Université Claude Bernard Lyon 1 — Licence de mathématiques $3^{e}$ année

Mesure et intégration — Année 2020–2021

Contrôle terminal

– le mercredi 6 janvier 2021 –

– durée 180 minutes –

**Consignes**

1. Le seul document accepté est le support complet de cours, sous forme papier. Il ne doit pas contenir d'ajouts concernant la correction des exercices.
2. Pas d'ordinateur, tablette, téléphone, calculatrice, montre connectée, ou autre objet connecté.
3. Pour chaque intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser à quel type d'intégrale s'appliquent les résultats utilisés.

## Exercices de base

**Exercice # 1. (2 p.)** Soit $a > 0$. Calculer

$$L_a := \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-x/n}}{(1+x)^a}\,dx.$$

(Le résultat final doit être un nombre explicite dans $\overline{\mathbb{R}}$, pas une intégrale.)

**Exercice # 2. (2 p.)** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit

$$F(x) := \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\,dt.$$

Montrer que $F$ est continue.

**Exercice # 3. (1 p.)** Montrer que la fonction $F$ de l'exercice 2 est dérivable.

**Exercice # 4. (3 p.)** Soit $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 < y < x\}$.

a) Dessiner $D$ dans le plan $xOy$.

b) Calculer $\displaystyle\int_D \frac{y}{x}\,dxdy$.

**Exercice # 5. (2 p.)** Soit $\Delta := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2\,;\, 0 < t < x\}$.

Montrer que

$$\int_\Delta \frac{\cos t}{1+x^3}\,dxdt = \int_0^\infty \frac{\sin x}{1+x^3}\,dx.$$

**Exercice # 6. (2 p.)** Calculer

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+|x|)^3}\,dx$$

(où $|x|$ désigne la norme euclidienne usuelle de $x \in \mathbb{R}^2$).

**Exercice # 7. (2 p.)** Soit

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) := \exp\left(-|x_1| - \cdots - |x_n|\right),\ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Calculer $\widehat{f}$.

## Exercices

**Exercice # 8. (3 p.)**

a) Soit $x \in [0, \infty[$. Établir la monotonie de la suite $\left(n\left(e^{x/n}-1\right)\right)_{n\geq 1}$. (On pourra par exemple utiliser le développement en série de l'exponentielle.)

b) Calculer

$$\lim_{n\to\infty} n\int_0^\infty (e^{x/n}-1)e^{-2x}\,dx.$$

**Exercice # 9. (1 p.)** Soit $F$ la fonction de l'exercice 2, qui est dérivable (voir l'exercice 3). Calculer $\lim\limits_{x\to\infty} F'(x)$.

**Exercice # 10. (2 p.)** Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$. Soit

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ g(\xi) := \begin{cases} |\xi|^{-1/3} - 1, & \text{si } 0 < |\xi| \leq 1 \\ 0, & \text{si } |\xi| > 1 \text{ ou } \xi = 0 \end{cases}.$$

a) Existe-t-il $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} = g$ ?

b) Existe-t-il $f \in L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} = g$ ?

## Problèmes

**Problème # 1. (4 p.)** Soit

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\, ;\, 0 < y < x\}.$$

Soit

$$f : E \to \mathbb{R},\ f(x, y) := \frac{\cos y}{x^a},\ \forall\, (x, y) \in E,$$

où $1 < a < 2$.

a) Donner un sens à et montrer l'égalité

$$\int_0^\infty \left(\int_{E_x} f(x, y)\,dy\right) dx = \int_0^\infty \left(\int_{E^y} f(x, y)\,dx\right) dy.$$

b) Montrer que $f$ n'est pas intégrable sur $E$, et donc le théorème de Fubini ne s'applique pas.

**Problème # 2. (4 p.)** Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

Rappelons la propriété suivante : si $f, g \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$, alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\,g(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\widehat{g}(x)\,dx. \tag{1}$$

a) Soit

$$g^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ g^\varepsilon(x) := \exp\left(-\varepsilon|x_1| - \cdots - \varepsilon|x_n|\right),\ \forall\, x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n,\ \forall\, \varepsilon > 0.$$

Calculer $\widehat{g^\varepsilon}$.

b) Si $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^n)$ est une fonction continue et bornée telle que $\widehat{f} \in \mathscr{L}^1$, montrer, à l'aide de (1) et a), la formule d'inversion

$$f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\,d\xi.$$

**Problème # 3. (4 p.)** Soient $f, g : ]0, \infty[ \to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes. Montrer que

$$\int_{]0,\infty[^2} f(x+y)\,g(xy)\,|x-y|\,dxdy = 2\int_0^\infty f(x)\left(\int_0^{x^2/4} g(y)\,dy\right) dx.$$