Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3^{e} année
Mesure et intégration | Année 2020–2021

Contrôle terminal
– le mercredi 6 janvier 2021 –
– quelques erreurs fréquentes –

Exercice # 1.

Erreur(s) fréquente(s). Majorer l'intégrande par $g(x) := \dfrac{1}{(1+x)^a}$, ce qui est correct, puis affirmer que g est intégrable – ceci est faux si $a \le 1$. Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas si $a \le 1$.
Point de vigilance. Si le théorème de convergence dominée s'applique, la limite est finie. Ceci aurait dû vous montrer que, si $a \le 1$, on ne pouvait pas utiliser la convergence dominée.
Autre erreur. Faire une majoration qui dépend de n, par exemple $\dfrac{e^{-x/n}}{(1+x)^a} \le e^{-x/n}$.
Travail inutile. Vérifier que les fonctions $x \mapsto \frac{e^{-x/n}}{(1+x)^a}$ sont intégrables. □

Exercice # 2.

Erreur(s) fréquente(s). Utiliser la majoration

$$\left|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right| \le \frac{1}{t(1+t^2)},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Cette majoration est fausse si $t < 0$ (le membre de gauche est positif, celui de droite strictement négatif).
Autre erreur. Majorer

$$\left|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right| \le g(t) := \frac{1}{|t|(1+t^2)},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Ceci est correct, mais inutile, car g n'est pas intégrable. En effet, nous avons $\displaystyle\int_0^1 g(t)\, dt = \infty$.
Autre erreur. Majorer avec une fonction qui dépend de x, par exemple :

$$\left|\frac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right| \le \frac{|x|}{1+t^2},\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Travail inutile. Vérifier que l'intégrande est intégrable. □

Exercice # 3.

Erreur(s) fréquente(s). Majorer $\left|\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right|$ au lieu de $\left|\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\sin(tx)}{t(1+t^2)}\right|$. □

Exercice # 4.

Erreur(s) fréquente(s). Écrire $D =]0,1[\times]x^2, x[$. Ça n'a pas de sens (qui est x ?), et ne peut pas être vrai, même si on donne une valeur à x (car D n'est pas un rectangle).
Autre erreur. Écrire
$$\int_D dxdy = \int_{x^2}^{x}\left(\int_0^1 \frac{y}{x}\,dy\right)dx$$
Ça n'a pas de sens : qui est x ? Que veut dire $\displaystyle\int_{x^2}^{x} g(x)\,dx$?
Autre erreur. Ne pas invoquer le théorème de Tonelli.
Travail inutile. Vérifier que l'intégrande est intégrable (inutile si on passe par le théorème de Tonelli). □

Exercice # 5.

Erreur(s) fréquente(s). Ne pas vérifier que le théorème de Fubini s'applique.
Autre erreur. Donner l'argument suivant. Nous avons
$$\left|\frac{\cos t}{1+x^3}\right| \le \frac{1}{1+x^3},$$
et $\dfrac{1}{1+x^3}$ est intégrable sur $]0,\infty[$. Ceci est vrai, mais inutile. Nous ne devons pas montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{1+x^3}\,dx$ est finie, mais que $\displaystyle\int_\Delta \frac{1}{1+x^3}\,dxdt$ est finie.
Autre erreur. Vérifier la finitude de $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin x}{1+x^3}\right| dx$. Ceci est vrai, mais ce n'est pas la condition à vérifier dans le théorème de Fubini. □

Exercice # 6.

Erreur(s) fréquente(s). Présenter le passage en coordonnées polaires comme un difféomorphisme.
Autre erreur. Ne pas mentionner le théorème de Tonelli. □

Exercice # 7.

Erreur(s) fréquente(s). Ne pas vérifier que $f \in \mathscr{L}^1$.
Autre erreur. Ne pas savoir le sens de $x\cdot\xi$. Par exemple, écrire $x\cdot\xi = x_1\xi + x_2\xi + \cdots + x_n\xi$.
Autre erreur. Décomposer $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n_+ \cup \mathbb{R}^n_-$ (en général, d'ailleurs, sans avoir aucune idée de ce que pourraient être ces deux ensembles). Si $n=2$, auquel des deux ensembles appartient $x=(-1,1)$?
Autre erreur. Appliquer le théorème de Tonelli pour calculer $\widehat{f}$. Pour mémoire, nous avons
$$e^{-\imath x\cdot\xi} = \cos(x\cdot\xi) - \imath\sin(x\cdot\xi),$$
et en général ce nombre est complexe non réel, donc ni positif, ni négatif. □

Exercice # 8.

Erreur(s) fréquente(s). Ne pas comprendre la question a). Il s'agit d'étudier la monotonie en n (à x fixé) et non pas d'étudier la monotonie de la fonction $x \mapsto n\left(e^{x/n}-1\right)$.
Autre erreur. Utiliser un développement limité pour étudier la monotonie. C'est une approche difficile, à manier avec prudence par les débutants (en l'occurrence, mal maniée par ceux qui l'ont choisie).
Point de vigilance. À moins d'être un utilisateur éclairé, éviter d'utiliser les développements limités pour étudier la monotonie ou établir des inégalités. □

Exercice # 9.

Erreur(s) fréquente(s). Conclure que la limite n'existe pas, car $\lim\limits_{x\to\infty}\cos(tx)$ n'existe pas. So what ? □