l'exemple de la comparaison entre $\|f\|_p$ et $\|f\|_r$, pour des fonctions définies sur $]0, 2\pi[$, muni avec la mesure $(1/2\pi)\,\lambda_1$. Cette mesure étant finie (en fait, une probabilité), nous avons $f \in \mathscr{L}^p \implies f \in \mathscr{L}^r, \forall\, 1 \leq r \leq p \leq \infty$, et des exemples simples montrent que l'implication $f \in \mathscr{L}^p \implies f \in \mathscr{L}^r$ est fausse si $r > p$. Néanmoins, nous allons montrer l'inégalité suivante, *à la Bernstein* :

$$\|f\|_r \leq 3^{(1-1/p)(1-p/r)} \left(\frac{5n+1}{2}\right)^{1/p-1/r} \|f\|_p,\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \qquad (14)$$
$$\forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n, \text{ avec } n \geq 1.$$

En combinant (14) avec la conclusion de l'exercice # 28 feuille # 9, nous obtenons

$$\|f'\|_r \leq 3^{(1-1/p)(1-p/r)+1} n \left(\frac{5n+1}{2}\right)^{1/p-1/r} \|f\|_p,\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \qquad (15)$$
$$\forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \leq n, \text{ avec } n \geq 1.$$

Ces deux inégalités sont *faibles*, au sens où les constantes qui y apparaissent ne sont pas les meilleures, mais l'*ordre de grandeur* des constantes est bon : il est $n^{1/p-1/r}$ dans (14) et $n^{1/p-1/r+1}$ dans (15). On peut montrer que cet ordre de grandeur est optimal, mais nous n'allons pas vérifier ce fait.

Passons à la preuve de (14).

a) Montrer le cas particulier suivant de l'inégalité de Young pour la convolution des fonctions 2π-périodiques :

$$|f * g| \leq \|f\|_p \|g\|_q,\ \forall\, p, q \text{ conjugués}, \forall\, f \in \mathscr{L}^p,\ g \in \mathscr{L}^q.$$

(Pour la définition du produit de convolution, voir l'exercice # 26 feuille # 9.)

b) Soit $V_n := 2\,F_{2n+1} - F_n$, $n \in \mathbb{N}$, avec F_j les noyaux de Fejér; V_n est le *noyau de de La Vallée Poussin*. Montrer les propriétés suivantes de V_n.

(i) $V_n(x) = \sum_{|j| \le n+1} e^{\imath jx} + \sum_{n+1<|j|\le 2n+1} \left(1 - \frac{|j|}{2(n+1)}\right) e^{\imath jx}$.

(ii) $\|V_n\|_1 \le 3$.

(iii) $\|V_n\|_\infty = \frac{5n+6}{2}$.

(iv) $\|V_n\|_q \le 3^{1/q} \left(\frac{5n+6}{2}\right)^{1-1/q}$, $\forall\, 1 \le q \le \infty$.

c) Soit f un polynôme trigonométrique de degré $\le n$ (avec $n \ge 1$). Montrer que $f * V_{n-1} = f$.

d) En déduire que

$$|f| \le 3^{1-1/p} \left(\frac{5n+1}{2}\right)^{1/p} \|f\|_p,$$
$$\forall \text{ polynôme trigonométrique } f \text{ de degré } \le n, \text{ avec } n \ge 1.$$

e) En déduire (14). Indication : inégalité de Hölder.

Exercice # 43. (Convolution et transformée de Fourier) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \frac{1}{x^2+1}$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Calculer $f * f * \cdots * f$ (n fois).

Exercice # 44. (Calcul de transformée de Fourier dans $\mathscr{L}^2$) Nous travaillons dans le cadre de la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}$.

a) Si $f \in \mathscr{L}^1$ et $x \mapsto g(x) := xf(x) \in \mathscr{L}^1$, montrer que $\widehat{f} \in C^1$ et que $\widehat{g} = \imath \widehat{f}\,'$.

b) Si $\varepsilon > 0$, calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto h_\varepsilon(x) := \frac{e^{-\varepsilon x^2}}{x+\imath}$. Indication : se débarrasser du dénominateur.

c) Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto g(x) := \frac{1}{x+\imath}$.

Exercice # 45. (Transformée de Fourier d'un produit de convolution) Nous considérons l'égalité

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}. \tag{16}$$

a) Donner un sens à (16) si $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et la montrer.

b) Donner un sens à (16) si $f \in \mathscr{L}^2(\mathbb{R}^n)$ et $g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, et la montrer.

Exercice # 46. (Transformée de Fourier dans L^p) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$. Rappelons que, si $f \in \mathscr{L}^1$, alors $\widehat{f} \in \mathscr{L}^\infty$, alors que, si $f \in L^2$, on peut définir $\widehat{f}$ comme un élément de L^2 (théorème de Plancherel). Nous nous proposons de montrer un résultat similaire pour les fonctions de L^p, avec $1 < p < 2$.

Nous travaillons avec des fonctions au lieu de classes.

Rappelons que, si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est borélienne, alors la *fonction de distribution de f* est

$$F(t) = F_f(t) := \nu_n(\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, |f(x)| > t\}),\ \forall\, t > 0.$$

Les trois premières questions sont des rappels.

a) Montrer que $F : [0,\infty[\to [0,\infty]$ est borélienne.

b) Pour $1 \leq p < \infty$, montrer la formule

$$\|f\|_p^p = p \int_0^\infty t^{p-1}\, F(t)\, dt.$$

c) Si $1 \leq p < \infty$ et $t > 0$, montrer l'*inégalité de Markov*

$$F(t) \leq \frac{\|f\|_p^p}{t^p}.$$

À partir de maintenant, nous supposons $f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\setminus\{0\}$.

d) Montrer que $0 < \|f\|_r^r < \infty$, $\forall\, 1 \leq r < \infty$.

e) Pour $a > 0$, soient

$$g_a(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| \leq a \\ a, & \text{si } f(x) > a \\ -a, & \text{si } f(x) < -a \end{cases}, \quad h_a(x) := \begin{cases} 0, & \text{si } |f(x)| \leq a \\ f(x) - a, & \text{si } f(x) > a \\ f(x) + a, & \text{si } f(x) < -a \end{cases}.$$

(i) Montrer que $g_a, h_a \in C_c(\mathbb{R}^n)$.

(ii) Calculer $\|g_a\|_2^2$ et $\|h_a\|_1$ en fonction de F_f.

(iii) Montrer que

$$\|h_a\|_1 \leq \frac{1}{p\, a^{p-1}} \|f\|_p^p, \ \forall\, a > 0, \ \forall\, 1 < p < \infty.$$

(iv) Soit $t > 0$. Nous définissons $a = a_t > 0$ comme la solution positive de

$$\frac{1}{p\, a^{p-1}} \|f\|_p^p = \frac{t}{2}.$$

Montrer que, pour cet a, nous avons

$$|\widehat{h_a}(\xi)| \leq \frac{t}{2}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

et

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n\, ;\, |\widehat{f}(\xi)| > t\} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n\, ;\, |\widehat{g}_a(\xi)| > t/2\}. \tag{17}$$

f) Soit $1 < p < 2$. Soit q le conjugué de p. En utilisant (17), le théorème de Plancherel et l'inégalité de Markov, montrer l'existence d'une constante $C = C_p < \infty$ (dont on donnera la valeur) telle que

$$\|\widehat{f}\|_q \leq C_p f\|_p, \ \forall\, f \in C_c(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}). \tag{18}$$

g) En utilisant (18), montrer le résultat suivant, après lui avoir donné un sens précis : la transformée de Fourier est continue de L^p vers L^q.

NB. Le *théorème de Hausdorff-Young* affirme que (18) est vraie avec $C_p = (2\pi)^{n/q}$ (qui est une constante inférieure à celle obtenue par la calcul explicite ci-dessus).

La constante $C_p = (2\pi)^{n/q}$ n'est pas la meilleure. Le très difficile *théorème de Babenko-Beckner* affirme que la (meilleure) constante est $(2\pi)^{n/q} \dfrac{p^{n/(2p)}}{q^{n/(2q)}}$.

Exercice # 47. (Inégalités de Nikolski'ĭ) Cet exercice fait echo aux inégalités de Bernstein (exercice # 28 de la feuille # 9 et exercice de synthèse # 42). Le thème est le même : des inégalités entre normes $\| \|_p$ et $\| \|_r$, qui sont fausses *en général*, sont vraies *sous des hypothèses concernant le support de la transformée de Fourier*.

Pour commencer, nous faisons l'hypothèse

$$f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n), \tag{19}$$

qui permet de considérer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f ; cette hypothèse peut être affaiblie, mais ceci demande de travailler dans le cadre (qui dépasse ce cours) des *distributions tempérées*.

L'hypothèse *essentielle* est

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \tag{20}$$

(avec $0 < R < \infty$ constante arbitraire). C'est l'*analogue* de la condition « f est un polynôme trigonométrique de degré $\leq n$ », qui équivaut à $c_j(f) = 0$ si $|j| > n$.

Sous ces hypothèses, nous nous proposons de montrer les *inégalités de Nikolskiĭ directes*

$$\|f\|_r \leq C_1 R^{n(1/p-1/r)} \|f\|_p, \ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{21}$$

$$\|\partial_j f\|_r \leq C_2 R^{n(1/p-1/r)+1} \|f\|_p, \ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \tag{22}$$

où C_1, C_2 sont des constantes *finies* qui peuvent dépendre de n, p et r, mais pas de f ou R. Au passage, sous les hypothèses (19) et (20), nous montrerons que $f \in C^1$.

Sous l'hypothèse *plus forte* (23),

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \text{ ou si } |\xi| \leq \frac{R}{2}, \tag{23}$$

nous avons également l'*inégalité de Nikolskiĭ inverse*, énoncée et prouvée, *par souci de simplicité*, uniquement si $n = 1$:

$$\|f\|_r \leq C_3 R^{1/r-1/p-1} \|f'\|_p, \ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{24}$$

où C_3 est une constante *finie* qui peut dépendre de p et r, mais pas de f ou R.

Voici la démarche proposée pour montrer (21), (22) et (24).

a) (Argument de *changement d'échelle*) En supposant l'une de trois inégalités vraie pour $R = 1$, elle est vraie pour *tout* R. Voici l'argument pour (21). Soit f une fonction vérifiant (19) et (20). Soit (avec les notations de l'exercice # **??** a) de la feuille # 10) $g := f_R$.
   (i) Montrer que g vérifie les hypothèses (19) et (20), la dernière pour $R = 1$.
   (ii) En appliquant (21) (supposée vraie si $R = 1$) à g, et en calculant $\|g\|_r$, respectivement $\|g\|_p$ en fonction de $\|f\|_r$, respectivement $\|f\|_p$, obtenir (21) pour f.

b) Vérifier que la même démarche est valide pour (22) et (24).

c) (Preuve de (21) si $R = 1$)
   (i) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$.
   (ii) Montrer qu'il existe $\psi \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\psi} = \varphi$.
   (iii) Montrer que, de plus, $\psi \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(iv) Montrer que $\psi \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, 1 \leq q \leq \infty$.

(v) Soit f vérifiant (19) et (20) avec $R = 1$. Montrer que $f = f * \psi$. Indication : prendre la transformée de Fourier dans cette égalité.

(vi) Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$ sont tels que $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, montrer que $\|f\|_r \leq \|\psi\|_q \, \|f\|_p$.

(vii) Conclure.

d) (Preuve de (22) si $R = 1$)

(i) Montrer successivement que $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial_j \psi \in \mathscr{L}^1$, $\widehat{\partial_j \psi}(\xi) = \imath \xi_j \, \varphi(\xi)$, $\partial_j \psi \in \mathscr{L}^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\partial_j \psi \in \mathscr{L}^q(\mathbb{R}^n)$, $\forall\, 1 \leq q \leq \infty$, $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$.

(ii) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\partial_j f = f * \partial_j \psi$, $\forall\, j \in [\![1, n]\!]$.

(iii) Conclure.

e) (Preuve de (24) si $R = 1$) D'après les questions précédentes, nous savons que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que $f' \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R})$ (et, par ailleurs, que $f' \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$). Il reste à montrer (24).

(i) Montrer qu'il existe $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\zeta(\xi) = \frac{1}{\imath \xi}, \ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1.$$

(ii) Montrer qu'il existe $\eta \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\eta} = \zeta$.

(iii) Montrer que $f = f' * \eta$.

(iv) Conclure, sur le modèle des questions précédentes.