Cours de Topologie et d’Analyse Fonctionelle pour l’Agrégation

Pierre Bousquet

2022

Table des matières

L'analyse fonctionnelle fournit des résultats généraux s'appliquant à des espaces de fonctions qui partagent des caractéristiques topologiques communes (compacité, complétude, connexité). Pour trouver des solutions à des équations (fonctionnelles, différentielles, aux dérivées partielles, etc...), ces propriétés topologiques constituent un outil puissant. Pensez par exemple à la preuve par point fixe du théorème de Cauchy-Lipschitz : la complétude d'un espace fonctionnel bien choisi y joue un rôle décisif.

Ce polycopié tente de dessiner les contours du programme de l'agrégation, en ne retenant que les notions qui sont (explicitement ou implicitement) au programme, ainsi que les exemples incontournables. En fin de chapitre, on trouvera quelques ouvertures possibles, en marge du programme (voire hors programme). Figure également une liste de questions qui ont vocation à susciter les interactions pendant les séances. Je vous invite à y réfléchir à l'avance. Vous trouverez également quelques exercices classiques, qui sont autant d'exemples et d'applications pour vos leçons.

Ce document s'inspire (parfois fortement) de nombreux cours disponibles sur le sujet. Vous trouverez à la fin de ce document une courte bibliographie (ne pas oublier qu'il est préférable de bien connaître un seul livre plutôt que d'en connaître plusieurs médiocrement).

Chapitre 1

Espaces métriques, espaces vectoriels normés

1.1 Distances et normes

Soit X un ensemble.

Définition 1 (distance) *Une application* $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$ *est une* distance *sur* X *si*

- **séparation** *: pour tous* $x, y \in X$*,* $d(x, y) = 0$ *si et seulement si* $x = y$*,*
- **symétrie** *: pour tous* $x, y \in X$*,* $d(x, y) = d(y, x)$*,*
- **inégalité triangulaire** *: pour tous* $x, y, z \in X$*,* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$*.*

On dit alors que (X, d) *est un espace métrique.*

Exemple 1 *Sur un ensemble* X*, l'application*

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \textit{si } x = y, \\ 1 & \textit{si } x \neq y. \end{cases}$$

est une distance, appelée la distance discrète *sur* X*.*

On se donne un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Définition 2 (norme) *Une application* $N : E \to \mathbb{R}^+$ *est une* norme *sur* E *si*

- **séparation** *: pour tout* $x \in E \setminus \{0\}$*,* $N(x) > 0$*,*
- **positive homogénéité** *: pour tous* $x \in E$*,* $\lambda \in \mathbb{K}$*,* $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$*,*
- **inégalité triangulaire** *: pour tous* $x, y \in E$*,* $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$*.*

On dit alors que (E, N) *est un espace vectoriel normé (*evn *dans la suite).*

Contrairement aux distances, on ne définit des normes que sur des espaces vectoriels !

Proposition 1 *Soit* (E, N) *un* evn*. Alors l'application* $d : (x, y) \in E \times E \mapsto N(x - y)$ *est une distance sur* E*.*

Exemple 2 *Pour* $p \in [1, \infty]$ *on définit sur* $\mathbb{K}^n$ *la norme*

$$\|x\|_p = \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad \textit{si } p < \infty, \qquad \textit{et } \|x\|_\infty = \max_{j=1,\ldots,n} |x_j| \, .$$

L'inégalité triangulaire est appelée inégalité de Minkowski.

Pour démontrer l'inégalité de Minkowski pour $p \in]1, \infty[$, on peut partir de l'inégalité de convexité (concavité du logarithme) :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \qquad ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \tag{1.1}$$

où on a noté $q = p/(p-1)$ l'exposant de Hölder conjugué de p. On en déduit d'abord l'inégalité de Hölder : pour tous $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{K}$,

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \le \|x\|_p \, \|y\|_q \, . \tag{1.2}$$

En effet, (1.2) est évidente si $\|x\|_p = 0$ ou $\|y\|_q = 0$. Sinon, on applique (1.1) à $a = |x_i| / \|x\|_p$, $b = |y_i| / \|y\|_q$ pour chaque $i = 1, \dots, n$ et on somme ensuite sur i.

A partir de l'inégalité de Hölder, on obtient l'inégalité de Minkowski en écrivant :

$$\begin{aligned}\|x+y\|_p^p &= \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i + y_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} (|x_i| + |y_i|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{p-1} |y_i|.\end{aligned}$$

On applique ensuite l'inégalité de Hölder dans chacune des sommes du membre de droite :

$$\|x+y\|_p^p \le \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Comme $(p-1)q = p$, l'identité précédente est équivalente à

$$\|x+y\|_p^p \le \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \|x\|_p + \|x+y\|_p^{\frac{p}{q}} \|y\|_p \, ,$$

ce qui implique après simplification (en distinguant les cas $\|x+y\|_p = 0$ ou $\neq 0$) l'inégalité de Minkowski.

Exemple 3 *Si X est un ensemble et E un* evn *muni de la norme $\|\cdot\|_E$, l'ensemble $\mathcal{B}(X, E)$ des applications bornées $f \colon X \to E$ est un* evn *muni de la norme de la convergence uniforme*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E \, .$$

Exemple 4 *Si (X, μ) est un espace mesuré et $p \in [1, \infty]$, pour toute fonction mesurable f, on note*

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int_X |f(x)|^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } p < \infty,$$

$$\|f\|_{L^\infty} := \inf\{M > 0 : \mu(|f| > M) = 0\}.$$

A priori $\|f\|_{L^p} \in [0, \infty]$. On note $\mathcal{L}^p(X, \mu)$ l'ensemble des fonctions mesurables sur X telles que $\|f\|_{L^p} < \infty$.

Noter que $|f(x)| \le \|f\|_{L^\infty}$ p.p. $x \in X$. Si f et g sont deux fonctions mesurables, on a pour tout $x \in X$, $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)|$ et donc

$$|f(x) + g(x)| \le \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty} \, , \qquad \mu \text{ p.p. } x \in X.$$

On en déduit que $\|f+g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$. Cette inégalité de Minkowski reste vraie lorsque $p<\infty$: pour toutes fonctions mesurables f et g,

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p} .$$

L'inégalité est évidente si f ou g ne sont pas dans $\mathcal{L}^p$. Sinon, elle découle comme dans $\mathbb{K}^n$ de l'inégalité de Hölder :

$$\int_X |fg|\, d\mu \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} ,$$

où q est l'exposant de Hölder conjugué de p. L'inégalité de Hölder elle-même est encore une conséquence de (1.1).

L'inégalité de Minkowski implique en particulier que $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ est un espace vectoriel. La fonction $\|\cdot\|_{L^p}$ vérifie l'homogénéité et l'inégalité triangulaire. En revanche, elle ne vérifie pas la séparation :

$$\|f\|_{L^p} = 0 \Longleftrightarrow f(x) = 0 \qquad \mu \text{ p.p. } x \in X.$$

Pour remédier à cet inconvénient, on quotiente l'espace $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ par la relation d'équivalence $f\sim g$ si $\mu(f\neq g)=0$. L'espace quotient est noté $L^p(X,\mu)$ et reste un espace vectoriel. Comme $\|\cdot\|_{L^p}$ est constante sur chaque classe d'équivalence, elle passe au quotient. En pratique, on identifie très souvent une classe d'équivalence (c'est-à-dire un élément de $L^p(X,\mu)$) avec l'un de ses représentants (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{L}^p(X,\mu)$).

Sur l'espace $L^p(X,\mu)$, la fonction $\|\cdot\|_{L^p}$ devient une norme (quotienter revient à identifier une fonction nulle presque partout à la fonction identiquement nulle).

Comme exemples d'espaces $L^p(X,\mu)$, mentionnons le cas où X est un borélien de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue $\mu=dx$, ou d'une mesure à densité $\mu=w(x)dx$, avec w une fonction borélienne positive.

Un autre exemple important est le cas $X=\mathbb{N}$ muni de la mesure de comptage. Comme le seul ensemble négligeable pour la mesure de comptage est l'ensemble vide, il est inutile ici de quotienter par rapport à la relation *être égal presque partout*. Dans ce cas, on note $\ell^p(\mathbb{N})$ l'espace L^p correspondant. Pour tout $u=(u_n)_{n\geq 0}$, on a donc

$$\|u\|_{\ell^p} = \left(\sum_{n\geq 0} |u_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } p<\infty, \qquad \|u\|_{\ell^\infty} = \sup_{n\geq 0} |u_n| .$$

Exemple 5 *Soit $X=C^0(]-1,1[)$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $]-1,1[$ (non nécessairement bornées). Pour tout $j\geq 1$, on définit les semi-normes*

$$p_j(f) = \sup_{[-1+1/j,1-1/j]} |f| ,$$

qui vérifient les axiomes de norme, sauf celui de séparation. Alors l'application

$$d : (f,g) \in X\times X \mapsto \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min(p_j(f-g),1)$$

est une distance sur X.

Distance induite

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition-Proposition 1 *Soit $A \subset X$. On note $d_A : A \times A \to \mathbb{R}^+$ la restriction de d à $A \times A$:*

$$\forall x, y \in A, \qquad d_A(x, y) := d(x, y).$$

Alors d_A est une distance sur A, appelée la distance induite *sur A.*

Définition-Proposition 2 *Si E est un* evn *munie d'une norme N_E et F un sous-espace vectoriel de E, l'application N_E restreinte à F définit une norme sur F, appelée* norme induite.

Exemple 6
- *On peut munir $\mathbb{K}[X]$, identifié aux suites nulles à partir d'un certain rang, de la norme induite par celle d'un espace ℓ^p, $p \in [1, \infty]$.*
- *L'espace $C_b^0(U, E)$ des fonctions continues et bornées sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans un* evn *E, est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des fonctions bornées $\mathcal{B}(U, E)$. Il hérite donc de la norme induite $\|\cdot\|_\infty$.*

1.2 Ouverts et fermés

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 3 *Soient $x \in X$ et $r > 0$. La* boule ouverte *de centre x et de rayon r est l'ensemble*

$$B(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

Définition 4
1. *On dit qu'une partie U de X est un* ouvert *si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset U$.*
2. *On dit qu'une partie F de X est un fermé si son complémentaire $X \setminus F$ est un ouvert.*

Pour $x \in X$, on appelle voisinage de x un ensemble contenant un ouvert contenant x. Un ensemble est donc ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points.

Observer que X et $\emptyset$ sont deux parties ouvertes de (X, d).

Proposition 2
1. *Une boule ouverte est un ouvert.*
2. *Un ensemble $U \subset X$ est ouvert si et seulement si il peut s'écrire comme une réunion quelconque de boules ouvertes.*
3. *Une intersection finie d'ouverts est un ouvert et une réunion quelconque d'ouverts est un ouvert.*
4. *Une réunion finie de fermés est un fermé et une intersection quelconque de fermés est un fermé.*

Comme l'ensemble des ouverts est stable par réunion quelconque, on peut définir l'intérieur d'un ensemble (et de même pour l'adhérence grâce à la stabilité par intersection des fermés) :

Définition 5 *Soit $A \subset X$.*
- *L'intérieur de A, noté int A, est la réunion de tous les ouverts contenus dans A (c'est donc aussi le plus grand ouvert contenu dans A).*
- *L'adhérence de A, notée $\overline{A}$, est l'intersection de tous les fermés contenant A (c'est donc aussi le plus petit fermé contenant A).*
- *La frontière de A, notée ∂A, est $\overline{A} \setminus$ int A.*

Observer que A est ouvert si et seulement si il est égal à son intérieur et que A est fermé si et seulement si il est égal à son adhérence.

Proposition 3 *Soient $A \subset X$ et $x \in X$. Alors*

1. *$x \in$ int A si et seulement si il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset A$,*
2. *$x \in \overline{A}$ si et seulement si pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.*

Preuve:
Démontrons par exemple le deuxième point par contraposée. Si $x \notin \overline{A}$, il existe un fermé F contenant A qui ne contient pas x. Donc x est dans le complémentaire de F qui est un ouvert. Il existe donc $r > 0$ tel que $B(x, r)$ soit contenu dans le complémentaire de F. Alors $B(x, r)$ n'intersecte donc pas A.

Réciproquement, s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r)$ n'intersecte pas A, alors le complémentaire de $B(x, r)$ est un fermé qui contient A, et donc l'adhérence de A, ce qui implique que x n'est pas dans l'adhérence de A. ■

Exemple 7 *Dans un* evn (E, N)*, l'adhérence d'une boule ouverte $B(x, r)$ est la boule fermée correspondante :*

$$\overline{B}(x, r) := \{y \in E : N(y - x) \leq r\}.$$

L'intérieur de cette boule fermée est la boule ouverte $B(x, r)$.

Densité

Définition 6 *On dit que $A \subset X$ est dense dans X si $\overline{A} = X$.*

De manière plus explicite, pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) < r$.

Exemple 8
- *L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dense dans $\mathbb{R}$.*
- *Un sous-groupe de $\mathbb{R}$ est soit de la forme $a\mathbb{Z}$, avec $a \in \mathbb{R}$, soit dense dans $\mathbb{R}$.*

Exemple 9
- *L'ensemble des matrices inversibles est dense dans $M_n(\mathbb{K})$ pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*
- *L'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $M_n(\mathbb{C})$.*

Exemple 10
- Théorème de Stone-Weierstrass *: Les fonctions polynomiales sont denses dans $C^0(K)$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^n$.*
- Théorème de Fejér *: Les polynômes trigonométriques sont denses dans $C^0_{2\pi,per}(\mathbb{R})$.*

Exemple 11
- *Pour tout espace mesuré (X, μ), et pour tout $p \in [1, \infty[$, les combinaisons linéaires de fonctions indicatrices de boréliens de mesure finie sont denses dans $L^p(X, \mu)$. Pour $p = \infty$, le résultat reste vrai pour les combinaisons linéaires de fonctions indicatrices de boréliens.*
- *Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $w : U \to \mathbb{R}^+$ localement intégrable et $p < \infty$. On définit la mesure $\mu = w(\cdot)dx$. Alors l'ensemble $C^0_c(U)$ des fonctions continues à support compact est dense dans $L^p(X, \mu)$. Cela permet de montrer qu'en fait, l'ensemble $C^\infty_c(U)$ est dense dans $L^p(X, \mu)$.*

Topologie induite

Soit (X, d) un espace métrique et A une partie de X. On note d_A la distance induite sur A.

Proposition 4 *Une partie $S \subset A$ est un ouvert de (A, d_A) si et seulement si il existe un ouvert U de (X, d) tel que $S = U \cap A$.*

La famille des ouverts de (A, d_A) est la *topologie induite* de X sur A. Elle coïncide donc avec $\{U \cap A : U \text{ ouvert de } X\}$.

Exemple 12 *L'intervalle* $[0,1[$ *est ouvert dans* $[0,\infty[$ *muni de la distance induite par celle de* $\mathbb{R}$.

Topologies équivalentes

Définition 7 *La famille de tous les ouverts de* (X,d) *est appelée la topologie de* (X,d).

Définition 8 *Soient* d_1 *et* d_2 *deux distances sur* X. *On dit que* d_1 *et* d_2 *sont topologiquement équivalentes si elles induisent la même topologie sur* X.

Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel E. On note d_i la distance associée à N_i, $i=1,2$. Alors

Proposition 5 *Les distances* d_1 *et* d_2 *sont topologiquement équivalentes si et seulement si il existe* $C, C' > 0$ *tels que*

$$\forall x \in E, \qquad CN_1(x) \leq N_2(x) \leq C'N_1(x). \tag{1.3}$$

Preuve:
On montre par exemple l'existence de C'. Comme $B_{d_1}(0,1)$ est un ouvert de (E,d_1) et que d_1 et d_2 définissent les mêmes ouverts, il suit que $B_{d_1}(0,1)$ est aussi un ouvert de (E,d_2) et donc un voisinage de 0 dans (E,d_2). Il existe donc $r>0$ tel que $B_{d_2}(0,r) \subset B_{d_1}(0,1)$.

Alors pour tout $x \in E\setminus\{0\}$, on a $N_2\left(\frac{rx}{2N_2(x)}\right) = \frac{r}{2}$, donc $d_2(\frac{rx}{2N_2(x)},0) < r$ et finalement $\frac{rx}{2N_2(x)} \in B_{d_2}(0,r)$. On en déduit que $\frac{rx}{2N_2(x)} \in B_{d_1}(0,1)$, ce qui implique

$$N_1\left(\frac{rx}{2N_2(x)}\right) = d_1(0,\frac{rx}{2N_2(x)}) < 1,$$

d'où $N_1(x) < C'N_2(x)$, en posant $C' = \frac{2}{r}$. ■

Lorsque (1.3) est vérifiée, on dit que les normes N_1 et N_2 sont *équivalentes*.

Exemple 13 *On reprend les notations de l'Exemple 5. Sur cet espace métrique, on ne peut pas définir une norme qui induise la même topologie (on dit alors que l'espace n'est pas* normable*).*

Preuve:
Supposons par l'absurde qu'il existe une norme N sur $C^0(]-1,1[)$ qui induise la même topologie que d. La boule ouverte $B_N(0,1)$ pour la norme N est alors un voisinage ouvert de 0 pour la distance d : il existe donc $r>0$ tel que $B_d(0,r)$ (boule ouverte pour la distance d) soit contenue dans $B_N(0,1)$. Soit $j_0 \geq 1$ tel que $\sum_{j\geq j_0} 2^{-j} < r$. Soit $f \in C^0(]-1,1[)$ une fonction non identiquement nulle, mais qui s'annule sur $[-1+1/j_0, 1-1/j_0]$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $p_j(\lambda f) = |\lambda| p_j(f) = 0$ pour tout $j < j_0$. On en déduit que

$$d(\lambda f, 0) \leq \sum_{j\geq j_0} 2^{-j} \min(p_j(\lambda f), 1) \leq \sum_{j\geq j_0} 2^{-j} < r.$$

Ainsi, $B_d(0,r)$ contient la droite vectorielle $\{\lambda f; \lambda \in \mathbb{R}\}$. Il en est donc de même de la boule $B_N(0,1)$. Mais dans un *evn*, une boule ne peut pas contenir une droite : contradiction ! ■

Produits d'espaces métriques

On se donne à présent $n \geq 1$ espaces métriques $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$. Pour chaque norme N sur $\mathbb{R}^n$, on peut définir sur le produit $X = X_1 \times \cdots \times X_n$ l'application d_N : pour tous $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_n)$ dans X,

$$d_N(x,y) := N((d_1(x_1,y_1),\dots,d_n(x_n,y_n))).$$

Par exemple, si $N = \|\cdot\|_1$, avec $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, alors

$$d_{\|\cdot\|_1}(x, y) = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n).$$

Proposition 6 *L'application d_N est une distance sur X.*

En utilisant le fait que toutes les normes sont équivalentes sur $\mathbb{R}^n$ (une propriété qui sera établie ultérieurement, en utilisant la compacité des fermés bornés dans $\mathbb{R}^n$), on obtient :

Proposition 7 *Si N et N' sont deux normes sur $\mathbb{R}^n$, alors les distances d_N et $d_{N'}$ sont topologiquement équivalentes.*

Preuve:
Comme les normes N et N' sont équivalentes, il existe $C, C' > 0$ tels que $CN' \leq N \leq C'N'$. Cela implique que $Cd_{N'} \leq d_N \leq C'd_{N'}$. Alors pour tout $x \in X$ et pour tout $r > 0$,

$$B_{d_N}(x, Cr) \subset B_{d_{N'}}(x, r), \qquad B_{d_{N'}}(x, r/C') \subset B_{d_N}(x, r).$$

Donc toute partie $U \subset X$ est un ouvert pour d_N si et seulement si c'est un ouvert pour $d_{N'}$.
■

Ainsi, quel que soit le choix de la norme N sur $\mathbb{R}^n$, la distance d_N définit le même ensemble d'ouverts (i.e. la même topologie). C'est ce qu'on appelle la *topologie produit*. Dans la suite, on munit le produit fini d'espaces métriques d'une distance définie comme ci-dessus.

Exemple 14 *Considérons le produit de deux espaces métriques (X_1, d_1) et (X_2, d_2) et la norme $N = \|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Alors pour tous (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in X_1 \times X_2$ et tous $r > 0$,*

$$d_N((x_1, y_1), (x_2, y_2)) < r \iff \max(d_1(x_1, x_2), d_2(x_1, x_2)) < r \iff d_1(x_1, x_2) < r \text{ et } d_2(y_1, y_2) < r.$$

On en déduit que $B_{d_N}((x_1, y_1), r) = B_{d_1}(x_1, r) \times B_{d_2}(y_1, r)$.

Ainsi, si $U \subset X_1 \times X_2$ est un voisinage d'un point $(x, y) \in X_1 \times X_2$, il existe $r > 0$ tel que

$$B_{d_1}(x, r) \times B_{d_2}(y, r) \subset U.$$

1.3 Suites

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 9 *Soit $(x_n)_{n \geq 0}$ une suite d'élements de X (c'est-à-dire une application de N dans X).*
- *On dit que $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers un élément $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $x_n \in B(x, \varepsilon)$.*
- *On dit que $x \in X$ est une valeur d'adhérence de $(x_n)_{n \geq 0}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $x_n \in B(x, \varepsilon)$.*

Proposition 8 *Si une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers $x \in X$ et vers $y \in X$, alors $x = y$.*

On dit alors que x est la *limite* de la suite $(x_n)_{n \geq 0}$.

Proposition 9
1. *Une partie $F \subset X$ est fermée si et seulement si toute suite d'éléments de F convergeant dans X a sa limite dans F (c'est le critère séquentiel pour les fermés).*
2. *Une partie $A \subset X$ est dense dans X si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_{n \geq 0} \subset A$ qui converge vers x.*

Proposition 10 *Soient $x \in X$ et $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ admet $x \in X$ comme valeur d'adhérence.*
2. *On a $x \in \cap_{n\geq 0}\overline{\{x_m, m \geq n\}}$.*
3. *Il existe une suite extraite de $(x_n)_{n\geq 0}$ qui converge vers x.*

Exemple 15 *Avec les notations de l'exemple 5, une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f si et seulement si pour tout compact $K \subset]0,1[$ on a $f_n \to f$ uniformément sur K.*

1.4 Questions et exercices

Questions 1

1. *Peut-on définir une norme sur l'intervalle $]0,1[$? Et une distance ?*
2. *Soit X un ensemble non vide. Montrer qu'il existe une distance d sur X.*
3. *Soit E un espace vectoriel. Montrer qu'il existe une norme sur E.*
4. *Montrer que dans un espace métrique, une boule ouverte est un ouvert et qu'une boule fermée est un fermé.*
5. *Soit (X, d) un espace métrique. Est-il vrai que l'adhérence de $B(x, r)$ est égale à $\{y \in X : d(y, x) \leq r\}$? Et dans un* evn *?*
6. *Donner un exemple d'ensemble X et de deux distances d_1 et d_2 sur X tels que d_1 et d_2 ne sont pas topologiquement équivalentes.*
7. *Sur un espace vectoriel, deux normes sont-elles toujours équivalentes ?*
8. *Donner un exemple d'espace vectoriel E muni d'une distance d telle qu'aucune norme sur E ne définit la même topologie que d.*
9. *Donner un exemple d'espace métrique et de deux boules $B(x, r)$, $B(x', r')$ tels que $r > r'$ et $B(x, r) \subset B(x', r')$.*
10. *Donner un exemple d'espace métrique où une boule fermée peut être égale à la boule ouverte correspondante, puis un exemple où l'intérieur d'une boule fermée n'est pas toujours la boule ouverte correspondante.*
11. *Dans un* evn*, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas nécessairement ouverte : exemple ?*
12. *Donner l'adhérence de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ puis l'adhérence du même intervalle dans $]0,+\infty[$.*
13. *Dans un* evn*, un sous-espace vectoriel est-il toujours fermé ? L'adhérence d'un sous-espace vectoriel est-elle un sous-espace vectoriel ?*
14. *Est-ce que l'ensemble des matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$?*

Exercice 1 *Soit X un ensemble, (Y, δ) un espace métrique et $f : X \to Y$ une application injective. Montrer que $\mathrm{d}_f : (x, x') \in X \times X \mapsto \delta(f(x), f(x'))$ est une distance sur X.*

Exercice 2 *Soit (X, d) un espace métrique. Montrer qu'il existe une distance δ sur X vérifiant $\delta(x) \leq 1$ pour tout $x \in X$ et qui est topologiquement équivalente à d (essayer avec $\delta = \frac{d}{1+d}$).*

L'exercice précédent montre que la notion de parties bornées dans un espace métrique est sans intérêt (du moins dans le sens usuel du mot 'borné').

Exercice 3 *On se donne n espaces métriques $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$. Soit $(x_k)_{k\geq 0}$ une suite dans $X = X_1 \times \ldots, \times X_n$. Montrer qu'elle converge dans X (pour la topologie produit) si et seulement si chaque suite de coordonnées converge.*

Exercice 4 *Si E est un* evn *et H un hyperplan (i.e. il existe $v \in E$ tel que $E = H \oplus \mathbb{K}v$), alors H est fermé ou dense.*

Exercice 5 *(Applications du théorème de Weierstrass)*

1. *Soit $f \in L^2(]0,1[)$ telle que $\int_0^1 f(x)x^n\,dx = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f(x) = 0$ p.p. $x \in]0,1[$.*
2. *(Anticipation sur le dernier chapitre). En déduire que l'ensemble des fonctions polynomiales est dense dans $L^2(]0,1[)$ puis que $L^2(]0,1[)$ admet une base hilbertienne formée de fonctions polynomiales.*

1.5 Pour aller plus loin

Exemple 16 Suite de semi-normes. *On peut généraliser l'exemple 5. Soit X un espace vectoriel. On suppose qu'il existe une suite de semi-normes p_j (i.e. des applications vérifiant la définition de norme, sauf l'axiome de séparation) qui est séparante, i.e. pour tout $x \in X \setminus \{0\}$, il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $p_j(x) \neq 0$. Alors la fonction*

$$d : (x,y) \in X \times X \mapsto \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{2^j} \min(p_j(x-y), 1)$$

est une distance sur X.

Une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ converge vers x pour une telle distance si et seulement si $\lim_{n \to +\infty} p_j(x_n - x) = 0$ pour tout $j \geq 0$.

Ce procédé permet notamment de construire des distances correspondant à une convergence sur tout compact, par exemple dans les espaces $C^\infty(\Omega)$, $L^p_{loc}(\Omega)$, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, etc...

Pour mémoire, on cite une version générale du théorème de densité des polynômes, qui permet de démontrer le théorème de Weierstrass ainsi que le théorème de Fejér (et beaucoup d'autres résultats de densité) :

Théorème 1 *(Stone-Weierstrass : cas réel) Soit (X,d) un espace métrique compact, et A une sous-algèbre de $C^0(X,\mathbb{R})$ (i.e. un sous-espace vectoriel stable par multiplication). On suppose que*

1. *A sépare les points, i.e. pour tous $x, y \in X$ tels que $x \neq y$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq f(y)$;*
2. *pour tout $x \in X$, il existe $f \in A$ tel que $f(x) \neq 0$.*

Alors A est dense dans $C^0(X,\mathbb{R})$.

Sur un compact de $\mathbb{R}^N$, le théorème de Weierstrass peut aussi être établi en utilisant la convolution. Sur le cercle, il est également possible de définir une convolution qui permet de démontrer le théorème de Fejér.

Chapitre 2

Continuité et connexité

2.1 Limites et continuité

Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. On considère une application $f : X \to Y$.

Définition 10
1. *On dit que $l \in Y$ est une limite de f en $x \in X$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x' \in X \setminus \{x\}$ vérifiant $d(x', x) < \eta$, on a $\delta(f(x'), l) < \varepsilon$.*
2. *On dit que $f : X \to Y$ est continue en $x \in X$ si f admet une limite en x qui vaut $f(x)$. Elle est dite continue sur X si cette propriété est vraie pour tout $x \in X$.*

Proposition 11 (Continuité) *Les assertions suivantes sont équivalentes :*
1. *La fonction f est continue sur X.*
2. *Pour tout ouvert $V \subset Y$, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de X.*
3. *Pour toute suite convergente $(x_n)_{n\geq 0}$ dans X, la suite $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est convergente dans Y et*
$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n).$$
4. *Pour tout $A \subset X$, $f(\overline{A}) \subset \overline{f(A)}$.*

La proposition précédente montre que la continuité d'une fonction ne dépend que des familles d'ouverts sur X et Y : c'est une notion topologique (en particulier, si on remplace d ou δ par des distances qui leur sont topologiquement équivalentes, la fonction f restera continue).

Proposition 12 *La composée de deux applications continues est continue.*

Exemple 17 *La fonction $d : X \times X \to \mathbb{R}$ est continue (lorsque $X \times X$ est munie de la topologie produit).*

Exemple 18 *Sur un* evn (E, N)*, la norme N est continue, ainsi que les fonctions $(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E$ et $(x, \lambda) \in E \times \mathbb{K} \mapsto \lambda x \in E$.*

Proposition 13 *Soient $f, g : X \to Y$ deux applications continues et A une partie dense dans X. On suppose que $f = g$ sur A. Alors $f = g$ sur X.*

Exemple 19 *La transformée de Fourier $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ vérifie $\mathcal{F}\mathcal{F}f(x) = f(-x)$ pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (à un facteur de renormalisation près, selon la définition choisie pour $\mathcal{F}$) donc cette identité est vraie sur L^2 par densité et continuité.*

Définition 11 *On dit que $f : X \to Y$ est uniformément continue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in X$ vérifiant $d(x, y) < \eta$, on a $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Définition 12 *On dit que f est lipschitzienne s'il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $x, y \in X$, on a*

$$\delta(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$$

(et k est alors une constante de Lipschitz de f).

Toute application lipschitzienne est uniformément continue et toute application uniformément continue est continue.

Homéomorphismes

Définition 13 *On dit que $f : X \to Y$ est un homéomorphisme si f est bijective, continue, et d'inverse continue.*

Comme f est continue, l'image réciproque de tout ouvert V de Y par f est un ouvert de X. Comme f^{-1} est continue, l'image directe de tout ouvert U de X par f (qui est aussi l'image réciproque de U par f^{-1}) est un ouvert de Y. Autrement dit, l'application qui à un ouvert U de X associe l'ouvert $V := f(U)$ de Y est une bijection entre la topologie de X et la topologie de Y.

2.2 Applications linéaires continues

Théorème 2 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux* evn $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$. *Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

1) $f : E \to F$ est continue,
2) $f : E \to F$ est continue en 0,
3) il existe $C > 0$ tel que $\forall x \in E$, $\|f(x)\|_F \leq C \|x\|_E$.

Preuve:
D'abord, 1) implique 2). Montrons que 2) implique 3). Comme est f est continue en 0, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in \overline{B}_{\|\cdot\|_E}(0, \eta)$, on a $\|f(x) - f(0)\|_F \leq 1$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit que $\|f(x)\|_F \leq \frac{\|x\|_E}{\eta}$ pour tout $x \in E$, ce qui prouve 3). Supposons maintenant 3) et montrons 1). Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Pour tout $y \in B_{\|\cdot\|_E}(x, \frac{\varepsilon}{C})$, on a

$$\|f(x) - f(y)\|_F = \|f(x - y)\|_F \leq C \|x - y\|_E \leq C \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon.$$

Le théorème est démontré.

■

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de E dans F. Il s'agit d'un espace vectoriel.

Remarque 1 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux* evn $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F)$. *Alors*

$$\sup_{x \neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E \leq 1} \|f(x)\|_F .$$

D'après le théorème précédent, cette quantité est finie si et seulement si f est continue.

Lorsque cette quantité est finie, on l'appelle norme subordonnée de f (sous-entendu, subordonnée aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$) et on la note $|||f|||$. Noter que $\|f(x)\|_F \leq |||f||| \, \|x\|_E$ pour tout $x \in E$.

Proposition 14 *La norme subordonnée est une norme sur $\mathcal{L}_c(E,F)$!*

Proposition 15 *Pour toutes $f\colon E \to F$ et $g\colon F \to G$ linéaires continues, on a*

$$|||g \circ f||| \le |||g||| \cdot |||f||| \,.$$

Exemple 20 *Soient $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ et $f\colon (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_\infty)$ l'application linéaire associée. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\|f(x)\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \right| \le \max_{i=1,\ldots,m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|x\|_\infty \,,$$

donc f est continue. On peut montrer que

$$|||f||| = \max_{i=1,\ldots,m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right).$$

Exemple 21 *Si $A \in S_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique et $f\colon (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ l'application linéaire correspondante, alors*

$$|||f||| = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Exemple 22 *Soit $p \in [1,\infty]$ et p' l'exposant conjugué. Soit (X,μ) un espace mesuré. Pour $g \in L^{p'}(\mu)$ on définit l'application linéaire*

$$M_g\colon L^p(\mu) \to L^1(\mu),\ f \mapsto fg.$$

Grâce à l'inégalité de Hölder on a

$$\|M_g(f)\|_{L^1} \le \|g\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p} \,,$$

donc M_g est continue, et $|||M_g||| \le \|g\|_{L^{p'}}$. On peut en fait montrer que $|||M_g||| = \|g\|_{L^{p'}}$.

Théorème 3 *Soient $(E_1,N_1), (E_2,N_2), (F,N_F)$ des* evn *et $f : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire (i.e. linéaire par rapport à chaque variable). Alors f est continue si et seulement si il existe $C > 0$ tel que pour tout $x = (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$, on a $N_F(f(x)) \le C N_1(x_1) N_2(x_2)$.*

Preuve:
On munit par exemple $E_1 \times E_2$ de la norme $N_\infty((x_1,x_2)) = \max(N_1(x_1), N_2(x_2))$. Supposons que f est continue. Alors la continuité en 0 donne un $\eta > 0$ tel que pour tout $x = (x_1,x_2)$ dans $\overline{B}_{E_1\times E_2}(0,\eta)$, on a $N_F(f(x)) \le 1$. On en déduit pour tout $x = (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$ tel que $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$,

$$\begin{aligned} N_F(f(x)) &= N_F\left(f\left(\frac{N_1(x)}{\eta} \frac{\eta x_1}{N_1(x)}, \frac{N_2(x)}{\eta} \frac{\eta x_2}{N_2(x)} \right) \right) \\ &= \frac{N_1(x_1)N_2(x_2)}{\eta^2} N_F\left(f\left(\frac{\eta x_1}{N_1(x)}, \frac{\eta x_2}{N_2(x)} \right) \right) \le \frac{N_1(x_1)N_2(x_2)}{\eta^2}. \end{aligned}$$

L'inégalité reste vraie pour $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$.

Réciproquement, supposons l'existence de $C > 0$ comme dans l'énoncé et montrons la continuité de f. Soit $x = (x_1,x_2) \in E_1 \times E_2$ et $\varepsilon > 0$. Soit $y = (y_1,y_2) \in B_{E_1\times E_2}(x,\delta)$ avec $\delta \le 1$ à déterminer. Alors on écrit

$$\begin{aligned} N_F(f(y) - f(x)) &\le N_F(f(y_1,y_2) - f(x_1,y_2)) + N_F(f(x_1,y_2) - f(x_1,x_2)) \\ &= N_F(f(y_1 - x_1, y_2)) + N_F(f(x_1, y_2 - x_2)). \end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned} N_F(f(y) - (f(x))) &\leq CN_1(y_1 - x_1)N_2(y_2) + CN_1(x_1)N_2(y_2 - x_2) \\ &\leq CN_1(y_1 - x_1)(N_2(x_2) + \delta) + CN_1(x_1)N_2(y_2 - x_2) \\ &\leq 2CN_\infty(y - x) \max_{1\leq i\leq 2}(N_i(x_i) + 1). \end{aligned}$$

En prenant $\delta := \frac{\varepsilon}{2C \max_{1\leq i\leq 2}(N_i(x_i)+1)}$ (qui ne dépend pas de y), on obtient que

$$N_F(f(y) - f(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui montre que f est continue en x.

■

2.3 Connexité

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 14 *On dit que X est connexe si on ne peut pas l'écrire sous la forme $X = U \cup V$ avec U, V deux ouverts disjoints non vides.*

On dit qu'une partie A de X est connexe lorsqu'elle est connexe (au sens de la définition précédente) pour la topologie induite. Pour le dire autrement, A est connexe si pour tous ouverts U et V de X,

$$A \subset U \cup V, \quad U \cap V = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad U = \emptyset \text{ ou } V = \emptyset.$$

Proposition 16 *L'espace X est connexe si et seulement si les seules parties de X qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.*

Proposition 17 *Un espace métrique X est connexe si et seulement si toute fonction continue $\theta : X \to \{0, 1\}$ est constante.*

Ici, l'espace d'arrivée $\{0, 1\}$ est munie de la topologie induite par celle de $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ qui coïncide dans ce cas avec la topologie discrète.

Preuve:

Supposons d'abord que X n'est pas connexe. Alors il existe deux ouverts disjoints non vides U, V tels que $X = U \cup V$. Définissons $\theta : X \to \{0, 1\}$ en posant $\theta|_U \equiv 0$ et $\theta|_V \equiv 1$.

Les ouverts de $\{0, 1\}$ sont $\emptyset$, $\{0, 1\}$, $\{0\}$ et $\{1\}$. Leur image réciproque par θ est respectivement $\emptyset$, X, U et V, qui sont tous des ouverts. Donc θ est une fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ et qui n'est pas constante.

Réciproquement, supposons que X est connexe. Soit $\theta : X \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Comme $X = \theta^{-1}(\{0\}) \cup \theta^{-1}(\{1\})$, et que $\theta^{-1}(\{0\}), \theta^{-1}(\{1\})$ sont des ouverts disjoints, c'est que l'un de ces deux ouverts est vide. Donc θ est constante.

■

Remarque 2 *La proposition précédente est la méthode royale pour montrer qu'un ensemble est connexe. Elle permet par exemple de montrer que*

— *l'adhérence d'une partie connexe est connexe,*

— *la réunion d'une famille de parties connexes qui ont toutes un point en commun est connexe.*

Théorème 4 *L'image continue d'un connexe est connexe.*

Preuve:
Soit X un espace connexe et $f : X \to Y$ une application continue surjective à valeurs dans un espace métrique Y. Montrons que Y est connexe. Soient U et V deux ouverts disjoints de Y tels que $Y = U \cup V$. Alors
$$X = f^{-1}(Y) = f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V).$$
Comme $f^{-1}(U), f^{-1}(V)$ sont deux ouverts disjoints de X qui est connexe, c'est donc que l'un des deux est vide, par exemple $f^{-1}(U)$. Mais alors $U = f(f^{-1}(U))$ car f est surjective, et donc $U = \emptyset$.

■

Un cas particulier de ce résultat est donné par le théorème des valeurs intermédiaires, pour les fonctions réelles continues sur un intervalle de $\mathbb{R}$, grâce au théorème suivant :

Théorème 5 *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve:
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\theta : I \to \{0, 1\}$ une fonction continue. Supposons par l'absurde qu'il existe $a < b$ dans I tels que $\theta(a) \neq \theta(b)$. Sans perte de généralité, $\theta(a) = 0$ et $\theta(b) = 1$. Soit alors
$$J := \{t \in [a, b] : \theta(t) = 0\}.$$
Alors J est non vide (car $a \in J$), majoré par b. On peut définir sa borne supérieure t_0. Par continuité de θ, on a $\theta(t_0) = 0$, et donc $t_0 < b$. Comme $\theta^{-1}(\{0\})$ est un ouvert qui contient t_0, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\theta(t) = 0$ pour tout $t \in [t_0, t_0 + \varepsilon[\cap I$, qui est un intervalle non vide. Cela contredit la définition de t_0. Donc θ est constante.

Réciproquement, soit I une partie connexe de $\mathbb{R}$ et montrons que I est un intervalle. Soit $a \leq b \in I$ tels que $a \leq b$. Soit $c \in [a, b]$. Il s'agit de montrer que $c \in I$. Sinon, posons $U :=]-\infty, c[$, $V :=]c, +\infty[$. Alors $I \subset U \cup V$, et ce sont deux ouverts disjoints non vide : contradiction.

■

Connexité par arcs

Définition 15 *On dit que X est connexe par arcs si pour tout $x, y \in X$, il existe $f : [0, 1] \to X$ continu tel que $f(0) = x$ et $f(1) = y$.*

Théorème 6 *Si X est connexe par arcs, alors il est connexe.*

Preuve:
Supposons par l'absurde qu'il existe U et V deux ouverts disjoints non vides tels que $X = U \cup V$. Soit $x \in U$ et $y \in V$, puis $f : [0, 1] \to X$ un chemin continu reliant x à y. Soient $I := f^{-1}(U)$ et $J := f^{-1}(V)$. Alors I et J sont deux ouverts (car f continue) non vides disjoints de $[0, 1]$. La connexité de $[0, 1]$ implique la contradiction.

■

La réciproque du théorème précédent est fausse en général. Dans $\mathbb{R}^2$ muni d'une distance usuelle, soit $X_0 := \{(x, \sin \frac{1}{x}) : x > 0\}$. Cet ensemble est connexe par arcs (c'est le graphe d'une fonction continue) et en particulier connexe. Son adhérence $X := \overline{X_0}$ est donc aussi connexe. Montrons que X n'est pas connexe par arcs. Observons que $X = X_0 \cup (\{0\} \times [-1, 1])$. Supposons par l'absurde qu'il existe $f : [0, 1] \to X$ continue telle que $f(0) = (1, \sin 1)$ et $f(1) \in \{0\} \times [-1, 1]$. On note $x(t)$ l'abscisse de $f(t), t \in [0, 1]$. Quitte à remplacer 1 par $\inf\{t > 0 : x(t) = 0\}$, on peut supposer que pour tout $t < 1, x(t) > 0$.

La fonction $t \mapsto x(t)$ est continue, comme composée de f qui est continue, et de la projection sur la première coordonnée, qui est linéaire en dimension finie donc continue. Pour tout $\varepsilon \in (0, 1)$, $x([1-\varepsilon, 1])$

est un intervalle compact de $\mathbb{R}^+$ (comme image continue d'un intervalle compact). Comme $x(1) = 0$, il existe donc $a_\varepsilon > 0$ tel que $x([1-\varepsilon, 1]) = [0, a_\varepsilon]$. On en déduit pour tout $\varepsilon \in (0,1)$

$$\overline{f([1-\varepsilon], 1])} \supset \overline{\{(t, \sin\frac{1}{t}) : t \in]0, a_\varepsilon]\}} \supset \{0\} \times [-1, 1].$$

Ainsi pour tout $\alpha \in [-1,1]$, il existe une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers 1 telle que $(f(t_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(0, \alpha)$. Ceci contredit le fait que f a une limite (unique !) en 1.

Théorème 7 *Dans un* evn E*, les ouverts connexes sont connexes par arc.*

Preuve:
Soit $U \subset E$ un ouvert connexe. Montrons que U est connexe par arcs. Soit $x \in U$. Notons U_x l'ensemble des points $y \in U$ tel qu'il existe un chemin continu dans U reliant x à y : $f : [0,1] \to U$ continu avec $f(0) = x$, $f(1) = y$. Alors U_x est non vide (il contient x).

Montrons que U_x ouvert : si $y \in U_x$, soit $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset U$. Alors tout point z de $B(y, r)$ peut être relié continûment dans $B(y, r)$ (par le segment joignant z à y !) et donc à x (en connectant les deux chemins, et en les reparamétrant, pour que la concaténation des deux chemins soient paramétrées sur $[0, 1]$). Ainsi, $B(y, r) \subset U_x$ et U_x est ouvert.

Montrons que U_x est fermé dans U. Soit $(y_i)_{i\geq 0}$ une suite dans U_x convergeant vers $y \in U$. Alors il existe $r > 0$ tel que $B(y, r) \subset U$, puis $i \geq 0$ tel que $y_i \in B(y, r)$. En concaténant (et reparamétrant) le chemin dans U reliant x à y_i avec le segment joignant y_i à y, on voit que $y \in U_x$.

Ainsi, $U_x = U$.

■

Composantes connexes

Définition 16 *On dit que $A \subset X$ est une composante connexe de X si A est connexe et est maximale pour cette propriété.*

Autrement dit, si $A \subset B \subset X$ avec B connexe, alors $A = B$.

Les composantes connexes de X sont donc deux à deux disjointes (sinon, la réunion de deux composantes connexes d'intersection non vide serait un connexe plus grand que chacune d'elles). Ainsi chaque point $x \in X$ appartient à une unique composante connexe, qui n'est autre que la réunion de tous les connexes qui contiennent x. En conclusion, l'espace X est la réunion disjointe de ses composantes connexes.

De plus,

Remarque 3
- *Les composantes connexes de X sont fermées (sinon, l'adhérence d'une composante connexe serait connexe et plus grande).*
- *Si X est un ouvert d'un* evn E*, alors les composantes connexes de X sont des ouverts de E (par connexité des boules ouvertes de E).*

Théorème 8 *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une réunion disjointe et dénombrable d'intervalles ouverts.*

Preuve:
Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$. Soit $(C_i)_{i\in I}$ la famille de ses composantes connexes. Elles sont disjointes 2 à 2. Pour chaque $i \in I$, il existe $q_i \in \mathbb{Q} \cap C_i$, ce qui donne une injection de I dans $\mathbb{Q}$. En particulier, il y a (au plus) un nombre dénombrable de composantes connexes. Enfin, ce sont des ouverts de $\mathbb{R}$ par le deuxième item de la remarque précédente. ■

2.4 Questions et exercices

Questions 2 *Soit (X, d) un espace métrique.*

1. *Les singletons $\{x\}, x \in X$, sont-ils connexes ?*
2. *La restriction d'une fonction continue $f : X \to Y$ à une partie $A \subset X$ est-elle continue (pour la topologie induite) ? Lorsque $X = Y = \mathbb{R}$ et $A =]0, 1[$, donner un exemple d'une fonction continue $f : A \to Y$ qui n'est pas prolongeable en une fonction continue sur X.*
3. *L'espace métrique $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle $|\cdot|$ est-il homéomorphe à $\mathbb{R}$ muni de la distance discrète ?*
4. *Existe-t-il des applications linéaires qui ne soient pas continues ?*
5. *Existe-t-il sur $M_n(\mathbb{R})$ des normes $\|\cdot\|$ qui ne soient pas subordonnées à une norme sur $\mathbb{R}^n$ mais qui vérifient l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ pour tout $A, B \in M_n(\mathbb{R})$?*
6. *Un convexe est-il connexe ?*
7. *Est-ce que $GL_n(\mathbb{R})$ est connexe ?*
8. *Est-ce que le produit de deux connexes est connexe (pour la topologie produit) ?*
9. *Dans un* evn*, est-ce qu'un fermé connexe est connexe par arcs ? Est-ce que l'adhérence d'un connexe par arcs est connexe par arcs ?*

Exercice 6 *Soit A une partie d'un espace métrique (X, d). Montrer que la fonction $d_A \colon X \to \mathbb{R}$ définie par $d_A(x) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ est continue.*

Exercice 7 *On se donne n espaces métriques $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$. Pour $i = 1, \ldots, n$, on note $\pi_i : (x_1, \ldots, x_n) \in X_1 \times \ldots, \times X_n \mapsto x_i \in X_i$ la projection sur la $i^{\text{ème}}$ coordonnée.*

1. *Montrer que chaque π_i est continue.*
2. *Soit $f : X \to X_1 \times \ldots, \times X_n$, où X est un espace métrique. Montrer que f est continue si et seulement si chaque application coordonnée de f est continue.*

Exercice 8 *Soit φ une forme linéaire non identiquement nulle sur un* evn *E.*

1. *Justifier que $\varphi(B(0, 1))$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ centré en 0.*
2. *On suppose que $\varphi(B(0, 1)) \neq \mathbb{R}$. Justifier que φ est continue.*
3. *On suppose que ker φ est fermé.*
   (a) *Montrer qu'il existe $x \in E$ et $r > 0$ tel que $\varphi(B(x, r)) \neq \mathbb{R}$.*
   (b) *En déduire que $\varphi(B(0, r)) \neq \mathbb{R}$.*
   (c) *Conclure que φ est continue.*

Exercice 9 *Soit E un* evn*. Montrer que les translations et homothéties*

$$\tau_x \colon y \mapsto y + x, \quad h_\lambda \colon y \mapsto \lambda \cdot y,$$

pour $x \in X$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$, sont des homéomorphismes.

Exercice 10 *On note $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$, et*

$$\varphi \colon [0, 2\pi[\to \mathbb{S}^1, \quad \theta \mapsto e^{i\theta}.$$

Cette fonction est continue et bijective. Est-ce un homéomorphisme ? Montrer que sa restriction à $]0, 2\pi[$ est un homéomorphisme sur son image.

Exercice 11 *Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux* evn. *Montrer que f est continue si et seulement si f est lipschitzienne.*

Exercice 12 *On définit sur l'ensemble $X =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ les deux fonctions :*

$$d : (x,y) \in X \times X \mapsto |x-y|, \qquad \delta : (x,y) \in X \times X \mapsto |\tan x - \tan y|.$$

1. *Justifier que* d *et δ sont deux distances topologiquement équivalentes.*
2. *Justifier que* $\tan$ *est une fonction lipschitzienne de (X, δ) vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ mais qu'elle n'est pas lipschitzienne de (X, d) vers $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. La notion de fonction lipschitzienne est donc une propriété* métrique.

Exercice 13 *L'objet de cet exercice est de calculer la différentielle du déterminant.*

1. *Justifier que la fonction* $\det$ *est C^∞ sur $M_n(\mathbb{R})$.*
2. *Soient $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $H \in M_n(R)$. Montrer que*
$$\det(A + \varepsilon H) = \det A + \epsilon \operatorname{tr}({}^t(\operatorname{com} A)H) + O(\epsilon^2), \qquad \epsilon \to 0,$$
où $\operatorname{com} A$ *est la comatrice de A.*
3. *Exprimer la différentielle de* $\det$ *en A, d'abord lorsque $A \in GL_n(\mathbb{R})$, puis lorsque $A \in M_n(\mathbb{R})$.*

Exercice 14 *Le but de cet exercice est de montrer que $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ est connexe par arcs.*

1. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une application continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ telle que $\varphi(0) = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ et $\varphi(1) = (x, \sqrt{2})$.*
2. *Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une application continue $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$ telle que $\psi(0) = (x,y)$ et $\psi(1) = (x, \sqrt{2})$.*
3. *Conclure.*
4. *L'ensemble $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ est-il connexe ?* Indication : On pourra projeter cet ensemble sur les axes des coordonnées.

Exercice 15
1. *Soit $z_1, \ldots, z_k \in \mathbb{C}$ avec $k \geq 1$. Montrer que $\mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_k\}$ est connexe par arcs* Indication : on pourra s'inspirer de l'exercice 14.
2. *Montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{C})$ des matrices inversibles dans $M_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.* Indication : on pourra justifier que pour toutes matrices $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, le polynôme $P(t) = \det\,(tA + (1-t)B)$ est non nul, et a donc un nombre fini de racines.

Exercice 16
1. *Si $A \subset X$ est une partie connexe, alors toute partie $B \subset X$ telle que $A \subset B \subset \overline{A}$ est connexe.*
2. *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.*
   (a) *Montrer que l'ensemble*
   $$\Gamma := \left\{ \frac{f(x) - f(y)}{x - y} : (x,y) \in I \times I, x < y \right\}$$
   est connexe.
   (b) *Justifier que $f'(I) \subset \overline{\Gamma}$ et aussi que $\Gamma \subset f'(I)$.*
   (c) *En déduire que $f'(I)$ est un intervalle (théorème de Darboux).*

Exercice 17
1. *Montrer que $SO(2)$ est connexe par arcs.*

2. *Montrer que pour tout $n \geq 2$, $SO(n)$ est connexe par arcs.*
3. *Justifier que l'ensemble des matrices symétriques définies positives est connexe par arcs.*
4. *En utilisant la décomposition polaire, montrer que l'ensemble $GL_n(\mathbb{R})^+$ des matrices inversibles réelles de déterminant strictement positif est connexe.*
5. *Justifier que $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes.*

Exercice 18 1. *Soit X un espace connexe, et Y un espace métrique. On suppose que $f\colon X \to Y$ est localement constante : tout point de x admet un voisinage sur lequel f est constante. Montrer que f est constante.*

2. *On considère le cas où $X = [0,1]$ et $Y = \mathbb{S}^1$. Soient $\varphi, \psi : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ deux fonctions continues telles que $e^{i\varphi(x)} = e^{i\psi(x)}$ pour tout $x \in [0,1]$. Montrer alors que $\varphi = \psi$.* Indication : on pourra observer que $\varphi - \psi$ est à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$.

Exercice 19 *Justifier par un argument de connexité que*

1. *les* evn $\mathbb{R}$ *et* $\mathbb{R}^2$ *ne sont pas homéomorphes ;*
2. *les espaces métriques $[0,1]$ et $\mathcal{S}^1$ ne sont pas homéomorphes.*

Exercice 20 *Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^1 dilatante : il existe $k > 0$ tel que $\|f(x) - f(y)\| \geq k\|x - y\|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}^n$.*

1. *Montrer que f est injective.*
2. *Montrer que la différentielle de f en tout point est inversible. En déduire que $f(\mathbb{R}^n)$ est ouvert.*
3. *Montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé.*
4. *Conclure que f est un C^1 difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.*

2.5 Pour aller plus loin

Exercice 21 *(*)(surjectivité de l'exponentielle de $M_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$). Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. On note $\mathbb{C}[A]$ l'ensemble des polynômes en la matrice A (i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires de puissances de A). On pose également $G = \mathbb{C}[A] \cap GL_n(\mathbb{C})$ et $H = \exp \mathbb{C}[A]$. Le but de l'exercice est de montrer que $G = H$.*

1. *Montrer que G est connexe par arcs.*
2. *Montrer que $H \subset G$.*
3. *Justifier que* $\exp(A_1 + A_2) = \exp(A_1).\exp(A_2)$ *pour tout A_1, A_2 dans $\mathbb{C}[A]$. En déduire que* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est un sous-groupe de G.*
4. *Montrer que* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est un voisinage de la matrice $I_n = \exp(0_n)$ dans G. En déduire que* $\exp(\mathbb{C}[A])$ *est un ouvert de G.*
5. *Justifier que pour tout $B \in G$, $B.H = \{B.\exp(A_1) : A_1 \in \mathbb{C}[A]\}$ est un ouvert de G.*
6. *Justifier que le complémentaire de H dans G est $\cup_{B \in G \setminus H} B.H$. En déduire que H est un fermé de G.*
7. *Conclure.*

Chapitre 3

Complétude

3.1 Suites de Cauchy

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 17 *On dit que $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ est une* suite de Cauchy *si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, on a $d(x_p, x_q) < \varepsilon$.*

On dit que (X, d) est complet lorsque toute suite de Cauchy de X converge.

Le critère de Cauchy dans un espace métrique complet est souvent un moyen de montrer la convergence d'une suite dont on ignore la limite éventuelle.

Proposition 18 *Dans un* evn (E, N)*, une suite de Cauchy est bornée.*

Preuve:
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans E. Il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $p \geq n_0$, on a $N(u_p - u_{n_0}) \leq 1$ et donc $N(u_p) \leq N(u_{n_0}) + 1$. On en déduit que la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée, par exemple par $M := \max(N(u_0), \ldots, N(u_{n_0-1}), N(u_{n_0}) + 1)$. ■

Proposition 19 *Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X.*

1. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ converge, alors elle est de Cauchy.*
2. *Si $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy et a une valeur d'adhérence, alors elle converge vers celle-ci.*

Preuve:
Montrons la deuxième assertion. Soit x une valeur d'adhérence d'une suite de Cauchy $(x_n)_{n\geq 0}$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, $d(x_p, x_q) \leq \varepsilon$. Comme x est une valeur d'adhérence, il existe $p_0 \geq n_0$ tel que $d(x, x_{p_0}) \leq \varepsilon$. Alors pour tout $q \geq n_0$,

$$d(x_q, x) \leq d(x_q, x_{p_0}) + d(x_{p_0}, x) \leq 2\varepsilon,$$

ce qui conclut la preuve.

■

Remarque 4 *Un critère très utile pour montrer qu'une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy est de montrer l'existence d'une série $\sum_n a_n$ à termes positifs, convergente, qui vérifie*

$$\forall n \geq 0, \qquad d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n.$$

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $\sum_{n\geq n_0} a_n \leq \varepsilon$ (car le reste d'une série convergente tend vers 0). On en déduit alors que pour tout $p > q \geq n_0$,

$$d(x_p, x_q) \leq \sum_{n=q}^{p-1} d(x_n, x_{n+1}) \leq \sum_{n=q}^{p-1} a_n \leq \sum_{n\geq n_0} a_n \leq \varepsilon.$$

Donc la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy.

Théorème 9 *L'ensemble $\mathbb{R}$ est complet.*

Preuve:
On démontre [1] ce théorème en admettant que toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (et donc toute partie non vide minorée admet une bornée inférieure).

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Elle est donc bornée. Pour tout $n \geq 0$, on note $v_n := \inf\{u_m : m \geq n\}$. Alors la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ est croissante. Elle converge donc vers

$$\ell := \sup\{v_n : n \geq 0\}.$$

De plus, comme $(u_n)_{n\geq 0}$ est bornée, $(v_n)_{n\geq 0}$ l'est aussi et donc $\ell \in \mathbb{R}$.

Montrons que ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$, ce qui permettra de conclure par la proposition précédente. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \geq 0$. Comme $(v_n)_{n\geq 0}$ converge vers ℓ, il existe $n_1 \geq n_0$ tel que $|v_{n_1} - \ell| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Comme $v_{n_1} := \sup\{u_m : m \geq n_1\}$, il existe $m \geq n_1$ tel que $|u_m - v_{n_1}| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. On a donc trouvé $m \geq n_0$ tel que

$$|u_m - \ell| \leq \varepsilon,$$

ce qui prouve que ℓ est une valeur d'adhérence de $(u_n)_{n\geq 0}$. ■

En fait, le nombre ℓ dans la preuve précédente est simplement $\liminf_{n\to+\infty} u_n$.

Remarque 5 *La complétude N'EST PAS une notion topologique.*

Sur un même espace X, il peut exister deux distances d_1 et d_2 topologiquement équivalentes mais dont l'une seulement rend l'espace complet.

Par exemple, sur l'espace $X =]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on considère deux distances :

$$\forall (x, y) \in X \times X, \qquad d_1(x, y) = |x - y|, \qquad d_2(x, y) = |\tan x - \tan y|.$$

La suite $(-\pi/2 + 1/n)_{n\geq 1}$ converge dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vers $-\pi/2$. Elle est donc de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, et comme elle est contenue dans X, elle est de Cauchy dans (X, d_1). Pourtant, elle ne converge pas dans X. Donc (X, d_1) n'est pas complet.

En revanche, si $(x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans (X, d_2), alors $(\tan x_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$, et donc converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$. Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers $\arctan \ell$ dans (X, d_2). Donc (X, d_2) est complet.

Proposition 20 *Soient $(X_1, d_1), \ldots, (X_m, d_m)$ des espaces métrique complets et N une norme sur $\mathbb{R}^m$. Alors le produit (X, d_N) est complet, où l'on a noté $X := X_1 \times \cdots \times X_m$ et*

$$d_N(x, y) := N((d_1(x_1, y_1), \ldots, d_m(x_m, y_m))), \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_m), y = (y_1, \ldots, y_m) \in X.$$

1. En fait, selon la construction de l'ensemble des réels que l'on choisit, la complétude de $\mathbb{R}$ peut découler simplement de sa définition.

Preuve:
Supposons d'abord $N = \|\cdot\|_1$. Soit $(x_n)_{n\geq 0} \subset X$ une suite de Cauchy dans X. Notons pour chaque $n \geq 0$ et chaque $i \in \{1, \ldots, m\}$, $x_{n,i} \in X_i$ la $i^{ème}$ composante de x_n. Alors pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$ et tous $k, \ell \geq 0$,

$$d_i(x_{k,i}, x_{\ell,i}) \leq d_{\|\cdot\|_1}(x_k, x_\ell).$$

Donc $(x_{n,i})_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans (X_i, d_i), donc converge vers un point $x_i \in X_i$. En notant $x = (x_1, \ldots, x_m)$, il vient

$$d_{\|\cdot\|_1}(x_n, x) = \sum_{i=1}^{m} d(x_{n,i}, x_i) \to 0, \quad n \to +\infty.$$

Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x dans $(X, d_{\|\cdot\|_1})$.

Pour une norme quelconque N, on utilise l'équivalence des normes dans $\mathbb{R}^m$: il existe $C, C' > 0$ tel que $C'N \leq \|\cdot\|_1 \leq CN$. On en déduit que

$$C'd_N \leq d_{\|\cdot\|_1} \leq Cd_N. \tag{3.1}$$

Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy pour d_N. Alors par l'inégalité de droite dans (3.1), c'est une suite de Cauchy pour $d_{\|\cdot\|_1}$. Par le paragraphe précédent, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers une limite x, pour $d_{\|\cdot\|_1}$. Par l'inégalité de gauche dans (3.1), elle converge aussi pour d_N. En conclusion, (X, d_N) est complet.
■

Proposition 21 *Un fermé dans un complet est complet.*

Preuve:
Soit F une partie fermée d'un espace métrique complet (X, d). Il s'agit de montrer que F muni de la distance induite d_F est complet. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy dans (F, d_F). Alors c'est une suite de Cauchy dans (X, d). Comme (X, d) est complet, elle converge vers une limite $y \in X$. Or, F est fermé, donc $y \in F$. Ainsi, $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers y dans (F, d_F). On peut conclure que (F, d_F) est complet. ■

3.2 Théorème de point fixe

Cette section illustre l'utilisation de la complétude pour montrer des théorèmes d'existence. La preuve de tels résultats s'appuie souvent sur le théorème de point fixe pour les applications contractantes.

Théorème 10 (Théorème de point fixe) *On suppose X complet. Soit $f : X \to X$ une application contractante : il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $x, y \in X$, on a $d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Alors f a un unique point fixe.*

Preuve:
Soit $x_0 \in X$. On va montrer que la suite $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ converge vers un point fixe de f (ici, f^n désigne l'itérée n fois de f : $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$). Pour cela, on montre que c'est une suite de Cauchy. Pour tout $n, m \geq 1$,

$$d(f^n(x_0), f^{n+1}(x_0)) = d(f(f^{n-1}(x_0)), f(f^n(x_0))) \leq kd(f^{n-1}(x_0), f^n(x_0)) \leq \cdots \leq k^n d(x_0, f(x_0)).$$

Comme la série $\sum_n k^n$ converge, on en déduit que la suite $(f^n(x_0))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans X complet. Notons x sa limite. Alors en passant à la limite dans $d(f^n(x_0), f(f^n(x_0))) \leq k^n d(x_0, f(x_0))$, il vient $d(x, f(x)) = 0$ (noter qu'une application contractante est continue). Ainsi, $x = f(x)$ est un point fixe de f.

Pour l'unicité, il suffit de voir que si $x, y \in X$ sont deux points fixes de f, alors $d(x, y) = d(f(x), f(y)) \leq kd(x, y)$. Comme $k < 1$, ceci n'est possible que si $d(x, y) = 0$, et donc $x = y$.
■

Théorème 11 (Théorème de point fixe à paramètre) *On suppose X complet et soit T un espace métrique. Soit $f : X \times T \to X$ telle que*
- *il existe $0 < k < 1$ tel que pour tout $t \in T$, pour tous $x, y \in X$, $d(f(t, x), f(t, y)) \leq kd(x, y)$,*
- *pour tout $x \in X$, $t \mapsto f(t, x)$ est continue.*

Alors pour tout $t \in T$, $f(t, \cdot)$ a un unique point fixe $x(t)$ et l'application $t \mapsto x(t)$ est continue.

Preuve:
La première partie de la conclusion résulte du théorème précédent appliqué à $f(t, \cdot)$. Maintenant fixons $t_0 \in T$. Alors pour tout $t \in T$,

$$\begin{aligned} d(x(t), x(t_0)) = d(f(t, x(t)), f(t_0, x(t_0))) &\leq d(f(t, x(t)), f(t, x(t_0))) + d(f(t, x(t_0)), f(t_0, x(t_0))) \\ &\leq kd(x(t), x(t_0)) + d(f(t, x(t_0)), f(t_0, x(t_0))). \end{aligned}$$

Ainsi $d(x(t), x(t_0)) \leq \frac{1}{1-k} d(f(t, x(t_0)), f(t_0, x(t_0)))$. On conclut par la continuité de $f(\cdot, x(t_0))$.
■

Le théorème de Cauchy-Lipschitz et le théorème d'inversion locale peuvent se démontrer à l'aide du théorème de point fixe ou du théorème de point fixe à paramètres. Penser aussi aux applications pour l'approximation : méthode de Newton et méthode de la sécante.

3.3 Théorème de prolongement

Théorème 12 *Soit $f : D \subset X \to Y$ une fonction définie sur une partie D dense dans (X, d) à valeurs dans l'espace métrique complet (Y, δ). On suppose que f est uniformément continue. Alors f admet un unique prolongement continu à X (qui est en fait uniformément continu).*

Preuve:
Soit $x \in X$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de D qui converge vers x. Montrons que $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $z, z' \in D$ vérifiant $d(z, z') < \eta$, on a $\delta(f(z), f(z')) < \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\geq 0}$ étant convergente, elle est de Cauchy. Donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, on a $d(x_p, x_q) \leq \eta$. Alors $\delta(f(x_p), f(x_q)) \leq \varepsilon$. Ainsi, $(f(x_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans Y complet, et donc converge vers un élément $\alpha \in Y$.

Soint maintenant une autre suite $(x'_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de D convergeant vers x. Comme précédemment, $(f(x'_n))_{n\geq 0}$ converge vers un élément $\alpha' \in Y$. On va montrer que $\alpha = \alpha'$. Pour cela, soit $(z_n)_{n\geq 0}$ tel que $z_n = x_n$ si n est pair et $z_n = x'_n$ si n est impair. En appliquant ce qui précède à $(z_n)_{n\geq 0}$, il vient que $(f(z_n))_{n\geq 0}$ converge vers un élément $\beta \in Y$. Comme $(f(z_n))_{n\geq 0}$ et $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ont une suite extraite en commun, on a $\alpha = \beta$ et de même $\alpha' = \beta$, donc $\alpha = \alpha'$. Ainsi, la limite de $(f(x_n))_{n\geq 0}$ ne dépend pas du choix de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de D qui converge vers x. On note $f(x)$ cette limite. On définit ainsi un prolongement de f à X tout entier.

Montrons que f est uniformément continu. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\eta > 0$ correspondant donné par l'uniforme continuité de $f|_D$. On se donne $x, y \in X$ tels que $d(x, y) < \frac{\eta}{2}$. Soient $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ deux suites dans D convergeant respectivement vers x et y. Alors par la définition de l'extension de f construite précédemment, $(f(x_n))_{n\geq 0}$ et $(f(y_n))_{n\geq 0}$ convergent respectivement vers $f(x)$ et $f(y)$. Par ailleurs, il existe $n_0 \geq 0$ tel que $d(x_n, x) < \frac{\eta}{4}$ et $d(y_n, y) < \frac{\eta}{4}$. Alors

$$d(x_n, y_n) \leq d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n) < \frac{\eta}{4} + \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{4} = \eta$$

et donc par le choix de η, $\delta(f(x_n), f(y_n)) \leq \varepsilon$. En passant à la limite $n \to +\infty$, il vient $\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$. Ainsi, f est uniformément continu.

Enfin, pour l'unicité, s'il existe une fonction continue $g : X \to Y$ qui coïncide avec f sur D, alors $x \mapsto \delta(g(x), f(x))$ est continue et nulle sur une partie dense de X, donc nulle sur X. Donc $g = f$, d'où l'unicité.

■

Ce théorème de prolongement permet notamment d'étendre la transformée de Fourier définie initialement sur $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ à $L^2(\mathbb{R}^n)$ tout entier. Il intervient également lorsqu'on cherche à prolonger l'intervalle de définition de la solution d'une équation différentielle ordinaire (théorème d'explosion en temps fini). C'est également lui qui est derrière le théorème de prolongement dérivable : si une fonction $f \in C^1(]a, b])$ est telle que sa dérivée a une limite à droite en a, alors f se prolonge en une fonction $C^1([a, b])$.

Remarque 6 *Sous les hypothèses du théroème précédent, si on suppose de plus f isométrique (i.e. $\delta(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tout $x, y \in X$), alors le prolongement reste isométrique.*

3.4 Espaces de Banach

Définition 18 *Un* espace de Banach *est un* evn *complet.*

Proposition 22 *Soit E un* evn *et F un espace de Banach. Alors l'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ des applications linéaires continues de E dans F est un espace de Banach.*

Preuve:
On note $|||\cdot|||$ la norme subordonnée (aux normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$) dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. Soit $(f_i)_{i\geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}_c(E, F)$: pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i_0 \geq 0$ tel que pour tout $i, j \geq i_0$, on a $|||f_i - f_j||| \leq \varepsilon$, i.e. pour tout $x \in E$,

$$\|f_i(x) - f_j(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E . \tag{3.2}$$

On en déduit que pour tout $x \in E$, $(f_i(x))_{i\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans F, qui est complet. Donc $(f_i(x))_{i\geq 0}$ converge dans F vers un élément noté $f(x)$. On définit ainsi une fonction $f : E \to F$. La linéarité passant à la limite simple, f est une application linéaire. En fixant i et en faisant $j \to +\infty$ dans (3.2), il vient

$$\|f_i(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon \|x\|_E \tag{3.3}$$

et donc $\|f(x)\|_F \leq (\varepsilon + |||f_i|||) \|x\|_E$ pour tout $x \in E$. Ceci implique que f est bien continue. Enfin, (3.3) montre aussi que $|||f_i - f||| \leq \varepsilon$ dès que $i \geq i_0$, ce qui prouve que $(f_i)_{i\geq 0}$ converge vers f dans $\mathcal{L}_c(E, F)$. ■

Dans le cas où $F = \mathbb{R}$, on obtient que

Corollaire 1 *Le dual (topologique) E^* d'un Banach E, qui est l'ensemble des formes linéaires continues sur E, est un espace de Banach.*

Théorème 13 *Soit (E, N) un* evn *Alors E est un Banach si et seulement si toute série absolument convergente est simplement convergente.*

Preuve:
Supposons que E est un Banach. Soit $\sum_k x_k$ une série absolument convergente (ce qui veut dire qu'elle converge en norme, à ne pas confondre avec la convergence normale !) : $\sum_{k=0}^{\infty} N(x_k) < \infty$. Notons $S_l := \sum_{k=0}^{l} x_k$. Alors pour tout $0 \leq m < l$, on a $N(S_l - S_m) = N(\sum_{k=m+1}^{l} x_k) \leq \sum_{k=m+1}^{l} N(x_k) \leq \sum_{k=m+1}^{+\infty} N(x_k)$. Comme le reste d'une série convergente (ici $\sum_k N(x_k)$) tend vers 0, on en déduit que

la suite des sommes partielles $(S_l)_{l\geq 0}$ est de Cauchy dans E Banach, et donc converge : la série est simplement convergente.

Réciproquement, supposons que toute série absolument convergente est convergente et montrons que E est un Banach. Soit $(x_i)_{i\geq 0}$ une suite de Cauchy dans E. Pour montrer qu'elle converge, il suffit de montrer qu'elle a une valeur d'adhérence. On va construire par récurrence une suite extraite $(x_{\varphi(i)})_{i\geq 0}$, avec $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \geq 0$,

$$N(x_{\varphi(i)} - x_{\varphi(i+1)}) \leq \frac{1}{2^i}. \tag{3.4}$$

Il existe i_0 tel que pour tout $i \geq i_0$, on a $N(x_i - x_{i_0}) < \frac{1}{2}$. On pose $\varphi(0) = i_0$. Supposons construits $\varphi(0) < \cdots < \varphi(k)$ tel que pour tout $0 \leq j \leq k$, on a pour tout $i \geq j$, $N(x_i - x_{\varphi(j)}) \leq \frac{1}{2^{j+1}}$. Alors il existe $i_{k+1} > \varphi(k)$ tel que pour tout $i \geq i_{k+1}$, on a $N(x_i - x_{i_{k+1}}) \leq \frac{1}{2^{k+1}}$. On pose $\varphi(k+1) = i_{k+1}$. Cette fonction φ ainsi construite par récurrence est strictement croissante, et vérifie (3.4).

Posons maintenant $y_i := x_{\varphi(i)} - x_{\varphi(i+1)}$. Alors par construction la série $\sum_i y_i$ est absolument convergente, donc simplement convergente. Comme pour tout $j \geq 1$, on a $x_{\varphi(j)} = -\sum_{i=0}^{j-1} y_i + x_{\varphi(0)}$, on en déduit que la suite extraite $(x_{\varphi(i)})_{i\geq 0}$ est convergente, donc la suite $(x_i)_{i\geq 0}$ a une valeur d'adhérence.

■

Le théorème précédent permet par exemple de définir l'exponentielle d'une matrice : si $A \in M_n(\mathbb{R})$, alors la série $\sum_k \frac{1}{k!} |||A|||^k$ converge (pour n'importe quelle norme subordonnée). On en déduit que la série $\sum_k \frac{1}{k!} \left|\left|\left|A^k\right|\right|\right|$ converge égalemment (car $\left|\left|\left|A^k\right|\right|\right| \leq |||A|||^k$) et on peut conclure que $\sum_k \frac{1}{k!} A^k$ converge vers une limite qui est, par définition, l'exponentielle de A.

Une autre application est donnée par le résultat suivant :

Théorème 14 *Soient E un espace de Banach et $u \in \mathcal{L}_c(E)$ tel que $|||u||| < 1$. Alors $I - u$ est inversible (en notant I l'application linéaire identité).*

Preuve:
Pour tout $k \geq 0$, notons u^k la composée $\underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{k \text{ fois}}$. Comme $\left|\left|\left|u^k\right|\right|\right| \leq |||u|||^k$ et que $|||u||| < 1$, on en déduit que la série réelle $\sum_k |||u|||^k$ converge. Donc par le Théorème 13, la série $\sum_k u^k$ converge également. Notons v sa somme. Alors pour tout $K \in \mathbb{N}$,

$$(I - u) \circ \sum_{k=0}^{K} u^k = \sum_{k=0}^{K} u^k - \sum_{k=0}^{K} u^{k+1} = I - u^{K+1}. \tag{3.5}$$

L'application $(v, w) \mapsto v \circ w$ est bilinéraire sur $\mathcal{L}_c(E) \times \mathcal{L}_c(E)$, et continue car $|||v \circ w||| \leq |||v|||\,|||w|||$. Comme $\lim_{k\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} u^k = v$ dans $\mathcal{L}_c(E)$, on en déduit que le membre de gauche dans (3.5) tend vers $(I - u)v$. Quand au membre de droite, il tend vers I car $\left|\left|\left|(I - u^{K+1}) - I\right|\right|\right| = \left|\left|\left|u^k\right|\right|\right| \leq |||u|||^k$ et $\lim_{k\to+\infty} |||u|||^k = 0$ puisque $|||u||| < 1$. Ainsi,

$$(I - u)v = I.$$

On montre de même que $v(I - u) = I$. Donc $I - u$ est inversible, d'inverse v.

■

Le théorème précedent s'applique dans $M_n(\mathbb{R})$: pour tout A dans la boule unité d'une norme subordonnée, $I + A$ est une matrice inversible.

Fonctions continues bornées

Dans cette section, on considère un espace métrique (X, d) et un espace de Banach (E, N). On note $\mathcal{B}(X, E)$ l'ensemble des applications $f : X \to E$ qui sont bornées (on dit que f est bornée s'il existe $M > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $N(f(x)) \leq M$). C'est un espace vectoriel pour l'addition ponctuelle et la multiplication par un scalaire ponctuelle. On introduit sur $\mathcal{B}(X, E)$ la norme uniforme : $||f||_\infty := \sup_{x \in X} N(f(x))$ (ce sup est fini précisément lorsque f est bornée).

Théorème 15 *L'ensemble* $(\mathcal{B}(X, E), || \cdot ||_\infty)$ *est un espace de Banach.*

Preuve:
Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour tout $p, q \geq n_0$, on a $||f_p - f_q||_\infty < \epsilon$. Alors, pour tout $x \in X$, on a

$$N(f_p(x) - f_q(x)) \leq \epsilon. \tag{3.6}$$

On en déduit que pour tout $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n \geq 0}$ est de Cauchy dans E. Comme E est complet, cette suite converge vers un élément de E, qu'on note $f(x)$. Ceci permet de définir une fonction $f : X \to E$. En fixant p et faisant $q \to +\infty$ dans (3.6), on obtient que pour tout $\epsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p \geq n_0$, on a $N(f_p(x) - f(x)) \leq \epsilon$ pour tout $x \in X$. Ainsi, $N(f(x)) \leq \epsilon + N((f_p(x))) \leq \epsilon + ||f_p||_\infty$, ce qui montre que $f \in \mathcal{B}(X, E)$. De plus, si $p \geq n_0$, on a $||f_p - f||_\infty \leq \epsilon$, ce qui montre que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge vers f.

■

On considère aussi l'ensemble $\mathcal{C}_b(X, E)$ des fonctions continues bornées sur X.

Théorème 16 *L'ensemble* $\mathcal{C}_b(X, E)$ *est un sous-espace fermé de* $\mathcal{B}(X, E)$*. En particulier, l'espace* $(\mathcal{C}_b(X, E), || \cdot ||_\infty)$ *est complet.*

Preuve:
La première phrase est une reformulation du fait qu'une limite uniforme de fonctions continues est continue. La deuxième phase est la conséquence du fait qu'un fermé dans un complet est complet. ■

3.4.1 Espaces de Lebesgue

Théorème 17 *Soit* (X, μ) *un espace mesuré et* $p \in [1, \infty]$*. L'espace* $L^p(X, \mu)$ *est un espace de Banach.*

Preuve:
Dans cette preuve, on distingue une classe dans L^p et un de ses représentants dans $\mathcal{L}^p$. Pour tout $f \in \mathcal{L}^p(X, \mu)$, on note $[f]$ sa classe dans $L^p(X, \mu)$.

Cas $p = \infty$. Soit $([f_n])_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans L^∞. Pour tout $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$, on introduit un ensemble négligeable $Z_{k,\ell}$ tel que pour tout $x \in X \setminus Z_{k,\ell}$,

$$|f_k(x) - f_\ell(x)| \leq \|f_k - f_\ell\|_{L^\infty}. \tag{3.7}$$

Alors $Z := \cup_{(k,\ell) \in \mathbb{N}^2} Z_{k,\ell}$ est négligeable comme réunion dénombrable d'ensembles négligeables et (3.7) est vrai pour tout $x \in X \setminus Z$ et pour tout $k, \ell \in \mathbb{N}$.

Comme $(f_n)_{n \geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}^\infty$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k, \ell \geq N$, on a

$$\|f_k - f_\ell\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$$

et donc pour tout $x \in X \setminus Z$,

$$|f_k(x) - f_\ell(x)| \leq \varepsilon. \tag{3.8}$$

On en déduit que pour tout $x \in X \setminus Z$, $(f_k(x))_{k\geq 0}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, et donc converge vers une limite notée $f(x)$. On prolonge f par 0 sur Z. Alors f est mesurable comme limite simple presque partout d'une suite de fonctions mesurables.

En passant à la limite $k \to +\infty$ dans (3.8) (avec $\ell \geq N$ fixé), on obtient pour tout $x \in X \setminus Z$

$$|f(x) - f_\ell(x)| \leq \varepsilon.$$

Donc $f - f_\ell \in \mathcal{L}^\infty$ et $\|f - f_\ell\|_{L^\infty} \leq \varepsilon$. On peut conclure que $f \in \mathcal{L}^\infty$, puis que $\lim_{\ell\to+\infty} \|f - f_\ell\|_{L^\infty} = 0$, ce qui implique aussi que $[f] \in L^\infty$ et $\lim_{\ell\to+\infty} \|[f] - [f_\ell]\|_{L^\infty} = 0$.

Conclusion : L^∞ est complet.

Cas $p \in [1, \infty[$. Pour montrer la complétude de L^p, on va utiliser le critère : un *evn* est complet si et seulement si toute série absolument convergente est convergente.

Soit $([f_n])_{n\geq 0} \subset L^p$ tel que la série $\sum_{n=0}^\infty \|f_n\|_{L^p} < \infty$. Par l'inégalité de Minkowski appliquée aux $|f_n|$, il vient

$$\left(\int_X \left(\sum_{n=k}^{\ell} |f_n(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=k}^{\ell} \left(\int_X |f_n(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

En utilisant dans le membre de gauche le théorème de convergence monotone pour faire tendre $\ell \to +\infty$, il vient

$$\left(\int_X \left(\sum_{n=k}^{\infty} |f_n(x)|\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \left(\int_X |f_n(x)|^p \, d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.9}$$

En particulier, pour $k = 0$, on en déduit que pour presque tout $x \in X$, $\sum_{n=0}^\infty |f_n(x)| < \infty$, ce qui signifie que la série $\sum_n f_n(x)$ converge absolument dans $\mathbb{R}$, et donc converge, car $\mathbb{R}$ est complet. Notons Z la partie négligeable où cette convergence n'a pas lieu et posons

$$g : x \in X \mapsto \begin{cases} \sum_{n=0}^\infty f_n(x), & \text{si } x \in X \setminus Z, \\ 0 & \text{si } x \in Z. \end{cases}$$

Alors g est mesurable, comme limite simple presque partout de fonctions mesurables. De plus, comme $|g(x)| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)|$ pour tout $x \in X$, l'inégalité (3.9) (avec $k = 0$) montre que $g \in \mathcal{L}^p(X)$. Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|g - \sum_{n=0}^{N} f_n\|_{L^p} &= \left(\int_X \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} f_n(x)\right|^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p}, \end{aligned}$$

où la dernière inégalité résulte de (3.9) avec $k = N + 1$. Le membre de droite est le reste d'une série convergente. Donc $\lim_{N\to+\infty} \|g - \sum_{n=0}^N f_n\|_{L^p} = 0$.

Ainsi, la série $\sum_n [f_n]$ converge vers $[g]$ dans L^p, ce qui permet de conclure que L^p est de Cauchy.

■

3.5 Questions et exercices

Questions 3 1. *Existe-t-il des* evn *qui ne sont pas complets ?*

2. *Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction lipschitzienne lorsqu'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|\cdot\|_2$. Existe-t-il une norme sur $\mathbb{R}^2$ telle que f soit contractante ?*

3. *Montrer que l'espace $\ell^p(\mathbb{N})$ est complet, pour tout $1 \leq p \leq \infty$.*

Exercice 22 *Soient E, F des* evn*, $U \subset E$ un ouvert, et $X = \mathcal{D}_b(U, F)$ l'*evn *des applications $f\colon U \to F$ différentiables, bornées et à différentielle bornée, muni de la norme*

$$\|f\|_{\mathcal{D}_b} = \sup_U \|f\|_F + \sup_U |||Df||| \,.$$

L'objet de l'exercice est de montrer que si F est un Banach, alors X est un Banach. Pour cela, on se donne une suite de Cauchy $(f_n)_{n\geq 0}$ dans X.

1. *Montrer qu'il existe des fonctions bornées $f : U \to F$ et $G : U \to \mathcal{L}_c(E, F)$ telles que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge vers f dans $\mathcal{B}(U, F)$, tandis que $(Df_n)_{n\geq 0}$ converge vers G dans $\mathcal{B}(U, \mathcal{L}_c(E, F))$.*
2. *Montrer que f est différentiable et que $Df = G$.* Indication : on pourra écrire que pour tous $x \in U$, $n \in \mathbb{N}$ et pour tout h assez petit, on a

$$\begin{aligned}\|f(x+h) - f(x) - G(x)h\| \leq{}& \|(f - f_n)(x+h) - (f - f_n)(x)\| \\ &+ \|f_n(x+h) - f_n(x) - Df_n(x).h\| \\ &+ \|Df_n(x).h - G(x).h\| \,,\end{aligned}$$

   puis appliquer le théorème des accroissements finis dans le premier terme à droite.

Exercice 23 (Ecrit Analyse-Probabilités, Agreg 2020) *Pour tout $f \in L^2(]0, +\infty[)$, on définit la fonction Hf par*

$$Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt, \qquad \forall x > 0.$$

1. *Montrer que pour toute fonction continue $f \in L^2(]0, +\infty[)$, $Hf \in L^2(]0, +\infty[)$ et $\|Hf\|_2 \leq 2\|f\|_2$.* Indication : on pourra estimer $\int_\xi^X (Hf(t))^2\,dt$ pour tout $0 < \xi < X$ en commençant par faire une intégration par parties.
2. *Montrer que H est un endomorphisme continu de $L^2(]0, +\infty[)$.*

Exercice 24 *Soient (X, d) un espace métrique complet et $f : X \to X$. On suppose qu'il existe $n \geq 1$ tel que f^n (l'itérée de f n fois) est contractante. Montrer alors que f admet un point fixe.* Indication : montrer que si x_0 est un point fixe de f^n, alors $f(x_0)$ est un point fixe de f^n.

Exercice 25 *Soient $0 < a < 1 < b$. On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que f n'est pas contractante lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$.*
2. *Montrer qu'il existe $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $A = P\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}P^{-1}$.*
3. *Justifier que $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left\|P\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right\|_2$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.*
4. *Montrer que f est contractante lorsqu'on munit $\mathbb{R}^2$ de la norme N.*
5. *Quel est le point fixe de f ?*

Exercice 26 *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $f : E \to E$ une application contractante. Pour tout $y \in E$, on note $\varphi_y : x \mapsto y + f(x)$.*

1. *Montrer que pour tout $y \in E$, φ_y admet un unique point fixe x_y, et justifier que $y \mapsto x_y$ est lipschitzienne.*

2. *En déduire que $x \mapsto x - f(x)$ est bijective et que sa bijection réciproque est lipschitzienne.*

Exercice 27 (Equations intégrales) *Soient $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ et $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On définit l'application*

$$T : u \in C^0([0,1]) \mapsto Tu \in C^0([0,1])$$

définie par $Tu(x) := g(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)\,dt$, $x \in [0,1]$. On note $M := \|K\|_\infty$.

1. *Montrer que pour tout $n \geq 1$, pour tout $x \in [0,1]$,*

$$|T^n u(x) - T^n v(x)| \leq M^n \frac{x^n}{n!} \|u - v\|_\infty .$$

2. *En déduire que T a un unique point fixe.*

3.6 Pour aller plus loin

Le lemme de Baire apparaît parfois dans certains écrits (son énoncé, hors programme, est alors systématiquement rappelé) :

Théorème 18 (Lemme de Baire) *Soit X un espace métrique complet. Soit $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'ouverts denses. Alors $\cup_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense.*

Voici quelques conséquences classiques du lemme de Baire :

1. Un espace vectoriel qui a une base infinie dénombrable n'est complet pour aucune norme.
2. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions continues sur un espace métrique complet et à valeurs dans un espace métrique, converge simplement vers une fonction f, alors l'ensemble des points de continuité de f est dense dans X.
3. L'ensemble des fonctions continues sur $[0,1]$ nulle part dérivables dans $[0,1]$ est dense dans $C^0([0,1],\mathbb{R})$.

Parmi les corollaires du lemme de Baire, il faut citer également le théorème de Banach-Steinhaus, le théorème de l'application ouverte et le théorème du graphe fermé. Même si ces résultats sont hors programme, ils peuvent intervenir dans certains sujets d'écrit (auxquel cas, ils sont explicitement rappelés). C'est notamment le cas du théorème de Banach-Steinhaus :

Théorème 19 (Théorème de Banach-Steinhaus) *Soient E et F deux espaces de Banach. Soit $(T_i)_{i\in I}$ une famille d'opérateurs linéaires et continus de E dans F. On suppose que pour tout $x \in E$,*

$$\sup_{i\in I} ||T_i x|| < +\infty.$$

Alors

$$\sup_{i\in I} |||T_i||| < +\infty.$$

Autrement dit, une famille d'opérateurs simplement bornée est bornée tout simplement !

Chapitre 4

Compacité

4.1 Définitions équivalentes de la compacité

On se donne un espace métrique (X, d).

Définition 19 *On dit que X est compact si pour tout recouvrement de X par une famille quelconque $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ d'ouverts de X (i.e. $X = \cup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$), il existe un sous-recouvrement fini : il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$ tels que $X = \cup_{i=1}^k U_{\gamma_i}$.*

La compacité est une notion topologique : si on remplace d par une distance topologiquement équivalente, l'ensemble X restera compact.

On dit qu'une partie $A \subset X$ est compacte si A est compacte pour la topologie induite. Autrement dit, A est compact si pour tout recouvrement de A par une famille quelconque $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ d'ouverts de X (i.e. $A \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} U_\gamma$), il existe un sous-recouvrement fini : il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$ tels que $A \subset \cup_{i=1}^k U_{\gamma_i}$.

Exemple 23 *On suppose X compact. Soit A un fermé de X. Alors A est compact.*

Preuve:
Soit $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ une famille d'ouverts de X recouvrant A. Alors la famille constituée de $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ et de $X \setminus A$ est une famille d'ouverts de X recouvrant X. Comme X est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini, qui donne un sous-recouvrement fini de A.

■

Théorème 20 (Bolzano-Weierstrass) *L'espace métrique X est compact si et seulement si toute suite de X a une valeur d'adhérence.*

Preuve:
Supposons que X est compact. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X. Posons

$$F_m := \overline{\{x_l : l \geq m\}} \quad , \quad U_m := X \setminus F_m.$$

Alors $(U_m)_{m\geq 0}$ est une suite croissante d'ouverts de X. Supposons par l'absurde que $X = \cup_{m\geq 0} U_m$. Comme X est compact, on peut en extraire un sous-recouvrement fini. Comme la suite $(U_m)_{m\geq 0}$ est croissante, il existe $m \geq 0$ tel que $X = U_m$ et donc $F_m = \emptyset$, ce qui est absurde. Donc $X \neq \cup_{m\geq 0} U_m$. Ainsi $\cap_{m\geq 0} F_m \neq \emptyset$. Tout élément de cette intersection est une valeur d'adhérence.

Réciproquement, supposons que toute suite de X a une valeur d'adhérence et montrons que X est compact.

Etape 1 On établit d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε. Pour le voir, procédons par l'absurde : on pourrait dans ce cas construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que pour tout $m \neq n \geq 0$, on a $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. En effet, soit $x_0 \in X$. Par hypothèse absurde, $X \neq B(x_0, \varepsilon)$ donc il existe $x_1 \in X \setminus B(x_0, \varepsilon)$. Supposons construits $x_0, x_1, \ldots, x_n$ tels que pour tout $0 \leq i \neq j \leq n$, on a $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$. Par hypothèse absurde, $X \neq \cup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon)$ et donc il existe $x_{n+1} \in X \setminus \cup_{i=0}^n B(x_i, \varepsilon)$. En conclusion, il existe bien une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ telle que $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$ pour tout $n, m \geq 0$. Alors par l'inégalité triangulaire, toute boule de rayon $\varepsilon/2$ contient au plus un seul terme de la suite. Donc $(x_n)_{n\geq 0}$ ne peut pas avoir de valeur d'adhérence : contradiction !

Etape 2 Soit maintenant $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ un recouvrement d'ouverts de X. Montrons par l'absurde qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de rayon $\varepsilon > 0$ soit contenue dans au moins l'un des U_γ. Sinon, pour tout $n > 0$, il existe $x_n \in X$ tel que la boule $B(x_n, \frac{1}{n})$ ne soit contenue dans aucun des U_γ. On peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\geq 0}$ convergeant vers un élément $y \in X$. Il existe $\gamma \in \Gamma$ tel que $y \in U_\gamma$. Comme U_γ est ouvert, il existe $\rho > 0$ tel que $B(y, \rho) \subset U_\gamma$. Soit $k \geq 0$ tel que $d(x_{n_k}, y) < \frac{\rho}{2}$ et $\frac{1}{n_k} < \frac{\rho}{2}$. Alors $B(x_{n_k}, \frac{1}{n_k}) \subset U_\gamma$: contradiction !

Etape 3 On peut maintenant conclure : soit $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ un recouvrement d'ouverts de X. Par l'étape 2, il existe $\varepsilon > 0$ tel que toute boule de rayon $\varepsilon > 0$ soit contenue dans au moins l'un des U_γ. Par l'étape 1, il existe un recouvrement fini de X par des boules de rayon ε, qui sont chacune contenues dans l'un des U_γ. Cela fournit le sous-recouvrement fini attendu.

■

Théorème 21 *Une partie compacte K de X est un fermé de X.*

Preuve:
Soit $(x_i)_{i\geq 0}$ une suite d'éléments de K convergeant vers $x \in E$. Par compacité de K, la suite a une valeur d'adhérence $y \in K$. Nécessairement $x = y$ et en particulier $x \in K$. Donc K est fermé. ■

Proposition 23 *Un espace métrique compact est* séparable*, i.e. il contient une partie dénombrable dense.*

Preuve:
Si (X, d) est compact, pour tout $n \geq 1$, on peut extraire du recouvrement $\{B(x, \frac{1}{n}); x \in X\}$ un sous recouvrement fini : il existe une famille finie $X_n \subset X$ telle que $X = \cup_{x\in X_n} B(x, \frac{1}{n})$. Alors la réunion des X_n est dénombrable (comme union dénombrable d'ensembles finis) et dense (pour tout $y \in X$ et tout $n \geq 1$, il existe $x \in X_n$ tel que $y \in B(x, \frac{1}{n})$). ■

4.2 Continuité et compacité

Théorème 22 *L'image continue d'un compact est compacte.*

Preuve:
Soit $f : X \to Y$ une application continue de l'espace métrique compact X dans un espace métrique Y. Montrons que $f(X)$ est compact. Soit $(U_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ un recouvrement de $f(X)$ par des ouverts de Y. Par continuité de f, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $f^{-1}(U_\gamma)$ est un ouvert de X. De plus, $X \subset \cup_{\gamma\in\Gamma} f^{-1}(U_\gamma)$. Par compacité de X, il existe $\gamma_1, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$ tels que $X = \cup_{i=1}^k f^{-1}(U_{\gamma_i})$. Alors $f(X) \subset \cup_{i=1}^k U_{\gamma_i}$. Donc $f(X)$ est compacte.

■

Le théorème précédent peut aussi se démontrer en utilisant la caractérisation de Bolzano-Weierstrass, tout comme le théorème suivant :

Théorème 23 *Une fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$, avec X compact, est bornée et atteint ses bornes.*

Théorème 24 (Théorème de Heine) *Soit $f : (X, d) \to (Y, \delta)$ une application continue entre deux espaces métriques. Si (X, d) est compact, alors f est uniformément continue.*

Preuve:
Procédons par l'absurde : il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\eta > 0$, il existe $x, y \in X$ tel que $d(x, y) \leq \eta$ et $\delta(f(x), f(y)) \geq \varepsilon$. En appliquant cette propriété à $\eta = \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$, on obtient deux suites $(x_n)_{n\geq 1}$ et $(y_n)_{n\geq 1}$ telles que pour tout $n \geq 1$:

$$d(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \qquad , \qquad \delta(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon. \tag{4.1}$$

Comme X est compact, il existe une extraction $((x_{n_i}))_{i\geq 1}$ convergeant vers une valeur d'adhérence x. Alors par la première condition dans (4.1), $((y_{n_i}))_{i\geq 1}$ converge aussi vers x. En utilisant la deuxième propriété dans (4.1) et la continuité de f, on obtient

$$\varepsilon \leq \lim_{i\to+\infty} \delta(f(x_{n_i}), f(y_{n_i})) = \delta(f(x), f(x)) = 0,$$

qui est la contradiction désirée. ■

4.3 Compacité et complétude

Soit (X, d) un espace métrique.

Théorème 25 *Si X est compact, alors il est complet.*

Preuve:
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de Cauchy. Comme X est compact, il existe une valeur d'adhérence $x \in X$. On en déduit que $(x_n)_{n\geq 0}$ converge vers x. ■

Définition 20 *On dit que (X, d) est* précompact *si pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par une réunion finie de boules ouvertes de rayon ε.*

Si X est compact, alors il est précompact : en effet, il suffit d'extraire un sous-recouvrement fini du recouvrement $\{B(x, \varepsilon)\}_{x\in X}$.

Théorème 26 *L'espace X est complet et précompact si et seulement si il est compact.*

Preuve:
On a déjà démontré qu'un espace compact est complet et précompact. Il reste à montrer le sens direct. On utilise pour cela le critère de Bolzano-Weierstrass. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de X.

Etape 1 Par précompacité, X peut être recouvert par une union finie de boules de rayon 1. L'une d'elle (au moins), qu'on note B_0, contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$. On recouvre ensuite X (et donc B_0) par une union finie de boules de rayon 2^{-1}. L'une des boules qui intersecte B_0 contient une infinité des termes de $(x_n)_{n\geq 0}$. On la note B_1. On construit ainsi par récurrence une suite de boules $(B_j)_{j\geq 0}$ dans X telle que pour tout $j \geq 0$, B_j est une boule de rayon 2^{-j} qui contient une infinité de termes de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$, et de plus $B_j \cap B_{j+1} \neq \emptyset$.

Etape 2 On construit ensuite par récurrence une suite extraite $(x_{n_i})_{i\geq 0}$ telle que $x_{n_i} \in B_i$ pour tout $i \geq 0$. Pour l'initialisation, on choisit $x_{n_0} \in B_0$. Pour l'hérédité, supposons construits $x_{n_0}, \ldots, x_{n_i}$ pour un certain $i \geq 0$. Comme B_{i+1} contient une infinité de termes de la suite, il existe $n_{i+1} > n_i$ tel que $x_{n_{i+1}} \in B_{i+1}$. En conclusion, $(x_{n_i})_{i\geq 0}$ est bien une suite extraite vérifiant la condition demandée.

Etape 3 Vérifions que la suite $(x_{n_i})_{i\geq 0}$ est de Cauchy. Pour tout $i \geq 0$, $x_{n_i} \in B_i$, $x_{n_{i+1}} \in B_{i+1}$ et $B_i \cap B_{i+1} \neq \emptyset$ donc $d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}})$ est $\leq$ à la somme du diamètre de B_i et du diamètre de B_{i+1}. Donc $d(x_{n_i}, x_{n_{i+1}}) \leq 2^{-i+1} + 2^{-i} = 3.2^{-i}$. Comme la série $\sum_i 3.2^{-i}$ converge, la suite $(x_{n_i})_{i\geq 0}$ est de Cauchy. Par complétude de X, on conclut que $(x_{n_i})_{i\geq 0}$ converge.

Conclusion : X est compact.

■

Le théorème précédent permet notamment de démontrer un résultat de compacité dans les espaces L^p (voir le théorème de Kolmogoroff dans la section *Pour aller plus loin*).

4.4 Procédé diagonal et théorème d'Ascoli

On introduit maintenant l'une des plus belles idées de ce chapitre. Etant donné un nombre *fini* de suites d'éléments de $[0, 1]$, il est banal de trouver une extraction commune à toutes ces suites pour les faire converger. C'est nettement moins évident lorsqu'on a un nombre *dénombrable* de suites. Le procédé diagonal est là pour ça.

Lemme 1 *[Procédé diagonal] Pour tout $i \geq 0$, on se donne une suite $(u^i_n)_{n\geq 0}$ dans l'espace métrique compact X. Alors il existe une fonction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante (on note aussi $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$) telle que pour tout $i \geq 0$, la suite $(u^i_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge dans X.*

Preuve:

Rappelons avant de commencer que si $\psi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$, alors $\psi(n) \geq n$ pour tout $n \geq 0$.

Comme $(u^0_n)_{n\geq 0}$ est une suite du compact X, il existe $\varphi_0 : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $(u^0_{\varphi_0(n)})_{n\geq 0}$ converge. Supposons construites $\varphi_0, \dots, \varphi_k : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}, k \geq 0$, telles que $(u^i_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(n)})_{n\geq 0}$ converge pour tout $0 \leq i \leq k$. Alors on définit $\varphi_{k+1} : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $(u^{k+1}_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_{k+1}(n)})_{n\geq 0}$ converge (ce qui est possible puisque $(u^{k+1}_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k(n)})_{n\geq 0}$ est une suite du compact X). On a ainsi construit par récurrence pour tout $i \geq 0$, une fonction $\varphi_i : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que $(u^i_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(n)})_{n\geq 0}$ converge.

On pose pour tout $n \geq 0$,

$$\varphi(n) := \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n).$$

D'abord, $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante. En effet, soit $n \geq 0$. Alors $\varphi_{n+1}(n + 1) > \varphi_{n+1}(n) \geq n$ d'où

$$\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n) < \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(\varphi_{n+1}(n + 1)),$$

c'est-à-dire $\varphi(n) < \varphi(n + 1)$.

Ensuite, pour tout $i \geq 0$, $(u^i_{\varphi(n)})_{n\geq i}$ est une suite extraite de $(u^i_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(n)})_{n\geq 0}$. En effet, soit $i \geq 0$ fixé. Pour tout $n \geq i$,

$$\varphi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(\varphi_{i+1 \circ \cdots \circ} \varphi_n(n)) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(m_n)$$

en posant $m_n := \varphi_{i+1 \circ \cdots \circ} \varphi_n(n)$. La suite $(m_n)_{n\geq i}$ est strictement croissante et

$$(u^i_{\varphi(n)})_{n\geq i} = (u^i_{\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_i(m_n)})_{n\geq i}$$

est donc convergente comme suite extraite d'une suite convergente.

■

A la place de l'hypothèse X compact, on aurait pu exiger que pour tout $i \geq 0$, toute suite extraite de $(u^i_n)_{n\geq 0}$ admette une sous-suite convergente.

Le procédé diagonal intervient de façon cruciale dans la preuve du théorème d'Ascoli.

Théorème 27 (Ascoli) *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions d'un espace métrique (X,d) compact vers un espace métrique compact (Y,δ).*

On suppose que la suite $(f_n)_{n\geq 0}$ est équicontinue : pour tout $x \in X$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $y \in B(x,\eta)$, on a $\delta(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Alors il existe $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ et $f : X \to Y$ continue telle que $(f_{\varphi(n)})_{n\geq 0}$ converge uniformément vers f : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in X$, on a $\delta(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$.

Preuve:
Comme X est compact, il est séparable : soit $D := \{d_i\}_{i\geq 0}$ une famille dense dénombrable de X. On applique le procédé diagonal (lemme 1) à la famille de suites $(f_n(d_i))_{n\geq 0}$, $i \geq 0$. Il existe $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \geq 0$, la suite $(f_{\varphi(n)}(d_i))_{n\geq 0}$ converge vers un élément de Y noté $f(d_i)$.

Soit $x \in X$. On montre que la suite $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans Y. Soit $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $y \in B(x,\eta)$, pour tout $n \geq 0$, on a

$$\delta(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(y)) \leq \varepsilon. \tag{4.2}$$

Comme D est dense dans X, il existe $d_i \in D \cap B(x,\eta)$. Enfin, comme $(f_{\varphi(n)}(d_i))_{n\geq 0}$ converge, c'est une suite de Cauchy et donc il existe $n_0 \geq 0$ tel que pour tout $p, q \geq n_0$, on a $\delta(f_{\varphi(p)}(d_i), f_{\varphi(q)}(d_i)) \leq \varepsilon$. Alors pour tout $p, q \geq n_0$, on a

$$\delta(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(q)}(x)) \leq \delta(f_{\varphi(p)}(x), f_{\varphi(p)}(d_i)) + \delta(f_{\varphi(p)}(d_i), f_{\varphi(q)}(d_i)) + \delta(f_{\varphi(q)}(d_i), f_{\varphi(q)}(x)) \leq 3\varepsilon.$$

Ainsi, $(f_{\varphi(n)}(x))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans Y compact donc complet. Elle converge donc vers un élément de Y noté $f(x)$.

En passant à la limite $n \to +\infty$ dans (4.2), on obtient que f est continue et que $\{f_n\}_{n\geq 0} \cup \{f\}$ est équicontinue.

On montre enfin la convergence uniforme. Soit $\varepsilon > 0$. Par équicontinuité, pour tout $x \in X$, il existe $\eta_x > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, pour tout $y \in B(x,\eta)$, on a

$$\delta(f_{\varphi(n)}(y), f_{\varphi(n)}(x)) \leq \varepsilon, \qquad \delta(f(y), f(x)) \leq \varepsilon.$$

Comme $X \subset \cup_{x\in X} B(x, \eta_x)$, on peut extraire par compacité un sous-recouvrement fini :

$$X \subset \cup_{i=1}^{\ell} B(x_i, \eta_{x_i}).$$

Soit $n_0 \geq 0$ tel que $\delta(f_{\varphi(n)}(x_i), f(x_i)) < \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $i = i_1, \ldots, i_m$. Alors, pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in X$, il existe $i \in \{i_1, \ldots, i_m\}$ tel que $x \in B(x_i, \eta)$ et donc

$$\delta(f_{\varphi(n)}(x), f(x)) \leq \delta(f_{\varphi(n)}(x), f_{\varphi(n)}(x_i)) + \delta(f_{\varphi(n)}(x_i), f(x_i)) + \delta(f(x_i), f(x)) \leq 3\varepsilon.$$

■

La preuve montre qu'on peut remplacer l'hypothèse Y compact par l'hypothèse : pour tout $x \in X$, l'ensemble $\overline{\{f_n(x) : n \geq 0\}}$ est compact.

Le théorème d'Ascoli permet par exemple de montrer l'existence de solutions à des équations différentielles (théorème de Cauchy-Peano ou Cauchy-Lipschitz). Il intervient aussi dans la preuve du théorème de Montel (voir exercice 37).

4.5 Cas des espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans cette section, on présente un *enchaînement* possible de différentes conséquences de la compacité en dimension finie. Dans la leçon *Utilisation de la compacité*, cet enchaînement permet d'éviter ce qu'un rapport de jury nomme un "cercle vicieux".

Commençons par le résultat fondamental suivant :

Théorème 28 *L'intervalle* $[-1,1]$ *est compact dans* $\mathbb{R}$ *(muni de la norme usuelle).*

Preuve:
On démontre[1] le théorème en admettant la propriété de borne supérieure : toute partie non vide majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (et donc aussi toute partie non vide minorée admet une borne inférieure). Cette propriété implique qu'une suite $(y_k)_{k\geq 0}$ croissante et majorée converge vers $\sup\{y_k : k \geq 0\}$.

Soit $(x_k)_{k\geq 0}$ une suite dans $[-1,1]$. Pour tout $k \geq 0$, on note $y_k = \inf\{x_\ell, \ell \geq k\}$. Comme la suite $(y_k)_{k\geq 0}$ est croissante et majorée par 1, elle converge vers une limite ℓ. Alors ℓ est une valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\geq 0}$. ■

En fait, $\ell = \liminf_{k\to+\infty} x_k$.

Le théorème précédent se généralise à la dimension supérieure. Sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$, on considère la norme $N_\infty(x) := \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Lemme 2 *Dans* $(\mathbb{R}^n, N_\infty)$*, l'ensemble* $[-1,1]^n$ *est compact.*

Preuve:
Pour $1 \leq i \leq n$, on note $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la projection sur la i^{eme} coordonnée. Soit $(x_k)_{k\geq 0}$ une suite de $[-1,1]^n$. Alors pour $1 \leq i \leq n$, la suite $\pi_i(x_k)_{k\geq 0}$ est une suite dans le compact $[-1,1]$. On peut trouver une extraction commune $\varphi : \mathbb{N} \uparrow \mathbb{N}$ telle que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $(\pi_i(x_{\varphi(k)}))_{k\geq 0}$ converge vers $x_i \in [-1,1]$ (c'est un cas facile d'extraction diagonale, puisqu'il y a ici un nombre fini de suites). On en déduit en posant $x := (x_1, \ldots, x_n)$ que

$$N_\infty(x_{\varphi(k)} - x) = \max_{1\leq i\leq n} |\pi_i(x_{\varphi(k)}) - x_i| \longrightarrow 0,$$

ce qui montre le lemme.

■

Dans l'énoncé suivant, $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme N_∞.

Théorème 29 *Soit E un* evn *de dimension n, et $f : \mathbb{R}^n \to E$ un isomorphisme. Alors f est continu et l'inverse de f est continu.*

Preuve:
On introduit la base $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ de E telle que $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. L'isomorphisme f est continu car pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\|f(x)\|_E = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| \, \|e_i\|_E \leq M \, \|x\|_\infty ,$$

en notant $M := \sum_{i=1}^n \|e_i\|_E$.

On montre maintenant que f^{-1} est continu. Pour cela, il suffit de montrer qu'il existe $m > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$,

$$\|f(x)\|_E \geq m \, \|x\|_\infty . \tag{4.3}$$

En effet, cela impliquera que $\left\|f^{-1}(y)\right\|_\infty \leq \frac{1}{m} \|y\|_E$ pour tout $y \in E$ (en posant $y = f(x)$), et donc la continuité de f^{-1}.

Pour montrer (4.3), on introduit la fonction $\theta : x \mapsto \|f(x)\|_E$, qui est continue comme composée de fonctions continues. Notons $S := \partial[-1,1]^n$. C'est un fermé dans un compact, donc compact. Donc θ atteint son minimum sur S : il existe $x_0 \in S$ tel que $\theta(x_0) \leq \theta(x)$, pour tout $x \in S$.

1. En fait, selon la construction de $\mathbb{R}$, le théorème à démontrer peut être une conséquence directe de la définition de $\mathbb{R}$.

On note $m := \theta(x_0)$. Comme $x_0 \in S$, on a $x_0 \neq 0$ et donc par injectivité de f, $f(x_0) \neq 0$. Par séparation de la norme, $\theta(x_0) \neq 0$ et finalement $m > 0$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a $y := x/\|x\|_\infty \in S$, donc

$$\|f(x)\|_E = \|\|x\|_\infty f(y)\|_E = \|x\|_\infty \|f(y)\|_E = \|x\|_\infty \theta(y) \geq m \|x\|_\infty ,$$

ce qui conclut la preuve de (4.3).

■

Une conséquence importante du théorème précédent est le résultat fondamental suivant :

Théorème 30 *Sur un* evn *de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Preuve:
Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$, et N, N' deux normes sur E. Introduisons un isomorphisme $f : \mathbb{R}^n \to E$. Alors par le théorème précédent, f est continu et d'inverse continu, que E soit muni de la norme N ou de la norme N'. On en déduit que $Id = f \circ f^{-1}$ est continu et d'inverse continu de l'evn (E, N) vers l'evn (E, N'). Ainsi, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$,

$$N'(Id(x)) \leq CN(x), \qquad N(Id^{-1}(x)) \leq CN'(x),$$

autrement dit : $\frac{1}{C}N'(x) \leq N(x) \leq CN'(x)$, d'où l'équivalence de N et N' sur E.

■

Le théorème précédent montre que n'importe quelle norme sur un *evn* E de dimension finie induit le même ensemble d'ouverts (i.e. la même topologie). On peut donc parler de l'*evn* E sans préciser la norme considérée, si on s'intéresse à une propriété topologique (i.e. qui ne dépend que des ouverts). C'est notamment le cas pour $E = \mathbb{R}^n$, ce qui implique en particulier que le Théorème 29 est vrai *a posteriori* quelle que soit la norme considérée sur $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 2 *Soit* $f : E_1 \to E_2$ *une application linéaire entre deux* evn $(E_1, N_1), (E_2, N_2)$. *On suppose* E_1 *de dimension finie. Alors* f *est continue.*

Preuve:
On peut supposer que $E_1 = \mathbb{R}^n$, où n est la dimension de E_1. En effet, si h est un isomorphisme d'*evn* entre $\mathbb{R}^n$ et E_1, alors f est continu si et seulement si $f \circ h$ est continu. Alors pour tout $x = (x_1, \dots, x_n)$, on a $f(x) = x_1 f(e_1) + \cdots x_n f(e_n)$, en notant e_i le $i^{ème}$ vecteur de la base canonique. Or l'application $t \in \mathbb{R} \mapsto tf(e_i)$ est lipschitzienne, de constante $N_2(f(e_i))$. On en déduit que f est continue comme somme de fonctions continues.

■

Définition 21 *On dit qu'une partie* $A \subset E$ *est bornée si elle est contenue dans une boule.*

Tout compact est borné (même si E est de dimension infinie d'ailleurs).

Théorème 31 *Les compacts d'un* evn *de dimension finie sont les fermés bornés.*

Preuve:
On a déjà vu que les compacts sont toujours fermés et bornés (la dimension finie n'intervient pas ici). Réciproquement, soient E un *evn* de dimension finie et K un fermé borné de E. Montrons que K est compact. On peut supposer que $E = \mathbb{R}^n$ (un homéomorphisme linéaire envoie les compacts sur les compacts, les fermés sur les fermés, et les bornés sur les bornés).

On peut trouver $R > 0$ tel que $[-R, R]^n \supset K$ car K est borné. Comme K est fermé dans le compact $[-R, R]^n$, on en déduit que K est compact.

■

Remarque 7 *Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie dans un* evn *E, alors F est fermé.*

Preuve:
Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de F qui converge dans E vers $y \in E$. Montrons que $y \in F$. Comme la suite est convergente, elle est bornée dans E, donc dans F. Elle est donc contenue dans une boule fermée (pour la topologie induite) de F, qui est compacte (pour la topologie induite) par le théorème précédent. Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite convergeant dans F (et donc dans E) vers un vecteur $z \in F$. Par unicité de la limite, $y = z$ et donc $y \in F$. Conclusion : F est fermé. ■

Théorème 32 (Théorème de Riesz) *Soit E un* evn. *Alors la boule unité fermée $\overline{B}(0,1)$ est compacte si et seulement si X est de dimension finie.*

Preuve:
Si X est de dimension finie, alors par le théorème précédent, $\overline{B}(0,1)$ est compacte. Réciproquement, supposons que $\overline{B}(0,1)$ est compacte, et montrons que X est de dimension finie. Il existe $x_1, \dots, x_k \in \overline{B}(0,1)$ tels que

$$\overline{B}(0,1) \subset \cup_{i=1}^k \overline{B}(x_i, \frac{1}{2}).$$

Observons que

$$\cup_{i=1}^k \overline{B}(x_i, \frac{1}{2}) \subset \{x_i, i = 1, \dots, k\} + \overline{B}(0, \frac{1}{2}) \subset \text{ vect } (x_1, \dots, x_k) + \overline{B}(0, \frac{1}{2}).$$

On va montrer que $X = F$ où $F :=$ vect $(x_1, \dots, x_k)$. Comme $\overline{B}(0,1) \subset F + \overline{B}(0, \frac{1}{2})$, on a aussi

$$\overline{B}(0, \frac{1}{2}) \subset \frac{1}{2}F + \frac{1}{2}\overline{B}(0, \frac{1}{2}) = F + \overline{B}(0, \frac{1}{4}).$$

On en déduit

$$\overline{B}(0,1) \subset F + \overline{B}(0, \frac{1}{4})$$

puis par une récurrence immédiate

$$\overline{B}(0,1) \subset \cap_{i\geq 0}(F + \overline{B}(0, \frac{1}{2^i})).$$

Comme F est de dimension finie, il est fermé. Montrons que $\cap_{i\geq 0}(F + \overline{B}(0, \frac{1}{2^i})) = F$. L'inclusion $\supset$ est vraie. Pour montrer $\subset$, soit $x \in \cap_{i\geq 0}(F + \overline{B}(0, \frac{1}{2^i}))$. Alors, pour tout $i \geq 0$, il existe $y_i \in F$ et $z_i \in \overline{B}(0, \frac{1}{2^i})$ tels que $x = y_i + z_i$. Comme $z_i \to 0$, on a $y_i \to x$. Ainsi $x \in \overline{F} = F$.

Donc $\overline{B}(0,1) \subset F$. Mais alors

$$X = \cup_{t>0}\overline{B}(0,t) \subset \cup_{t>0} tF = F.$$

■

Exercice 28
1. *Soit E un espace vectoriel normé et soit $M \subset E$ un sous-espace fermé tel que $M \neq E$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $u \in E$ tel que $||u|| = 1$ et dist $(u, M) \geq 1 - \varepsilon$.*
2. *Soit E un e.v.n de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de sous-espaces de dimension finie tels que $E_{n-1} \subsetneq E_n$.*
3. *Déduire des deux questions précédentes une autre preuve du théorème de Riesz.*

4.6 Questions et exercices

Questions 4 1. *Un espace métrique (X,d) est compact si et seulement si de toute intersection vide de fermés de X, on peut extraire une intersection vide finie.*

2. *Justifier qu'un* evn *de dimension finie est complet.*
3. *L'espace $C^0([0,1])$ des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme, est-il complet ? Compact ?*
4. *Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Montrer que l'ensemble des polynômes en A est fermé. En déduire que* $\exp(A)$ *est un polynôme en A.*
5. *Dans un compact, justifier que toute suite qui a une unique valeur d'adhérence est nécessairement convergente.*
6. *Dans un espace métrique, si une suite $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ converge vers une limite x, justifier que le sous-ensemble $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.*
7. *Justifier qu'une fonction continue à support compact dans $\mathbb{R}^n$ est uniformément continue. Même question avec les fonctions continues et 2π périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.*
8. *Soit U une partie d'un espace métrique (X,d). Si K est un compact de X, est-il vrai que $K \cap U$ est un compact de U pour la topologie induite ?*

Exercice 29 *Soient X, Y deux espaces métriques et $f : X \to Y$ une fonction continue et bijective. On suppose que X est compact. Montrer que f^{-1} est continue.* Indication : on pourra remarquer que f envoie les fermés de X sur des fermés de Y.

Exercice 30 *On se donne n espaces métriques $(X_1,d_1),\dots,(X_n,d_n)$. Si chaque (X_i,d_i) est compact, alors l'espace produit $X_1 \times \dots, \times X_n$ est compact pour la topologie produit.*

Exercice 31 *Si K_1, K_2 sont deux compacts d'un espace métrique (X,d), montrer qu'il existe $x_1 \in K_1$, $x_2 \in K_2$ tels que* $\inf\{d(x,y) : x \in K_1, y \in K_2\} = d(x_1,x_2)$.

Exercice 32 *Soit (X,d) un espace métrique compact. Soit $f : X \to X$ une fonction telle que pour tout $x, y \in X$,*

$$x \neq y \Longrightarrow d(f(x), f(y)) < d(x,y).$$

Montrer que f a un unique point fixe (on pourra chercher à minimiser la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$).

Exercice 33 *(Théorèmes de Dini)*

1. *Soient (X,d) un espace métrique compact et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions continues de X vers $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in X$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0.*
2. *Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions continues et décroissantes de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $x \in X$, on a $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. Montrer que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément vers 0.*

Exercice 34 *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans $C^1_b(U)$ (l'ensemble des fonctions C^1 sur U, bornées sur U et à différentielles bornées sur U).*

1. *Montrer que chaque f_n peut se prolonger en une fonction continue sur le compact $\overline{U}$.*
2. *Montrer que la famille $(f_n)_{n\geq 0}$ est équicontinue.*
3. *En déduire qu'on peut en extraire une sous-suite convergeant uniformément sur U.*

Exercice 35 *(*) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{S}^1$ une fonction continue.*

1. *On suppose que f n'est pas surjective. Montrer qu'il existe une fonction continue $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ telle que $f(x) = e^{i\varphi(x)}$, pour tout $x \in [0,1]$.*
2. *On suppose f surjective. Montrer qu'on peut découper $[0,1]$ en un nombre fini d'intervalles sur lesquels f n'est pas surjective. En déduire que la conclusion de la question précédente reste vraie dans ce cas.*

Exercice 36 Décomposition polaire

1. *Montrer que le groupe orthogonal $O(n) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) : AA^t\}$ est compact.*
2. *Montrer que l'application $O(n) \times S_n^{++}(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R})$, $(Q,S) \mapsto QS$ est un homéomorphisme.*

Exercice 37 *(*) Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On note $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.*

1. *Montrer qu'il existe une suite de compacts $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ contenus dans Ω tels que $K_j \subset \mathrm{int}\, K_{j+1}$ et $\cup_j K_j = \Omega$.*
2. *A une telle suite de compacts, on associe la famille $p_j : f \in H(\Omega) \mapsto \max_{x\in K_j} |f(x)| \in \mathbb{R}^+$. Montrer que p_j est positivement homogène et vérifie l'inégalité triangulaire.*
3. *Pour tout $f, g \in H(\Omega)$, on pose*
$$d(f,g) := \sum_{j\geq 0} \frac{1}{2^j} \frac{p_j(f-g)}{1+p_j(f-g)}.$$
Montrer que d est une distance sur $H(\Omega)$.
4. *Montrer qu'une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset H(\Omega)$ converge vers $f \in H(\Omega)$ pour cette distance si et seulement si $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformément sur tout compact vers f. En déduire que deux familles de compacts $(K_j)_{j\in\mathbb{N}}$ et $(K'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ comme ci-dessus définissent deux distances qui induisent la même famille d'ouverts.*
5. *Montrer que $(H(\Omega), d)$ est complet.*
6. *On dit qu'une partie $A \subset H(\Omega)$ est bornée si pour tout compact $K \subset \Omega$, il existe $C_K > 0$ tel que pour tout $f \in A$, on a $\max_{x\in K} |f(x)| \leq C_K$. Montrer qu'il est équivalent de dire que pour tout $j \in \mathbb{N}$, il existe $M_j \geq 0$ tel que pour tout $f \in A$, on a $p_j(f) \leq M_j$.*
7. *On se donne une suite $(f_n)_{n\geq 0} \subset H(\Omega)$, bornée au sens précédent. Montrer que pour tout compact $K \subset \Omega$, $(f_{n|K})_{n\geq 0}$ est équilipschitzienne (on pourra se ramener au cas où K est une boule). En déduire qu'on peut extraire de $(f_n)_{n\geq 0}$ une sous-suite unifomément convergente sur tout compact de Ω.*
8. *Soit $A \subset H(\Omega)$ une partie bornée et fermée. Montrer qu'elle est compacte.*
9. *On veut montrer que $(H(\Omega), d)$ n'est pas normable, i.e. qu'il n'existe pas de norme sur $H(\Omega)$ qui définisse la même famille d'ouverts que d. On procède par l'absurde. Montrer qu'alors la boule unité fermée pour cette norme est bornée au sens précédent. Conclure.*

4.7 Pour aller plus loin

Le théorème d'Ascoli a de très nombreuses applications. Il permet de montrer la compacité de certains opérateurs. La notion d'*opérateurs compacts* n'est pas au programme de l'agrégation, mais peut figurer dans un plan de leçon, et apparaît régulièrement dans les écrits :

Définition 22 *Soient E, F deux* evn *et $T : E \to F$ une application linéaire. On dit que T est compacte si pour tout ensemble borné B dans E, son image $T(B)$ est d'adhérence compacte dans F.*

Le théorème d'Ascoli permet également d'établir le théorème de Kolmogoroff dans l'espace L^1 (qui donne des exemples de parties compactes en dimension infinie) :

Théorème 33 *Soit A une partie bornée de $L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que*

1. *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $R > 0$ tel que*
$$\forall f \in A, \qquad \int_{|x|\geq R} |f(x)|\, dx \leq \varepsilon,$$
2. *en notant $\omega(h) = \sup_{f\in A} \|f(\cdot + h) - f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$,*
$$\lim_{h\to 0} \omega(h) = 0.$$

Alors $\overline{A}$ est compacte dans $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Comme on sait que $L^1(\mathbb{R}^n)$ est complet, le fermé $\overline{A}$ l'est également. Il reste alors à montrer que $\overline{A}$ est précompact pour en déduire qu'il est compact. C'est à ce niveau que le théorème d'Ascoli joue un rôle crucial.

Parmi d'autres applications du théorème d'Ascoli, citons le théorème de Rellich dans les espaces de Sobolev, le théorème de Cauchy-Peano, etc...

On termine cette section par la *compacité faible* de la boule unité dans ℓ^p (qui est un excellent exercice de synthèse...) :

Théorème 34 *Soit $1 < p < \infty$. Pour tout $x, y \in \ell^p(\mathbb{N})$, on note*
$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} \min(1, |x_n - y_n|).$$

Alors

1. *La fonction d est une distance sur $\ell^p(\mathbb{N})$.*
2. *La boule unité fermée $\overline{B}_{\|\cdot\|_{\ell^p}}(0,1)$ pour la norme usuelle est une partie compacte*[2] *de $(\ell^p(\mathbb{N}), d)$.*
3. *Une suite $(x^k)_{k\geq 0}$ d'éléments de $\overline{B}_{\|\cdot\|_{\ell^p}}(0,1)$ converge vers x pour la distance d si et seulement si elle converge au sens suivant :*
$$\forall y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^q(\mathbb{N}), \qquad \lim_{k\to+\infty} \langle x^k, y\rangle = \langle x, y\rangle,$$
où on a noté $q = p/(p-1)$ et pour tout $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell^p(\mathbb{N})$ et tout $y = (y_n)_{n\geq 0} \in \ell^q(\mathbb{N})$, $\langle x, y\rangle = \sum_{n\geq 0} x_n y_n$.

2. Bien sûr, pour la topologie définie par la norme usuelle, la boule unité fermée n'est pas compacte, car sinon $\ell^p(\mathbb{N})$ serait de dimension finie d'après le théorème de Riesz.

Chapitre 5

Espaces de Hilbert

Dans tout ce chapitre, on note H un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

5.1 Produit scalaire

Définition 23 (Produit scalaire réel, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) *Un* produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *sur H est une application $H \times H \to \mathbb{R}$ bilinéaire, symétrique et définie positive.*

La dernière propriété signifie que pour tout $x \in H$, on a $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Le couple $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est appelé un *espace préhilbertien réel*.

Définition 24 (Produit scalaire complexe, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) *Un* produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *sur H est une application $H \times H \to \mathbb{C}$ sesquilinéaire* [1]*, hermitienne* [2] *et définie positive.*

On parle alors d'*espace préhilbertien complexe*.

Exemple 24 *Sur $\mathbb{C}^n$, $\langle x, y \rangle = \sum_i \overline{x_i} y_i$ est un produit scalaire complexe. Plus généralement, pour tout $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in M_n(\mathbb{C})$ hermitienne définie positive, alors $\langle x, y \rangle_A := \langle Ax, y \rangle = \sum_{ij} \overline{a_{ij} x_j} y_i$ est un produit scalaire complexe.*

Exemple 25 *Si (X, μ) est un espace mesuré, on définit sur $L^2(\mu)$ le produit scalaire*

$$\langle f, g \rangle = \int_X \overline{f(x)} g(x) \, d\mu(x).$$

En particulier, si $X = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage, on obtient l'espace préhilbertien $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$, muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{u_n} v_n$.

Dans toute la suite, on formulera les calculs et les preuves dans le cas complexe (le lecteur est invité à les élaguer pour traiter le cas réel).

Pour tout $x \in H$, notons

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

1. Pour tout $x, y, z \in H$, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$,

$$\langle x + \lambda y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \overline{\lambda} \langle y, z \rangle, \qquad \langle x, \lambda y + z \rangle = \lambda \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle.$$

2. Pour tout $x, y \in H$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.

Pour tous $x, y \in H$, la sesquilinéarité implique

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle.$$

Par le caractère hermitien,

$$\langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle.$$

Ainsi,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle x, y\rangle. \tag{5.1}$$

En particulier, lorsque x et y sont orthogonaux, ce qui signifie que $\langle x, y\rangle = 0$, on obtient le *théorème de Pythagore* :

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Théorème 35 (Inégalité de Cauchy-Schwarz) *Pour tous $x, y \in H$,*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\ \|y\|,$$

avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.

Preuve:
Les cas où $x = 0$ ou $y = 0$ sont vrais. On suppose désormais $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $|\langle x, y\rangle| = e^{i\theta}\langle x, y\rangle$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\left\|x + te^{i\theta}y\right\|^2 = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}(e^{i\theta}\langle x, y\rangle) = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t\,|\langle x, y\rangle|.$$

Le membre de gauche est toujours positif, donc le membre de droite aussi ! Comme il s'agit d'un polynôme de degré 2, son discriminant est ≤ 0, c'est-à-dire

$$4\,|\langle x, y\rangle|^2 - 4\,\|x\|^2\,\|y\|^2 \leq 0,$$

ce qui donne bien l'inégalité attendue. Dans le cas d'égalité, le polynôme de degré 2 a une racine double t_*, donc $\left\|x + t_* e^{i\theta}y\right\|^2 = 0$, ce qui implique que $x = -t_* e^{i\theta} y$.
■

Corollaire 3 *La fonction $\|\cdot\|$ est une norme sur H.*

Preuve:
Comme le produit scalaire est défini positif, la fonction $\|\cdot\|$ vérifie la séparation. L'homogénéité est une conséquence de la sesquilinéarité. Vérifions l'inégalité triangulaire : pour tous $x, y \in H$,

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,\|x\|\ \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

L'inégalité triangulaire en découle en passant à la racine carrée.
■

Un espace préhilbertien est donc automatiquement un *evn*. L'inégalité de Cauchy-Schwarz montre que le produit scalaire est une application bilinéaire (ou sesquilinéaire) *continue*, relativement à cette norme.

Remarque 8 *Pour tout $y \in H$, la fonction*

$$\Phi_y \colon H \to \mathbb{K}, \quad x \mapsto \langle y, x \rangle,$$

est une forme linéaire continue de norme subordonnée $|||\Phi_y||| = \|y\|$.

Définition 25 *On dit que deux vecteurs $x, y \in H$ sont* orthogonaux *si $\langle x, y \rangle = 0$. Pour $A \subset H$ un ensemble quelconque, l'*orthogonal *de A est l'ensemble*

$$A^\perp = \{y \in H \colon \forall x \in A,\ \langle y, x \rangle = 0\}.$$

En utilisant la continuité du produit scalaire, on déduit par critère séquentiel que si A est une partie de H, alors $A^\perp$ est fermé, et aussi que

$$A^\perp = (\overline{A})^\perp.$$

Définition 26 *Un* espace de Hilbert *est un espace préhilbertien complet (pour sa norme hilbertienne).*

Exemple 26

1. *Sur un espace euclidien (i.e. préhilbertien de dimension finie), le produit scalaire induit une norme qui rend l'espace complet (car tout* evn *de dimension finie est complet).*
2. *On a déjà vu que si (X, μ) est un espace mesuré, alors $L^2(X, \mu)$ est un espace vectoriel normé complet lorsqu'il est muni de la norme*

$$\|f\|_{L^2} := \left(\int_X |f(x)|^2 \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cette norme coïncide avec celle qui est issue du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \int_X \overline{f(x)} g(x) \, d\mu(x).$$

Ainsi, $L^2(X, \mu)$ est un espace de Hilbert. En particulier, lorsque $X = \mathbb{N}$ et μ est la mesure de comptage, $\ell^2(\mathbb{N})$ est un espace de Hilbert.

5.2 Projection sur un convexe fermé

Dans ce qui suit, l'espace H est un Hilbert.

Théorème 36 *Soit $C \subset H$ un sous-ensemble convexe, fermé et non vide. Alors pour tout $x \in H$, il existe un unique $y \in C$ tel que $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.*

Le point y est alors appelé le projeté de x sur C, et noté $y = P_C(x)$.

Preuve:

La preuve est fondée sur l'identité de parallélogramme :

$$\forall u, v \in H, \qquad \|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2,$$

qui s'obtient en développant le membre de gauche grâce à (5.1).

Etape 1 : existence de la projection. Soit $x \in H$. On rappelle que

$$\operatorname{dist}(x, C) = \inf_{y \in C} \|y - x\|.$$

Il existe $(y_n)_{n\geq 0} \subset C$ telle que $\lim_{n\to+\infty} \|y_n - x\| = \operatorname{dist}(x, C)$. Par l'identité du parallélogramme appliquée à $u = x - y_n$ et $v = x - y_m$ pour $n, m \in \mathbb{N}$, il vient

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 .$$

Par convexité de C, on a $(y_n + y_m)/2 \in C$. Donc

$$\|2x - y_n - y_m\|^2 = 4\|x - (y_n + y_m)/2\|^2 \geq 4 \operatorname{dist}(x, C)^2.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &\leq 2\|x - y_n\|^2 + 2\|x - y_m\|^2 - 4\operatorname{dist}(x, C)^2 \\ &= 2(\|x - y_n\|^2 - \operatorname{dist}(x, C)^2) + 2(\|x - y_m\|^2 - \operatorname{dist}(x, C)^2). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Comme $\lim_{n\to+\infty} \|x - y_n\|^2 = \operatorname{dist}(x, C)^2$ et $\lim_{m\to+\infty} \|x - y_m\|^2 = \operatorname{dist}(x, C)^2$, on en déduit que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans C. Or C est une partie fermée de H qui est complet. Donc C est complet. On conclut que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un vecteur $y \in C$. Alors, par continuité de la norme, $\|x - y\| = \operatorname{dist}(x, C)$.

Etape 2 : unicité de la projection. Si y et y' sont deux projetés de x sur C, alors par l'identité du parallélogramme appliquée à $u = x - y$ et $v = x - y'$, on obtient comme pour (5.2) :

$$\|y - y'\|^2 \leq 2(\|x - y\|^2 - \operatorname{dist}(x, C)^2) + 2(\|x - y'\|^2 - \operatorname{dist}(x, C)^2) = 0.$$

Donc $y = y'$.

■

Proposition 24 *Soient $x \in H$ et $y \in C$. Alors*

$$y = P_C(x) \iff \mathit{Re}\langle x - y, z - y\rangle \leq 0, \qquad \forall z \in C.$$

De plus, la fonction P_C est lipschitzienne de constante 1.

Preuve:
Soient $x \in H$ et $y \in C$. Alors pour tous $z \in C$ et $t \in [0, 1]$,

$$\|x - [(1-t)y + tz]\|^2 = \|x - y - t(z - y)\|^2 = \|x - y\|^2 - 2t \text{ Re}\langle x - y, z - y\rangle + t^2\|z - y\|^2 . \tag{5.3}$$

Si $y = P_C(x)$, alors $(1 - t)y + tz \in C$ par convexité de C et donc $\|x - [(1 - t)y + tz]\|^2 \geq \|x - y\|^2$. On en déduit que

$$-2t \text{ Re}\langle x - y, z - y\rangle + t^2\|z - y\|^2 \geq 0.$$

En divisant par $t \in]0, 1[$ puis en faisant tendre t vers 0, il vient Re $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$.
Réciproquement, si Re $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$, en prenant $t = 1$ dans (5.3), il vient

$$\|x - z\|^2 = \|x - y\|^2 - 2 \text{ Re}\langle x - y, z - y\rangle + \|z - y\|^2 \geq \|x - y\|^2 .$$

Donc en prenant l'infimum sur $z \in C$, on obtient $\|x - y\| \leq \operatorname{dist}(x, C)$. Comme $y \in C$, on en déduit que $y = P_C(x)$.

Montrons enfin que P_C est lipschitzienne de constante 1. Soient $x_1, x_2 \in H$ et $y_1, y_2 \in C$ leurs projections respectives, Alors par la première partie de la proposition, Re $\langle x_1 - y_1, y_2 - y_1\rangle \leq 0$ et Re $\langle x_2 - y_2, y_1 - y_2\rangle \leq 0$. Donc

$$\begin{aligned} \|y_1 - y_2\|^2 &= \langle y_1 - y_2, y_1 - y_2\rangle = \text{ Re}\langle y_1 - y_2, y_1 - y_2\rangle \\ &= \text{ Re}\langle y_1 - x_1 + x_1 - x_2 + x_2 - y_2, y_1 - y_2\rangle \\ &\leq \text{ Re}\langle x_1 - x_2, y_1 - y_2\rangle \leq \|x_1 - x_2\| \, \|y_1 - y_2\| . \end{aligned}$$

En distinguant les cas $\|y_1 - y_2\| = 0$ ou > 0, on obtient bien $\|y_1 - y_2\| \leq \|x_1 - x_2\|$.
■

C'est souvent dans le cas où C est un sous-espace vectoriel fermé de H qu'on utilise le théorème de projection.

Théorème 37 *Soit $F \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé. Soient $x \in H$, $y \in F$. Alors*

$$y = P_F(x) \Longleftrightarrow \langle x - y, z\rangle = 0, \qquad \forall z \in F. \tag{5.4}$$

De plus, P_F est linéaire.

Preuve:
Soient $x \in H$, $y \in F$. D'après la proposition précédente, $y = P_F(x)$ si et seulement si Re $\langle x - y, z - y\rangle \leq 0$ pour tout $z \in F$. En appliquant cette inégalité à $z + y$ au lieu de z (noter que $z + y$ est encore dans F), on voit que cette condition implique que Re $\langle x - y, z\rangle \leq 0$ pour tout $z \in F$. On remplace maintenant z par $-z$ puis par iz (qui sont toujours dans F), pour obtenir

$$\forall z \in F, \qquad \langle x - y, z\rangle = 0.$$

Réciproquement, si l'égalité précédente est vraie, alors en remplaçant z par $z - y$, on obtient Re $\langle x - y, z - y\rangle = 0$ (et donc aussi ≤ 0 !). La première partie de l'énoncé est démontrée.

Montrons la linéarité de P_F. Soient $x_1, x_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $y = P_F(x_1) + \lambda P_F(x_2) \in F$. Par l'implication $\Longrightarrow$ dans (5.4), pour tout $z \in F$, on a $\langle x_1 - P_F(x_1), z\rangle = 0$ et $\langle x_2 - P_F(x_2), z\rangle = 0$. Donc par linéarité,

$$\langle x_1 + \lambda x_2 - y, z\rangle = \langle x_1 - P_F(x_1), z\rangle + \overline{\lambda}\langle x_2 - P_F(x_2), z\rangle = 0.$$

Par l'implication $\Longleftarrow$ dans (5.4), $y = P_F(x_1 + \lambda x_2)$. La linéarité de P_F est démontrée. ■

Le seul vecteur de H qui soit orthogonal à lui-même est le vecteur nul (pourquoi ?). En particulier, si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, $F \cap F^\perp = \{0\}$. Comme tout vecteur $x \in H$ peut s'écrire $x = p_F(x) + (x - p_F(x))$ et que $x - p_F(x) \in F^\perp$ par le théorème précédent, on a donc

$$\boxed{H = F \oplus F^\perp.}$$

Remarque 9 *Réciproquement, si cette identité est vraie, alors F est fermé. En effet, supposons que $H = F \oplus F^\perp$, où F est un sous-espace vectoriel de H. Soit $y \in \overline{F}$. Alors il existe $y' \in F$ et $z \in F^\perp$ tels que $y = y' + z$. Donc $y - y' \in \overline{F} \cap F^\perp$. Comme $\overline{F}^\perp = F^\perp$, on a $y - y' \in \overline{F} \cap \overline{F}^\perp = \{0\}$, donc $y = y' \in F$. On a montré que $\overline{F} \subset F$, ce qui implique que F est fermé.*

Corollaire 4 *Soit F un sous-espace vectoriel de H. Alors*

$$\boxed{(F^\perp)^\perp = \overline{F}.}$$

En particulier, F est dense dans H si et seulement si $F^\perp = \{0\}$.

Preuve:
Tout élément de F est orthogonal à tous les éléments de $F^\perp$, donc $F \subset (F^\perp)^\perp$. De plus, $(F^\perp)^\perp$ est fermé (comme tout orthogonal d'une partie). Donc $\overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$.

Réciproquement, si $x \in (F^\perp)^\perp$, alors puisque $P_{\overline{F}}(x) \in \overline{F} \subset (F^\perp)^\perp$ on a $x - P_{\overline{F}}(x) \in (F^\perp)^\perp$. Or $x - P_{\overline{F}}(x) \in \overline{F}^\perp = F^\perp$. Donc $x - P_{\overline{F}}(x) \in (F^\perp)^\perp \cap F^\perp$. On conclut que $x = P_{\overline{F}}(x)$ et donc $x \in \overline{F}$.
■

5.3 Dualité

Dans toute cette section, H désigne un espace de Hilbert.

Le *dual* de H, noté H^*, est l'*evn* des formes linéaires continues sur H, muni de la norme duale :

$$\forall \varphi \in H^*, \qquad \|\varphi\|_* := \sup_{x \in H \setminus \{0\}} \frac{|\varphi(x)|}{\|x\|}.$$

Théorème 38 (Théorème de représentation de Riesz.) *Pour tout $\varphi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle y, x \rangle$ pour tout $x \in H$.*

Preuve:
L'unicité découle du fait que si deux vecteurs y_1, y_2 conviennent, alors pour tout $x \in H$, $\langle y_1, x \rangle = \langle y_2, x \rangle$ et donc $\langle y_1 - y_2, x \rangle = 0$. En appliquant cette identité à $x = y_1 - y_2$, il vient $\|y_1 - y_2\|^2 = 0$, et donc $y_1 = y_2$.

Pour l'existence, si φ est nulle on prend $y = 0$. On suppose désormais $\varphi \not\equiv 0$. Alors $F := \ker \varphi$ est un sous-espace vectoriel fermé (par continuité de φ), distinct de H (car $\varphi \not\equiv 0$). Il existe $z \in H \setminus F$. Notons

$$y_0 := z - p_F(z).$$

Noter que $y_0 \neq 0$ puisque $z \notin F$. Pour tout $x \in H$, on observe que $\varphi(y_0)x - \varphi(x)y_0 \in \ker \varphi = F$. Comme $y_0 \in F^\perp$, on en déduit que

$$0 = \langle y_0, \varphi(y_0)x - \varphi(x)y_0 \rangle = \varphi(y_0)\langle y_0, x \rangle - \varphi(x)\|y_0\|^2 = \|y_0\|^2 \left(\langle \frac{\overline{\varphi(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0, x \rangle - \varphi(x) \right).$$

Ainsi,

$$\forall x \in H, \qquad \varphi(x) = \langle \frac{\overline{\varphi(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0, x \rangle.$$

On peut donc poser $y := \frac{\overline{\varphi(y_0)}}{\|y_0\|^2} y_0$.

■

Dans le théorème suivant, on considère une forme bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou sesquilinéaire (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : $a : H \times H \to \mathbb{K}$. On rappelle qu'une telle fonction est continue si et seulement si il existe $C > 0$ tel que pour tout $x, y \in H$, $|a(x,y)| \leq C\|x\|\|y\|$. On dit qu'elle est coercive s'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in H$, $a(x,x) \geq \alpha \|x\|^2$.

Théorème 39 (Théorème de Lax-Milgram) *Soit $a\colon H \times H \to \mathbb{K}$ une forme bilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou sesquilinéaire si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, continue et coercive. Alors pour tout $\varphi \in H^*$, il existe un unique $y \in H$ tel que*

$$\forall x \in H, \qquad \varphi(x) = a(y, x).$$

Preuve:
Etape 1 : on montre qu'il existe une application linéaire continue $A : H \to H$ telle que pour tous $x, y \in H$, $a(y,x) = \langle Ay, x \rangle$.

En effet, pour tout $y \in H$, la fonction $x \mapsto a(y,x)$ est linéaire et continue (par continuité de a), donc par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique vecteur, noté Ay, tel que

$$\forall x \in H, \qquad a(y,x) = \langle Ay, x \rangle.$$

La fonction $y \mapsto Ay$ est linéaire. En effet, soient $y_1, y_2 \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors par construction de A, on a

$$\forall x \in H, \qquad a(y_1 + \lambda y_2, x) = \langle A(y_1 + \lambda y_2), x \rangle.$$

Comme a est sesquilinéaire, le membre de gauche est égal à $a(y_1, x) + \overline{\lambda} a(y_2, x)$, qui par construction de A n'est autre que
$$\langle Ay_1, x\rangle + \overline{\lambda}\langle Ay_2, x\rangle = \langle Ay_1 + \lambda Ay_2, x\rangle.$$
Ainsi,
$$\forall x \in H, \qquad \langle A(y_1 + \lambda y_2), x\rangle = \langle Ay_1 + \lambda Ay_2, x\rangle,$$
ce qui implique que $A(y_1 + \lambda y_2) = Ay_1 + \lambda Ay_2$. Donc A est linéaire.

De plus, A est continue. En effet, par continuité de a, il existe $C > 0$ tel que pour tous $x, y \in H$, $|a(y, x)| \leq C\,\|x\|\,\|y\|$. En appliquant cette inégalité à $x = Ay$, il vient
$$|\langle Ay, Ay\rangle| = |a(y, Ay)| \leq C\,\|Ay\|\,\|y\|\,.$$
En distinguant les cas $Ay \neq 0$ et $= 0$, on en déduit que $\|Ay\| \leq C\,\|y\|$ et donc A est continue.

Etape 2 : on montre que A est un isomorphisme.

Pour tout $x \in H$,
$$\alpha\,\|x\|^2 \leq a(x, x) = \langle Ax, x\rangle.$$
Donc si $x \in (\operatorname{im} A)^\perp$ alors $x = 0$. Cela montre que $\operatorname{im} A$ est dense dans H. De plus, l'identité précédente implique par l'inégalité de Cauchy-Schwarz que
$$\alpha\,\|x\|^2 \leq \|Ax\|\,\|x\|\,.$$
En distinguant les cas $x = 0$ ou $x \neq 0$, on obtient que $\alpha\,\|x\| \leq \|Ax\|$. Cela implique que A est injective. On va en déduire également que l'image de A est fermée. En effet, soit $(Ax_n)_{n\geq 0}$ une suite convergente vers un vecteur $y \in H$. C'est donc une suite de Cauchy. Comme pour tout $n, m \geq 0$, on a $\|x_n - x_m\| \leq \frac{1}{\alpha}\,\|Ax_n - Ax_m\|$, on en déduit que $(x_n)_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans H complet, donc convergente vers un certain $x \in H$. Par continuité de A, il vient $y = \lim_{n\to+\infty} Ax_n = Ax \in \operatorname{im} A$. Ainsi, $\operatorname{im} A$ est fermé dans H. Comme il est aussi dense dans H, on peut conclure que $\operatorname{im} A = H$, i.e. A est surjective. Ainsi A est un isomorphisme de H dans lui-même.

Etape 3 : Conclusion.

Par le théorème de représentation de Riesz, il existe $z \in H$ tel que $\varphi(x) = \langle z, x\rangle$ pour tout $x \in H$. L'assertion à démontrer est alors équivalente à l'existence d'un unique $y \in H$ tel que $Ay = z$, ce qui découle du fait que A est un isomorphisme. ■

Sous les hypothèses précédentes, si on suppose de plus que a est symétrique si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou hermitienne si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors on peut obtenir la conclusion avec une preuve plus simple. En effet, dans ce cas, a est un produit scalaire sur H. Par continuité et coercivité de a, la norme issue de a est équivalente à la norme de H. Donc φ est aussi continue sur H lorsque H est muni de ce produit scalaire a. Par le théorème de représentation de Riesz pour ce nouveau produit scalaire, il existe un unique $y \in H$ tel que pour tout $z \in H$, on ait
$$\varphi(z) = a(y, z),$$
qui est le résultat à démontrer.

Toujours sous cette hypothèse de symétrie de a, on peut observer que le vecteur y de la conclusion du théorème de Lax-Milgram est aussi l'unique minimiseur de $J\colon H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}a(x, x) - \operatorname{Re}\varphi(x)$. En effet, J est convexe et C^1, donc ses minima globaux coïncident avec ses points critiques. Or sa différentielle est $DJ(x) = \operatorname{Re} a(x, \cdot) - \operatorname{Re}\varphi$. Donc l'ensemble des points critiques est l'ensemble des $y \in H$ tels que $\operatorname{Re} a(y, x) = \operatorname{Re}\varphi(x)$, pour tout $x \in H$. En remplaçant x par ix, on voit que cette condition est équivalente à $a(y, \cdot) = \varphi$. Ainsi, J a bien comme unique point critique la solution y du problème $a(y, \cdot) = \varphi$.

Proposition 25 *Si $T : H \to H$ est linéaire continue, il existe $T^* : H \to H$ linéaire continue telle que*
$$\forall x, y \in H, \qquad \langle x, Ty\rangle = \langle T^* x, y\rangle.$$

Preuve:
On introduit l'application $a : (x, y) \in H \times H \mapsto \langle x, Ty\rangle$ qui est sesquilinéaire continu. On en déduit l'existence de T^* exactement comme pour l'existence de A dans la première étape de la preuve du théorème de Lax-Milgram (qui n'utilise pas la coercivité de a). ■

5.4 Bases hilbertiennes

5.4.1 Familles orthonormées

Définition 27 *Une famille $(u_i)_{i\in I}$ d'éléments de H est dite* orthonormée *si $\|u_i\| = 1$ pour tout $i \in I$ et $\langle u_i, u_j\rangle = 0$ pour tout $i \neq j \in I$.*

Remarque 10 *Pour toute partie finie $J \subset I$ et toutes familles $(\lambda_i), (\mu_i)$ de scalaires, on a alors*

$$\langle \sum_{i\in J} \lambda_i u_i, \sum_{j\in J} \mu_j u_j\rangle = \sum_{i\in J} \overline{\lambda_i}\mu_i, \qquad \left\|\sum_{i\in J} \lambda_i u_i\right\|^2 = \sum_{i\in J} |\lambda_i|^2 .$$

Proposition 26 *Si $(u_1, \ldots, u_N)$ est une famille orthonormée de H et $F = \mathrm{vect}\,(u_1, \ldots, u_N)$, alors la projection orthogonale sur F est donnée par*

$$\forall x \in H, \qquad P_F(x) = \sum_{i=1}^{N} \langle u_i, x\rangle\, u_i.$$

Preuve:
Le vecteur $y = \sum_{i=1}^{N} \langle u_i, x\rangle\, u_i$ appartient à F et vérifie pour tout $i \in \{1, \ldots, N\}$:

$$\begin{aligned}
\langle u_i, y - x\rangle &= \langle u_i, \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, x\rangle\, u_j - x\rangle \\
&= \sum_{j=1}^{N} \langle u_j, x\rangle\, \langle u_i, u_j\rangle - \langle u_i, x\rangle \\
&= \langle u_i, x\rangle - \langle u_i, x\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Donc par linéarité, $\langle z, y - x\rangle = 0$ pour tout $z \in F$. On peut conclure que $y = P_F(x)$. ■

Proposition 27 (Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt) *Soit $(v_n)_{n\geq 0}$ une famille dénombrable d'éléments de H. Si $(v_n)_{n\geq 0}$ est libre, alors il existe une famille orthonormée $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que*

$$\forall n \geq 0, \qquad \mathrm{vect}\,(u_0, \ldots, u_n) = \mathrm{vect}\,(v_0, \ldots, v_n).$$

Preuve:
Notons $F_n = \mathrm{vect}\,(v_0, \ldots, v_n)$, pour $n \geq 0$. Définissons la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ en posant $u_0 = v_0/\,\|v_0\|$ puis pour tout $n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{v_{n+1} - P_{F_n}(v_{n+1})}{\|v_{n+1} - P_{F_n}(v_{n+1})\|}. \tag{5.5}$$

Par construction, u_{n+1} est orthogonal F_n, de norme 1 et appartient à $F_{n+1} = \mathrm{vect}\,(F_n \cup \{v_{n+1}\})$. On en déduit que $(u_n)_{n\geq 0}$ est orthonormée et aussi que $\mathrm{vect}\,(u_0, \ldots, u_n) \subset F_n$ pour tout $n \geq 0$.

Montrons par récurrence sur $n \geq 0$ que $F_n = \mathrm{vect}(u_0, \ldots, u_n)$. Le résultat est vrai pour $n = 0$ par le choix de u_0. S'il est vrai pour un $n \geq 0$, alors comme $v_{n+1} = u_{n+1}\,\|v_{n+1} - P_{F_n}(v_{n+1})\| + P_{F_n}(v_{n+1})$, on aura $v_{n+1} \in \mathrm{vect}\,(\{u_{n+1}\} \cup F_n)$ et donc par hypothèse de récurrence, $v_{n+1} \in \mathrm{vect}\,(u_0, \ldots, u_{n+1})$. A nouveau par l'hypothèse de récurrence, on en déduit que $F_{n+1} \subset \mathrm{vect}\,(u_0, \ldots, u_{n+1})$. L'autre inclusion ayant été établie précédemment, on a l'égalité désirée. En conclusion, $F_n = \mathrm{vect}\,(u_0, \ldots, u_n)$ pour tout $n \geq 0$.

■

La preuve précédente donne un algorithme pour calculer effectivement u_n à partir de v_n. En effet, on sait que $P_{F_n}(v_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_{n+1} \rangle \, u_i$. De plus, par le théorème de Pythagore,

$$\|v_{n+1} - P_{F_n}(v_{n+1})\|^2 = \|v_{n+1}\|^2 - \|P_{F_n}(v_{n+1})\|^2 = \|v_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle u_i, v_{n+1} \rangle|^2$$

et donc par (5.5)

$$u_{n+1} = \left(\|v_{n+1}\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\langle u_i, v_{n+1} \rangle|^2 \right)^{-1/2} \left(v_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle u_i, v_{n+1} \rangle \, u_i \right).$$

Exemple 27 Polynômes orthogonaux. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $w : I \to \mathbb{R}^+$ une fonction borélienne sur I tel que tout polynôme soit dans $L^2(I, w(x)\, dx)$. En appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la famille $v_n(x) = x^n$ dans $L^2(I, w(x)\, dx)$, on obtient une famille orthonormée de polynômes P_n telle que vect $(P_0, \ldots, P_n) = \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \geq 0$. Alors*

$$\deg P_n = n, \quad P_n \in (\mathbb{R}_{n-1}[X])^{\perp}.$$

Notons Q_n le multiple de P_n ayant pour coefficient dominant 1. On peut obtenir pour Q_n une formule de récurrence plus simple que celle du procédé de Gram-Schmidt. En effet le polynôme $xQ_n(x)$ est de degré $n+1$, et s'écrit donc sous la forme

$$xQ_n(x) = \lambda_{n+1} Q_{n+1}(x) + \sum_{i=0}^{n} \lambda_i Q_i(x). \tag{5.6}$$

Par comparaison des coefficients dominants, on a $\lambda_{n+1} = 1$. De plus, comme Q_n est orthogonal aux polynômes de degré $\leq n-1$, on a

$$\langle xQ_n, Q_i \rangle = \int_I xQ_n(x) Q_i(x) w(x)\, dx = \langle Q_n, xQ_i \rangle = 0,$$

pour tout $i \leq n-2$. En prenant le produit scalaire de (5.6) avec Q_i, on obtient

$$0 = \langle Q_{n+1}, Q_i \rangle + \lambda_i = \lambda_i.$$

Ainsi,

$$xQ_n(x) = Q_{n+1}(x) + \lambda_n Q_n(x) + \lambda_{n-1} Q_{n-1}(x).$$

En prenant maintenant le produit scalaire successivement avec Q_n puis avec Q_{n-1}, on obtient les relations

$$\langle xQ_n, Q_n \rangle = \lambda_n \|Q_n\|^2, \qquad \langle xQ_n, Q_{n-1} \rangle = \lambda_{n-1} \|Q_{n-1}\|^2.$$

Finalement, on a la relation de récurrence

$$Q_{n+1}(x) = (x - \lambda_n) Q_n(x) - \lambda_{n-1} Q_{n-1}(x), \quad \lambda_n = \frac{\langle xQ_n, Q_n \rangle}{\|Q_n\|^2}, \quad \lambda_{n-1} = \frac{\langle xQ_n, Q_{n-1} \rangle}{\|Q_{n-1}\|^2}.$$

Parmi les familles de polynômes orthogonaux classiques, citons

— *les polynômes de Hermite qui correspondent à $w = e^{-x^2}$ sur $I = \mathbb{R}$,*
— *les polynômes de Legendre qui correspondent à $w = 1$ sur $I =]-1, 1[$,*
— *les polynômes de Tchebychev qui correspondent à $w = (1-x^2)^{-1/2}$ sur $I =]-1, 1[$.*

Proposition 28 *Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormée.*

1. *Pour tout $x \in H$, la suite $(\langle u_n, x\rangle)_{n\geq 0}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} |\langle u_n, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2$ (inégalité de Bessel).*
2. *Pour toute suite $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$, la série $\sum_n x_n u_n$ converge dans H. De plus, $\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} x_n u_n\right\| = \|(x_n)_n\|_{\ell^2}$.*
3. *Pour tout $x \in H$, la série $\sum_n \langle u_n, x\rangle u_n$ converge vers $P_F(x)$, où $F = \overline{\text{vect}\,(u_n, n \geq 0)}$.*

Preuve:
Pour tout $n \geq 0$, notons $F_n = \text{vect}\,(u_0, \ldots, u_n)$. Alors pour tout $x \in H$, le théorème de Pythagore implique que

$$\|P_{F_n}(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|x - P_{F_n}(x)\|^2 \leq \|x\|^2 .$$

Comme $P_{F_n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \langle u_k, x\rangle u_k$, on a $\|P_{F_n}(x)\|^2 = \sum_{k=0}^{n} |\langle u_k, x\rangle|^2$. Donc

$$\sum_{k=0}^{n} |\langle u_k, x\rangle|^2 \leq \|x\|^2 .$$

La série du membre de gauche est majorée et à termes positifs, donc converge, ce qui montre la première partie de la proposition.

Ensuite, pour tout $(x_n)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$, pour tout $p \geq q \geq 0$,

$$\left\|\sum_{n=p}^{q} x_n u_n\right\|^2 = \sum_{n=p}^{q} |x_n|^2.$$

Comme la série $\sum_n |x_n|^2$ converge, on en déduit que la suite des sommes partielles $(\sum_{n=0}^{N} x_n u_n)_{N\geq 0}$ est de Cauchy dans H qui est complet. Donc la série $\sum_n x_n u_n$ converge dans H vers un vecteur noté z. De plus, pour tout $N \geq 0$,

$$\left\|\sum_{n=0}^{N} x_n u_n\right\|^2 = \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2.$$

Par continuité de la norme, on obtient en passant à la limite $N \to +\infty$,

$$\|z\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |x_n|^2,$$

ce qui achève la preuve du deuxième point de la proposition.

Enfin, soit $x \in H$. Par le premier point, on sait que la série $(\langle u_n, x\rangle)_{n\geq 0}$ est dans $\ell^2(\mathbb{N})$. Par le second point, on en déduit que la série $\sum_n \langle u_n, x\rangle u_n$ converge vers un vecteur $z \in H$. Il reste à montrer que $z = P_F(x)$, où $F = \overline{\text{vect}\,(u_n, n \geq 0)}$. Par construction, $z = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} \langle u_n, x\rangle u_n = \lim_{N\to+\infty} P_{F_N}(x)$. Comme F est fermé et que pour tout $N \geq 0$, on a $F_N \subset F$, on obtient que $z \in F$.

Soit $n \geq 0$ et $y \in F_n$. Alors pour tout $m \geq n$, $y \in F_m$. Donc $\|x - y\| \geq \|x - P_{F_m}(x)\|$. En passant à la limite $m \to +\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient $\|x - y\| \geq \|x - z\|$. Comme n est arbitraire, cette inégalité est vraie pour tout $y \in \text{vect}\,(u_n, n \geq 0)$, et donc aussi par continuité de la norme, pour tout $y \in F$.

Ainsi, $z \in F$ et $\|x - z\| \leq \text{dist}(x, F)$. On en déduit que $z = P_F(x)$. ■

Remarque 11 *En général, la série $\sum_n \langle u_n, x\rangle u_n$ n'est pas absolument convergente, ce qui ne l'empêche pas d'être convergente.*

5.4.2 Bases hilbertiennes

Définition 28 *1. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de H est* totale *si le sous-espace vectoriel qu'elle engendre est dense dans H :*

$$\overline{\textit{vect}\ (u_n, n \geq 0)} = H.$$

2. On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de H est une base hilbertienne *si elle est totale et orthonormée.*

Il faut distinguer la notion de base hilbertienne et celle de base algébrique. Rappelons qu'une base algébrique est une famille $(e_i)_{i\in I}$ dans H telle que tout vecteur de H s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire *finie* des e_i. On peut montrer avec le lemme de Baire que dans un *evn* complet, il n'existe pas de base algébrique infinie dénombrable.

Exemple 28 *Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, la* base canonique *est une base hilbertienne.*

Dans un espace de Hilbert de dimension finie, on obtient aisément une base orthonormée à partir de n'importe quelle base, simplement par procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On peut généraliser ce procédé à tous les espaces de Hilbert séparables :

Théorème 40 *Si H est séparable (i.e. contient une partie dénombrable dense), alors il possède une base hilbertienne.*

Preuve:
On se contente de considérer le cas où H est de dimension infinie. Soit $\{e_n, n \geq 0\}$ une famille dense dénombrable de H.

Etape 1 : on extrait une famille totale libre. Pour cela, on définit par récurrence une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ telle que pour tout $k \geq 0$,

$$\{e_{n_\ell}, 0 \leq \ell \leq k\} \text{ est libre et } \mathrm{vect}(e_{n_\ell}, 0 \leq \ell \leq k) = \mathrm{vect}(e_n, 0 \leq n \leq n_k\}. \tag{5.7}$$

Notons $n_0 \geq 0$ le premier indice $n \geq 0$ tel que $e_n \neq 0$. Supposons ensuite construits $n_0 < \cdots < n_k$ tels que $\{e_{n_\ell}, 0 \leq \ell \leq k\}$ vérifie (5.7). Alors on note n_{k+1} le premier indice $n > n_k$ tel que $e_n \notin \mathrm{vect}(e_{n_0}, \ldots, e_{n_k})$. Il suit que la famille $\{e_{n_\ell}, 0 \leq \ell \leq k+1\}$ est libre et $\mathrm{vect}(e_{n_\ell}, 0 \leq \ell \leq k+1) = \mathrm{vect}(e_n, 0 \leq n \leq n_{k+1}\}$. Ainsi, on construit une suite par récurrence ayant les propriétés désirées.

Cette famille $\{e_{n_k}, k \geq 0\}$ est libre et $\mathrm{vect}(e_{n_\ell}, \ell \geq 0) = \mathrm{vect}(e_n, n \geq 0)$. Donc

$$\overline{\mathrm{vect}(e_{n_\ell}, \ell \geq 0)} = \overline{\mathrm{vect}(e_n, n \geq 0)} \supset \overline{\{e_n, n \geq 0\}} = H.$$

Etape 2 : on applique ensuite le procédé de Gram-Schmidt à la famille $\{e_{n_\ell}, \ell \geq 0\}$ pour obtenir une famille orthonormée $\{u_{n_\ell}, \ell \geq 0\}$ qui vérifie

$$\mathrm{vect}(u_{n_\ell}, \ell \geq 0) = \mathrm{vect}(e_{n_\ell}, \ell \geq 0)$$

et donc

$$\overline{\mathrm{vect}(u_{n_\ell}, \ell \geq 0)} = \overline{\mathrm{vect}(e_{n_\ell}, \ell \geq 0)} = H.$$

■

Théorème 41 *On suppose H séparable (et de dimension infinie). Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une famille orthonormée. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne,*
2. *$\forall x \in H$, $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle u_n, x\rangle\, u_n$,*
3. *$\forall x \in H$, $\|x\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle u_n, x\rangle|^2$ (identité de Parseval).*

Preuve:
Notons $F = \overline{\text{vect}\,(u_n, n \geq 0)}$. Par la proposition 28, on sait que $P_F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \langle u_n, x\rangle u_n$ et que $\|P_F(x)\|^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} |\langle u_n, x\rangle|^2$.

Si l'assertion 1 est vraie, alors $F = H$ et donc $P_F(x) = x$ pour tout $x \in H$. On en déduit que les assertions 2 et 3 sont vraies.

Réciproquement, si 2 est vraie, alors pour tout $x \in H$, $x = p_F(x) \in F$ donc $F = H$ ce qui implique 1.

Enfin si 3 est vraie, alors $\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = 0$ donc par le théorème de Pythagore, $\|x - P_F(x)\|^2 = 0$, ce qui implique $x = P_F(x)$, c'est-à-dire l'assertion 2.

■

On peut reformuler le théorème précédent en disant que la fonction

$$x \in H \mapsto (\langle u_n, x\rangle)_{n\geq 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$$

est un isomorphisme d'espace vectoriel qui est isométrique. Ainsi, tout espace de Hilbert séparable de dimension infinie est isomorphe à $\ell^2(\mathbb{N})$.

5.5 Questions et exercices

Dans toute cette section, H désigne un espace de Hilbert dont on note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire.

Questions 5 *1. Soit $A \subset H$. Justifier que $A^\perp = (\overline{\text{vect}\,A})^\perp$.*

2. Si F est un sous-espace vectoriel fermé d'un Hilbert H, on sait que la projection orthogonale P_F sur F est linéaire continue. Quelle est sa norme $|||P_F|||$?

3. Expliciter une isométrie bijective entre un espace de Hilbert H et son dual H^*.

4. Justifier que les coefficients de Fourier $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ d'une fonction $f \in L^2(0, 2\pi)$ tendent vers 0 lorsque $|n| \to +\infty$.

5. Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une base hilbertienne d'un espace de Hilbert H. Justifier que pour tout $x, y \in H$, on a $\langle x, y\rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} \overline{x_n} y_n$, où $x_n = \langle u_n, x\rangle$ et $y_n = \langle u_n, y\rangle$.

6. Donner une base hilbertienne dans $L^2(0, 1)$ puis dans $L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 38 *On suppose que l'espace de Hilbert H est séparable et de dimension infinie. On note $(u_n)_{n\geq 1}$ une base hilbertienne.*

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} u_n$ converge dans H. On note x sa limite.

2. Justifier que pour tout $n \geq 1$, on a $\langle u_n, x\rangle = \frac{1}{n}$. En déduire que $x \notin$ vect $(u_n, n \geq 0)$.

3. Conclure que $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas une base algébrique.

Exercice 39 *Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, et $w\colon I \to [0, \infty[$ une fonction borélienne telle qu'il existe $\alpha > 0$ pour lequel*

$$\int_I e^{\alpha|x|} w(x)\, dx < \infty.$$

L'objet de l'exercice est de montrer que les fonctions polynomiales sont denses dans $L^2(I, w(x)\, dx)$.

1. Justifier que les fonctions polynomiales sont contenues dans $L^2(I, w(x)\, dx)$.

2. Soit $f \in L^2(I, w(x)\, dx)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_I f(x) x^n w(x)\, dx = 0.$$

(a) *Justifier que* $fw\mathbf{1}_I \in L^1(\mathbb{R})$.

(b) *Montrer que*

$$F\colon U \to \mathbb{C},\ z \mapsto \int_I e^{zx} f(x)w(x)\,dx.$$

définit une fonction holomorphe sur un ouvert U *bien choisi de* $\mathbb{C}$*, connexe et contenant* 0.

(c) *Calculer les dérivées de* F *en* 0 *puis en déduire que* $F \equiv 0$ *sur* U.

(d) *En déduire que la transformée de Fourier de* $fw\mathbf{1}_I$ *est nulle puis conclure.*

3. *(Question subsidiaire) Montrer que* $L^2(I, w(x)\,dx)$ *est séparable. Expliquer comment construire explicitement une base hilbertienne.*

Exercice 40 *Soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{R}^n$ *et* μ *une mesure borélienne sur* Ω *telle que* $C_c^0(\Omega)$ *est dense dans* $L^2(\Omega,\mu)$ *(c'est le cas de toutes les mesures de la forme* $\mu = w(x)\,dx$ *où* $w \in L^1_{loc}(\Omega)$ *avec* $w \geq 0$ *p.p.). Le but de l'exercice est de montrer que* $L^2(\Omega,\mu)$ *est séparable (et donc admet une base hilbertienne).*

1. *On suppose d'abord que* $n = 1$ *et* $\Omega =]-1,1[$*. Pour tout* $i \geq 1$*, on note* $K_i = [-1+\frac{1}{i}, 1-\frac{1}{i}]$.

   (a) *Montrer que pour tout* $i \geq 1$*, il existe* $\theta_i \in C_c^0(]-1,1[, [0,1])$ *tel que* $\theta_i \equiv 1$ *sur* K_i *et* $\theta_i = 0$ *hors de* K_{i+1}.

   (b) *Soient* $\varepsilon > 0$ *et* $\varphi \in C_c^0(]-1,1[)$*. On note* i *un entier* ≥ 1 *tel que* $\varphi \equiv 0$ *hors de* K_i*. Justifier qu'il existe un polynôme* $P \in \mathbb{Q}[X]$ *tel que*

   $$\max_{x\in K_{i+1}} |\varphi(x) - P(x)| \leq \varepsilon.$$

   (c) *En déduire que*

   $$\max_{x\in[-1,1]} |\varphi(x) - \theta_i(x)P(x)| \leq \varepsilon.$$

   (d) *Conclure que* $L^2(]-1,1[)$ *est séparable.*

2. *On se place désormais dans le cas* $n \geq 1$.

   (a) *Justifier qu'il existe une suite de compacts* $(K_i)_{i\geq 0}$ *telle que*

   $$\Omega = \cup_{i\geq 0} K_i, \qquad \forall i \geq 0, K_i \subset \textit{int}\, K_{i+1}.$$

   (b) *Pour tout* $i \geq 0$*, on définit*

   $$\theta_i(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus K_{i+1})}{\operatorname{dist}(x, K_i) + \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus K_{i+1})}.$$

   Montrer que $\theta_i \in C_c^0(\Omega, [0,1])$*,* $\theta_i \equiv 1$ *sur* K_i *et* $\theta_i \equiv 0$ *hors de* K_{i+1}.

   (c) *En s'inspirant du cas* $n = 1$*, conclure que* $L^2(\Omega,\mu)$ *est séparable.*

Exercice 41 *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* $w : I \to]0,+\infty[$ *une fonction localement intégrable. Soit* $(u_n)_{n\geq 0}$ *une base orthonormée de* $L^2(I, w(x)\,dx)$*. Montrer que* $(\sqrt{w}u_n)_{n\geq 0}$ *est une base orthonormée de* $L^2(I)$.

Exercice 42 *Soit* I *un intervalle borné de* $\mathbb{R}$ *et* $w : I \to]0,+\infty[$ *une fonction borélienne telle que* $L^2(I, w(x)\,dx)$ *contienne les polynômes. Soit* $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ *une suite de fonctions* C^∞ *sur* $\overline{I}$*. On suppose que pour tout* $n \geq 0$*, les dérivées de* φ_n *d'ordre*[3] 0 *à* $n-1$ *s'annulent aux extrémités de* I*, et que*

$$Q_n = \frac{1}{w}\varphi_n^{(n)}$$

est un polynôme de degré n.

3. pour $n = 0$, on demande seulement que φ_0 s'annule aux extrémités de I.

1. *Montrer que pour tout* $n \geq 0$,

$$\int_I Q_n P w \, dx = (-1)^n \int_I \varphi_n P^{(n)} \, dx \qquad \forall P \in \mathbb{R}[X].$$

2. *En déduire que* $(Q_n)_{n \geq 0}$ *est une famille de polynômes orthogonaux dans* $L^2(I, w(x)\,dx)$.

Exercice 43 *Soit* $T > 0$. *Pour tout* $n \in \mathbb{Z}$, *on note* $u_n(x) = e^{i\frac{2\pi}{T}nx}$, $n \in \mathbb{Z}$. *On rappelle qu'un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire (finie) des* u_n. *Le théorème de Fejér affirme que l'ensemble des polynômes trigonométriques est dense dans l'ensemble* $C^0_T(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ *des fonctions continues* T *périodiques sur* $\mathbb{R}$, *muni de la norme uniforme.*

1. *On munit* $L^2((0,T), \mathbb{C})$ *du produit scalaire* $\langle f, g \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \overline{f(t)} g(t)\, dt$. *Montrer que la famille* $(u_n)_{n \geq 0}$ *est orthonormée pour ce produit scalaire.*
2. *Justifier que* $(u_n)_{n \geq 0}$ *est une base hilbertienne de* $L^2((0,T), \mathbb{C})$.
3. *Justifier que* $\{1\} \cup \{\sqrt{2}\cos\frac{2\pi}{T}nx, n \geq 1\} \cup \{\sqrt{2}\sin\frac{2\pi}{T}nx, n \geq 1\}$ *forme une base hilbertienne de* $L^2((0,T), \mathbb{R})$.

Voici une illustration du théorème de Lax-Milgram qui ne fait pas intervenir la notion d'espace de Sobolev...

Exercice 44 *Soient* $K \in L^1(\mathbb{R})$ *et* $f \in L^2(\mathbb{R})$. *On considère l'équation*

$$u + K * u = f \tag{5.8}$$

où l'inconnue u *est un élément de* $L^2(\mathbb{R})$.

1. *Dans cette question seulement, on suppose que* $\|K\|_{L^1(\mathbb{R})} < 1$. *Prouver l'existence et l'unicité d'une solution*
   (a) *en utilisant la transformée de Fourier,*
   (b) *en utilisant le théorème de point fixe de Picard.*
2. *Dans cette question seulement, on suppose qu'il existe* $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ *tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, K(x) = \int_{\mathbb{R}} \rho(x+z)\rho(z)\, dz.$$

   (a) *Justifier qu'une telle fonction* K *est bien dans* $L^1(\mathbb{R})$.
   (b) *En considérant la forme bilinéaire sur* $L^2(\mathbb{R})$:

$$a : (u,v) \in L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R}) \mapsto \int_{\mathbb{R}} \big(u(x)v(x) + K * u(x)v(x)\big)\, dx,$$

   montrer qu'il existe une unique solution $u \in L^2(\mathbb{R})$.

Exercice 45 (Inspiré du sujet d'agrégation externe analyse et probabilités 2011) *Soit* $(H, \langle\,,\,\rangle)$ *un espace de Hilbert (sur* $\mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) qu'on suppose séparable. On notera* $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *une suite dense dans* H. *Soit* $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de* H *telle que* $||y_n|| \leq 1$ *pour tout* n.

1. *Montrer qu'il existe une sous-suite* $(y_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ *telle que* $\lim_{n \to +\infty} \langle y_{\varphi(n)}, x_k \rangle$ *existe pour tout* $k \geq 0$.
2. *Montrer que* $\lim_{n \to +\infty} \langle y_{\varphi(n)}, z \rangle$ *existe pour tout* $z \in H$.
3. *Montrer qu'il existe* $y \in H$ *tel que* $\langle y, z \rangle := \lim_{n \to +\infty} \langle y_{\varphi(n)}, z \rangle$ *pour tout* $z \in H$.

Exercice 46 (Extrait du sujet d'agrégation externe analyse et probabilités 2009) *On se donne un espace de Hilbert $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ (sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qu'on identifiera avec son dual topologique (par le théorème de représentation de Riesz). On note B la boule ouverte de centre 0 et de rayon 1 dans H et $\overline{B}$ la boule fermée correspondante. L'algèbre des endomorphismes continus de H est notée $\mathcal{L}(H)$.*

Un élément T de $\mathcal{L}(H)$ est dit compact si $\overline{T(B)}$ est une partie compacte de H. On note $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des T de $\mathcal{L}(H)$ vérifiant cette propriété, $\mathcal{K}_0(H)$ l'ensemble des T de $\mathcal{L}(H)$ dont l'image est de dimension finie.

1. (a) *Montrer que $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de l'algèbre $\mathcal{L}(H)$ contenant $\mathcal{K}_0(H)$.*
   (b) *Montrer que $\mathcal{K}(H)$ est fermé dans $\mathcal{L}(H)$. (Indication : on rappelle qu'une partie X de H est d'adhérence compacte si, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir X par une réunion finie de boules fermées de rayon ε.)*
2. *Soit K dans $\mathcal{K}(H)$. On note K^* son adjoint.*
   (a) *Montrer que ker $(I + K)$ est de dimension finie.*
   (b) *Montrer que im $(I+K)$ est fermé dans H. (Indication : soient y dans H adhérent à im $(I+K)$, $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de H telle que $K(x_n) + x_n \to y$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x'_n la projection orthogonale de x_n sur ker $(K + I)^\perp$. En raisonnant par l'absurde et en considérant $u_n = \frac{x'_n}{|x'_n|}$, montrer que (x'_n) est bornée. Conclure.)*
   (c) *Montrer que K^* appartient à $\mathcal{K}(H)$. (Indication : soient $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments de $\overline{B}$, Γ l'adhérence de $K(B)$ dans H et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n la fonction de Γ dans $\mathbb{C}$ qui à x associe $\langle x_n, x\rangle$. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $(n_k)_{k\geq 0}$ d'entiers naturels telle que $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ converge uniformément sur Γ. En déduire que $(K^*(x_{n_k}))_{k\geq 0}$ converge dans H.)*
   (d) *Montrer que im $(I + K)$ est de codimension finie dans H.*
3. *(Question subsidiaire) Montrer que $\mathcal{K}_0(H)$ est dense dans $\mathcal{K}(H)$.*

5.6 Pour aller plus loin

En utilisant l'axiome du choix, on peut montrer que tout espace de Hilbert a une base hilbertienne.

L'espérance conditionnelle d'une variable aléatoire $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ peut être interprétée comme sa projection orthogonale sur le sous-espace fermé $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$, lorsque $\mathcal{G}$ est une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Le théorème de représentation de Riesz appliqué à l'espace $L^2(X, \mu)$ permet de démontrer le théorème de Radon-Nikodym, qu'on peut utiliser pour montrer que le dual de $L^p(X, \mu)$ s'identifie à $L^{p'}(X, \mu)$ lorsque $1 \leq p < \infty$ et μ est une mesure σ finie.

Le théorème de Lax-Milgram appliqué à la forme bilinéaire $a(f, g) = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g$ dans $H = H^1_0(\Omega)$, avec Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ à frontière régulière, permet de résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation de Poisson,

$$\Delta f = \varphi \text{ dans } \Omega, \qquad f = 0 \text{ sur } \partial\Omega.$$

Ici, φ est une fonction donnée dans $L^2(\Omega)$.

Chapitre 6

Bibliographie

— H. Brezis, Analyse fonctionnelle. Théorie et Applications.
— X. Gourdon, Les maths en tête : Analyse.
— H. Queffélec, C. Zuily, Analyse pour l'agrégation.
— M. Willem, Analyse fonctionnelle élémentaire.