Université Claude Bernard Lyon 1 | Licence de mathématiques 3e année
Mesure et intégration | Année 2020–2021

Devoir maison # 1
– à rendre le vendredi 23 octobre 2020 –

On pourra utiliser tous les résultats des six premiers chapitres du support de cours (mais pas les résultats des chapitres suivants).

Exercices de routine

Exercice # 1. Soient A, B, C des parties de l'ensemble X. Si

$$A \cup C = B \cup C \text{ et } A \cap C = B \cap C,$$

montrer que $A = B$.

Exercice # 2. Calculer

$$\limsup_n \left((-1)^n n^a + n^b \ln n\right),$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont des paramètres.

Exercice # 3. Montrer que $\mathbb{N}[X]$ est dénombrable.

Exercice # 4. Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction telle que

$$f^{-1}(]a, b[) \in \mathscr{T},\ \forall\, a, b \in \mathbb{Q} \text{ tels que } a < b.$$

Montrer que f est mesurable.

Exercice # 5. Soit $(F_n)_{n\geq 1} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R})$. Soit

$$f : \mathbb{R} \to [0, \infty],\ f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + |x|^n) \times \operatorname{dist}(x, F_n),\ \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que f est borélienne.

Exercice # 6. Expliquer, avec ses propres mots, les notions suivantes :

a) Espace mesuré.
b) Fonction mesurable.
c) L'intégrale de Lebesgue d'une fonction positive.
d) Fonction Lebesgue intégrable.

Quelles sont les pré-requis dont on a besoin pour définir rigoureusement ces notions ?

Exercice # 7. Étudier l'existence et la finitude de

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^a}\, dx,$$

avec $a \in \mathbb{R}$ paramètre, au sens des intégrales généralisées et de Lebesgue.

Exercice # 8. Soit

$$I := \int_0^1 \ln(1 - x)\, dx$$

(intégrale généralisée). Calculer I :

a) À partir de la définition de l'intégrale généralisée.
b) En utilisant un développement en série entière.
   Justifier par un calcul direct l'égalité des deux résultats obtenus.

Exercice # 9. Calculer

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n dx,$$

l'intégrale étant une intégrale de Riemann.

(Il peut être utile de considérer le développement en série de la fonction $t\mapsto \ln(1+t)$, avec $|t|<1$.)

Exercice # 10. Soit

$$I_n := \int_0^\infty \frac{\cos(nx)}{1+x^n}\, dx, \; \forall\, n\geq 2$$

(intégrale de Lebesgue).

a) Montrer que I_n existe, $\forall\, n\geq 2$.
b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} I_n$.

Exercices avancés

Exercice # 11. Soit $(x_j)_{j\geq 1}\subset \mathbb{R}$ une suite de réels. Pour chaque $t>0$, soit

$$U_t := \cup_{j\geq 1}]x_j - t/2^j, x_j+t/2^j[.$$

Montrer que la fonction

$$f :]0,\infty[\to]0,\infty[, \; f(t) := \nu_1(U_t), \; \forall\, t>0,$$

est continue et surjective.

Exercice # 12. Soit $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ une fonction Lebesgue mesurable bornée. Montrer qu'il existe $g, h : \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ telles que :

a) g et h sont boréliennes.
b) $g=h$ ν_n-p. p.
c) $g(x)\leq f(x)\leq h(x), \forall\, x\in\mathbb{R}^n$.

Exercice # 13. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telle que :

1. f est bijective.
2. $f\in C^1$.
3. $f'(t)>0, \forall\, t\in\mathbb{R}$.

Soit $f_*\nu_1$ la mesure image de la mesure de Lebesgue ν_1 sur $\mathscr{B}_\mathbb{R}$ par f. Rappelons que

$$f_*\nu_1(B) := \nu_1(f^{-1}(B)), \; \forall\, B\in\mathscr{B}_\mathbb{R}.$$

Montrer que

$$f_*\nu_1(B) = \int_B (f^{-1})'(t)\, d\nu_1(t), \; \forall\, B\in\mathscr{B}_\mathbb{R}.$$

(On pourra commencer par le cas où B est un intervalle compact.)

Exercice # 14. Soit $\Phi : [a,b]\to[c,d]$ une fonction telle que :

1. $\Phi \in C^1$.
2. $\Phi'(t) \geq 0, \forall\, t \in [a,b]$.
3. $\Phi(a) = c$ et $\Phi(b) = d$.

Montrer que, pour toute fonction borélienne et Riemann intégrable $f : [c,d] \to [0,\infty[$, la fonction $f \circ \Phi\, \Phi'$ est borélienne, et que nous avons

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_{[a,b]} f(\Phi(t))\,\Phi'(t)\,d\nu_1(t) \tag{1}$$

(la première intégrale étant une intégrale de Riemann).

(On pourra commencer par étudier le cas des fonctions en escalier.)

Exercice # 15. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ une espace mesuré, avec μ finie. Soit

$$\mathscr{F} := \{f : X \to \mathbb{R}\,;\ f \text{ est mesurable}\}.$$

Soit

$$d(f,g) := \int_X \frac{|f-g|}{1+|f-g|}\,d\mu,\ \forall\, f,g \in \mathscr{F}.$$

Pour $(f_n) \subset \mathscr{F}$ et $f \in \mathscr{F}$, montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) $\lim_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$.

(ii) Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X\,;\ |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0.$$