Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3^{e} année
Année 2019–2020

Contrôle terminal – seconde chance –
– le 25 juin 2020 –
– durée 120 minutes + 30 minutes pour numériser la copie –

Instructions

a) Entête de la copie : prénom, nom, numéro d'étudiant
b) Début de l'épreuve : 14 h
c) Copies à déposer dans la colonne Tomuss 2_CHANCE en un seul document .pdf
d) La colonne 2_CHANCE est accessible jusqu'à 16 h 30

Des questions concernant l'énoncé pendant le contrôle ?
Écrire à **mironescu@math.univ-lyon1.fr**

Consignes pour la rédaction

Pour chaque intégrale de la forme $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, préciser s'il s'agit d'une intégrale de Riemann, généralisée et/ou par rapport à la mesure de Lebesgue ; justifier son existence et préciser si les résultats utilisés concernent les intégrales de Riemann, généralisées ou par rapport à la mesure de Lebesgue. Lors de l'utilisation d'un résultat théorique, il faudra vérifier que ses hypothèses sont satisfaites.

Exercice # 1. Soient

$$I := \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx,$$
$$F(t) := \int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2}\,e^{-tx}\,dx,\ \forall\, t \geq 0.$$

a) Étudier l'existence et la finitude de I en tant qu'intégrale généralisée et de Lebesgue.
b) Montrer que F est deux fois dérivable sur $]0,\infty[$. Déterminer (en justifiant les calculs) F à partir du calcul de F''.
c) Calculer I.
d) En utilisant l'identité

$$1-\cos x = \int_0^x \sin t\,dt,$$

montrer que

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = I.$$

Exercice # 2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \begin{cases} x\,e^{-x}, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

a) Justifier l'existence de $g := \widehat{f}$.

b) Calculer g.

Dans les trois questions suivantes, nous travaillons avec la mesure de Lebesgue ν_1.

c) Calculer $\|g\|_{L^1}$.

d) Calculer $\|g\|_{L^\infty}$.

e) Montrer que $\|g\|_{L^2} \leq \sqrt{\pi}$.

f) Pour quelles valeurs de $p \in [1, \infty]$ a-t-on $g \in \mathscr{L}^p(\mathbb{R}, \nu_1)$?

g) Justifier l'existence de $h := \widehat{g}$.

h) Calculer h.

Exercice # 3. Soient $f, g :]0, \infty[\to [0, \infty[$ deux fonctions boréliennes. Montrer que

$$\int_{]0,\infty[^2} f\left(\frac{x}{y}\right) g(xy)\, dxdy = \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{f(x)}{x}\, dx \int_0^\infty g(x)\, dx.$$

Exercice # 4. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : X \to [0, \infty[$ une application intégrable. Nous nous proposons de montrer le *lemme de Lebesgue* :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon, f) > 0 \text{ tel que } [A \in \mathscr{T},\ \mu(A) \leq \delta] \implies \int_A f d\mu < \varepsilon.$$

a) Montrer le résultat lorsque f est étagée, en prenant $\delta < \dfrac{\varepsilon}{\max f}$.

b) Soit f intégrable.

(i) Montrer qu'il existe g étagée positive telle que $g \leq f$ et $\int g > \int f - \varepsilon/2$.

(ii) Montrer que nous pouvons prendre $\delta(\varepsilon, f) := \delta(\varepsilon/2, g)$.