Université Claude Bernard Lyon 1
Mesure et intégration

Licence de mathématiques 3e année
Année 2020–2021

Devoir maison # 2
– à rendre le vendredi 18 décembre 2020 –

Exercices de routine

Exercice # 1. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x}\, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^n}.$$

On pourra utiliser le développement en série de l'exponentielle.

Exercice # 2. Soit μ une probabilité sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, soit

$$H_\mu(x,y) := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}\, d\mu(t).$$

Le but de cet exercice est de montrer que si $H_\mu = H_\nu$, alors $\mu = \nu$.

a) Montrer que H_μ est continue.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\lim\limits_{y \searrow 0} y\, H_\mu(x,y)$.

c) Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\lim\limits_{y \searrow 0} \displaystyle\int_a^b H_\mu(x,y)\, dx$.
On pourra s'inspirer de la preuve du théorème 7.12 et utiliser le théorème de convergence dominée.

d) Soit ν une autre probabilité sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$. On suppose que $H_\mu = H_\nu$. Montrer que $\mu = \nu$.
On pourra utiliser la proposition 4.23.

Exercice # 3. (Mesure superficielle) Si $S \subset \mathbb{R}^3$, nous définissons la *mesure superficielle* (aire) $\mathscr{A}(S)$ de S par

$$\mathscr{A}(S) := \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}\, \nu_3(\{x \in \mathbb{R}^3\, ;\, \mathrm{dist}(x,S) \leq \varepsilon\})$$

(si l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}^3\, ;\, \mathrm{dist}(x,S) \leq \varepsilon\}$ est borélien pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, et si la limite existe). Calculer $\mathscr{A}(S)$ si :

a) S est une sphère euclidienne.

b) S est un compact contenu dans $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ (identifié à $\mathbb{R}^2$).
Pour la question b), on pourra établir une inclusion de la forme

$$\{x \in \mathbb{R}^3\, ;\, \mathrm{dist}(x,S) \leq \varepsilon\} \subset K_\varepsilon \times [-\varepsilon, \varepsilon],$$

avec $K_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ convenable.

Exercice # 4. (Calcul d'intégrales oscillantes) Pour $0 < a < 2$, soit

$$I(a) := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx \text{ (intégrale généralisée).}$$

a) En établissant et utilisant l'identité

$$\frac{1}{x^a} = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-xt}\, dt,\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x > 0,$$

montrer que

$$I(a) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^\infty \frac{t^{a-1}}{t^2+1}\, dt.$$

On pourra partir de légalité

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a}\, dx = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \frac{\sin x}{x^a}\, dx$$

et utiliser une estimation connue pour les intégrales généralisées de la forme $\displaystyle\int_A^\infty \sin x\, f(x)\, dx$.

b) En se ramenant à un calcul de fonction Bêta d'Euler, montrer que

$$I(a) = \frac{\Gamma(a/2)\,\Gamma(1-a/2)}{2\,\Gamma(a)}.$$

Indication : faire le changement de variable $t = \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^{1/2}$.

Exercice # 5. (Théorème d'Egoroff (ou Egorov)) Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ *finie*. Soient $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ des fonctions mesurables telles que $f_n \to f$ (convergence simple). Le théorème d'Egoroff affirme que $f_n \to f$ « presque uniformément », au sens suivant :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, C \in \mathscr{T} \text{ tel que } \mu(C) < \varepsilon \text{ et } f_n \to f \text{ uniformément sur } X \setminus C. \tag{1}$$

(La convergence uniforme reviendrait à $C = \emptyset$.)

Prouver ce résultat comme suit.

Soit $(N_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$. Posons

$$A_{k,N_k} := \left\{ x \in X\, ;\, |f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{k},\ \forall\, n \geq N_k \right\},$$

$$B := \bigcap_{k\geq 1} A_{k,N(k)}.$$

(L'ensemble B dépend à la fois de la suite $(f_n)_n$ et de la suite $(N_k)_k$.)

a) Montrer que $A_{k,N_k}, B \in \mathscr{T}$.

b) Montrer que $f_n \to f$ uniformément sur B.

c) Montrer que, pour tout $k \geq 1$, il existe N_k tel que $\mu(X \setminus A_{k,N_k}) < \varepsilon/2^k$.

d) Pour N_k comme dans la question précédente, montrer que $\mu(X \setminus B) < \varepsilon$. Conclure.

Exercice # 6. (Lemme de Brezis-Lieb) *Préliminaire.* Un cas particulier du lemme de Fatou est le suivant. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré. Si $f_n \geq 0$ est mesurable, $\forall\, n$, et $f_n \to f$, alors $\displaystyle\int f \leq \liminf_n \int f_n$. Le lemme de Brezis-Lieb, qui s'applique à des situations plus générales, permet, dans ce cas particulier, de « mesurer » l'écart entre $\displaystyle\int f$ et $\displaystyle\liminf_n \int f_n$.

Dans ce qui suit, les fonctions $f_n : X \to \mathbb{R}$ sont supposées mesurables, avec $(X, \mathscr{T}, \mu)$ mesuré.

a) Supposons $f_n \to f$ et f_n, f intégrables. Montrer que

$$\int |f_n| = \int |f| + \int |f_n - f| + o(1) \text{ quand } n \to \infty.$$ [1]

On pourra commencer par établir l'inégalité

$$-|f| \leq |f_n| - |f_n - f| \leq |f|$$

et utiliser le théorème de convergence dominée.

b) De même si f_n, f sont intégrables et $f_n \to f$ p. p.

c) En déduire le corollaire suivant : si u_n, u sont des fonctions mesurables positives telles que $u_n \to u$ p. p., et si $\int u_n \to \int u < \infty$, alors $\int |u_n - u| \to 0$.

d) (Attention, hypothèse inhabituelle concernant p) Soit $0 < p < 1$. En reprenant la preuve de a), montrer le résultat suivant. Si $f_n \to f$ et $\int |f_n|^p < \infty$, $\int |f|^p < \infty$, alors

$$\int |f_n|^p = \int |f|^p + \int |f_n - f|^p + o(1) \text{ quand } n \to \infty. \tag{2}$$

Exercice # 7. Soit $(X, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions μ-intégrables qui convergent vers 0 simplement. Montrer que

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^n \int f_n = \int \sum_{n\geq 0} (-1)^n f_n.$$

On pourra utiliser la preuve du théorème de Leibniz sur les séries alternées.

Exercice # 8. Dans ce qui suit, $z_1, \ldots, z_n$ sont des nombres complexes. Le problème que nous étudions est le suivant : montrer qu'il existe $J \subset [\![1, \ldots, n]\!]$ tel que la somme

$$S_J := \left| \sum_{j\in J} z_j \right|$$

soit « grande ». Précisons d'abord le problème. Nous avons

$$S_J \leq \sum_{j\in J} |z_j| \leq \sum_{j=1}^{n} |z_j| := S,$$

et donc S_J ne peut pas dépasser S. Nous nous proposons de montrer qu'il existe J tel que « S_J soit une partie significative de S ».

Je ne connais pas la réponse à la question c) (et elle n'est pas demandée). Les questions d) et e) sont indépendantes de a) et b).

Clairement, pour $n = 1$ le meilleur choix est de prendre $J := \{1\}$, et dans ce cas $S_1 = S = |z_1|$. Étudions le cas $n \geq 2$.

a) Si $n = 2$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{2} |z_j|,$$

et que la constante $\frac{1}{2}$ est la meilleure possible.

1. Rappelons que $o(1)$ quand $n \to \infty$ désigne une suite (c_n) telle que $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$.

b) Si $n=3$, montrer qu'il est possible de choisir J tel que

$$S_J \geq \frac{1}{3} S = \frac{1}{3} \sum_{j=1}^{3} |z_j|,$$

et que la constante $\dfrac{1}{3}$ est la meilleure possible.

c) (Je ne connais pas la réponse) Quelle est la meilleure constante si $n=4$? En tout cas, elle n'est pas $\dfrac{1}{4}$. En effet, nous allons montrer le résultat suivant.

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C},\ \exists\, J \subset [\![1, n]\!] \text{ tel que } S_J \geq \frac{1}{\pi} S. \tag{3}$$

Dans ce qui suit, le produit scalaire des nombres complexes $\langle\ ,\ \rangle$ est le *produit scalaire usuel dans* $\mathbb{R}^2$.

d) Soit $\omega = e^{\imath t}$ un nombre complexe de module 1. Posons

$$J_t := \{ j \in [\![1, n]\!]\, ;\, \langle z_j, \omega \rangle \geq 0 \}.$$

(Donc J_t contient les j tels que l'angle entre z_j et ω soit $\leq \pi/2$.)
Montrer que

$$\left| \sum_{j \in J_t} z_j \right| \geq \sum_{j \in J_t} \langle z_j, \omega \rangle = \sum_{j=1}^{n} \langle z_j, \omega \rangle_+. \tag{4}$$

Rappelons que x_+ est la partie positive de x : $x_+ := \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ 0, & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

e) Calculer

$$\int_0^{2\pi} \sum_{j=1}^{n} \langle z_j, e^{\imath t} \rangle_+ \, dt$$

et obtenir (3) grâce à (4).

Exercice # 9. (Intégration par parties (I)) Nous travaillons dans $([0, \infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soient $f, g \in \mathscr{L}^1$. Soient $F(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\, dt$, $G(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} g(t)\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.

a) Montrer que F et G sont bien définies.

b) Montrer que F et G sont continues et bornées.
Pour la continuité, on pourra s'inspirer de la preuve du théorème 7.12, variante p. p.

c) Montrer la formule d'intégration par parties

$$\int_0^{\infty} F(x) g(x)\, dx = \int_0^{\infty} f(x)\, dx \int_0^{\infty} g(x)\, dx - \int_0^{\infty} f(x) G(x)\, dx.$$

Exercice # 10. (Intégration par parties (II)) Nous travaillons dans $(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{\mathbb{R}}, \nu_1)$ et $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

a) Soit $g \in C(\mathbb{R})$ intégrable. Montrer qu'il existe une suite $(R_j)_j \subset [0, \infty[$ telle que $R_j \to \infty$, $g(R_j) \to 0$ et $g(-R_j) \to 0$.
On pourra commencer par montrer que $\displaystyle\lim_{j \to \infty} \int_{[j \leq |x| \leq j+1]} |g| = 0$, et montrer que l'on peut choisir $R_j \in]j, j+1[$.

b) Soit $h \in C^1(\mathbb{R})$, avec h et h' intégrables.

(i) Montrer que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} h' = 0$.

(ii) Montrer que, pour tout $\eta \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\eta} h'(x)\, dx = \imath\eta \int_{\mathbb{R}} e^{-\imath x\eta} h(x)\, dx$.

c) Soit $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$, avec f et $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}$ intégrables. Montrer que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\, dx = \imath\xi_1 \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\imath x\cdot\xi} f(x)\, dx.$$

d) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et $0 < M < \infty$. Proposer et montrer une formule de la forme

$$\int_{[-M,M]^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = \int_{[-M,M]^{n-1}} h(x_2, \ldots, x_n)\, d(x_2, \ldots, x_n) - \int_{[-M,M]^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.$$

e) Soient $f, g \in C^1(\mathbb{R}^n)$ bornées telles que $f, g, \dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial g}{\partial x_1}$ soient intégrables. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) g(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial g}{\partial x_1}(x)\, dx.$$

Exercices avancés

Exercice # 11. (Unicité des mesures *à la* Lebesgue)
I. Soit (X, d) un espace métrique tel que

$$\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_X = \mathscr{B}_{X\times X} \tag{5}$$

(nous verrons en partie II de l'exercice une condition *suffisante* pour la validité de (5)).

Exemple : $X = \mathbb{R}^n$ muni de l'une des métriques induites par une norme $\| \, \|$.

Une mesure borélienne μ sur X est *uniformément répartie* si elle satisfait la condition suivante :

$$\forall\, x, y \in X, \forall\, r > 0,\ 0 < \mu(B(x, r)) = \mu(B(y, r)) < \infty.$$

Le but de cet exercice est de montrer que deux mesures uniformément réparties sont proportionnelles.

En admettant cette conclusion, nous obtenons une autre caractérisation de la mesure de Lebesgue (voir l'item i) ci-dessous).

Soient μ et ν deux mesures uniformément réparties. Soient $g(r) := \mu(B(x, r))$, $h(r) := \nu(B(x, r))$, $\forall\, r > 0$ (ces fonctions dépendent de r, mais pas de $x \in X$).

Dans ce qui suit, U désigne un ouvert non vide et borné de X.

a) Montrer que μ et ν sont σ-finies.

b) Montrer que $0 < \mu(U) < \infty$ et $0 < \nu(U) < \infty$.

c) Montrer que $V := \{(x, y)\,;\ x,\ y \in U,\ d(x, y) < r\}$ est un borélien de $X \times X$.

d) Montrer que

$$U \ni x \mapsto \nu(U \cap B(x, r))$$

est borélienne.

e) Montrer que

$$\int_U \nu(U \cap B(x,r))\, d\mu(x) = \int_U \mu(U \cap B(y,r))\, d\nu(y).$$

(On pourra calculer $\mu \otimes \nu(V)$.)

f) Montrer que

$$\mu(U) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{h(r)} \int_U (\nu(U \cap B(x,r)))\ d\mu(x),$$
$$\nu(U) = \lim_{r \searrow 0} \frac{1}{g(r)} \int_U (\mu(U \cap B(y,r)))\ d\nu(y).$$

g) En déduire qu'il existe un réel $0 < C < \infty$ (indépendant de U) tel que $\mu(U) = C\,\nu(U)$.

h) Conclure.

i) Soit d la distance induite par une norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer l'équivalence suivante :

(i) μ est uniformément répartie sur $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$.

(ii) Il existe $0 < C < \infty$ telle que $\mu = C\,\nu_n$.

II. Nous donnons ici une condition *suffisante* pour la validité de (5), condition qui est satisfaite en particulier par $\mathbb{R}^n$ avec l'une de ses métriques usuelles.

Voici une question d'échauffement.

a) Montrer que, si (X, d) et (Y, δ) sont des espaces métriques *arbitraires*, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X\times Y}$. (Penser à la preuve de l'inclusion $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.)
Donc si une inclusion pose problème dans la vérification de (5), il s'agit de $\mathscr{B}_{X\times Y} \subset \mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$. *En général, cette inclusion est fausse*, mais donner un contre-exemple dépasse le cadre de cet exercice.

Un espace métrique (X, d) est *séparable* s'il existe un ensemble a. p. d. $A \subset X$ dense dans X, donc tel que $\overline{A} = X$.

b) Montrer que $\mathbb{R}^n$ est séparable.

c) Si X est séparable, montrer que pour tout ouvert U nous avons

$$U = \bigcup_{\substack{a\in A, r\in\mathbb{Q} \\ B(a,r)\subset U}} B(a,r).$$

d) Si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, montrer que $X \times Y$ est séparable.

e) Si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, montrer que les ouverts de $X \times Y$ appartiennent à $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y$.

f) En déduire que, si (X, d) et (Y, δ) sont séparables, alors $\mathscr{B}_X \otimes \mathscr{B}_Y = \mathscr{B}_{X\times Y}$.
Cas particulier : $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

Exercice # 12. (Dérivée de l'intégrale) Nous travaillons dans $([0,\infty[, \mathscr{B}_{[0,\infty[}, \nu_1)$. Soit $f \in \mathscr{L}^1$. Soit $F(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\, dt$, $\forall\, x \geq 0$.

Soit $g \in C([0,\infty[)$.

a) Montrer que $[0,\infty[\ni x \mapsto h(x) := \displaystyle\int_{[0,x]} g(t) f(x-t)\, dt$ est continue.

Indication : on pourra utiliser un changement de variable.

b) Montrer que $x \mapsto \int_0^x g(t)F(x-t)\,dt$ est de classe C^1, de dérivée h.

Indication : on pourra partir de la définition de la dérivée, et considérer le taux d'accroissement

$$\frac{\displaystyle\int_0^{x+\varepsilon} g(t)F(x+\varepsilon-t)\,dt - \int_0^x g(t)F(x-t)\,dt}{\varepsilon},\ \varepsilon \neq 0,\ \varepsilon > -x.$$

Exercice # 13. (Théorème d'Orlicz) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide muni de la mesure de Lebesgue. Nous considérons une suite $(e_k)_{k\geq 0} \subset L^2 = L^2(I)$ orthonormée et telle que

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} (f, e_k)\, e_k,\ \forall\, f \in L^2. \tag{6}$$

a) Montrer que, pour tout f, il existe une suite extraite (N_ℓ) (qui en principe dépend de f) telle que

$$\sum_{k=0}^{N_\ell} (f, e_k)\, e_k \to f \text{ p. p. quand } \ell \to \infty.$$

b) En déduire que, pour tout $f \in L^2$, nous avons

$$[f(x)]^2 \leq \sum_{k=0}^{\infty} [(f, e_k)]^2 \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 = \|f\|^2_{L^2(I)} \sum_{k=0}^{\infty} [e_k(x)]^2 \text{ pour presque tout } x \in I. \tag{7}$$

c) En prenant, dans (7), $f := \chi_A$, avec A convenable, en déduire le *théorème d'Orlicz* : pour presque tout $x \in I$ nous avons $\sum_k [e_k(x)]^2 = \infty$.

Indication : commencer par l'ensemble

$$B_j := \left\{ x \in I\,;\ \sum_k [e_k(x)]^2 \leq j \right\},\ j \in \mathbb{N}^*,$$

et utiliser l'exercice # 47 de la feuille #2 pour construire A.

Exercice # 14. (Inégalités de Nikolski'ĭ)

Nous travaillons dans $(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}, \nu_n)$.

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Nous faisons l'hypothèse

$$f \in L^1(\mathbb{R}^n), \tag{8}$$

qui permet de considérer la transformée de Fourier $\widehat{f}$ de f.

L'hypothèse *essentielle* est

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \tag{9}$$

(avec $0 < R < \infty$ constante arbitraire).

Sous ces hypothèses, nous nous proposons de montrer les *inégalités de Nikolskiĭ directes*

$$\|f\|_{L^r} \leq C_1 R^{n(1/p-1/r)}\, \|f\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{10}$$

$$\|\partial_j f\|_{L^r} \leq C_2 R^{n(1/p-1/r)+1}\, \|f\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty,\ \forall\, j \in [\![1, n]\!], \tag{11}$$

où C_1, C_2 sont des constantes *finies* qui peuvent dépendre de n, p et r, mais pas de f ou R. Au passage, sous les hypothèses (8) et (9), nous montrerons que $f \in C^1$.

Sous l'hypothèse *plus forte* (12),

$$\widehat{f}(\xi) = 0 \text{ si } |\xi| \geq R \text{ ou si } |\xi| \leq \frac{R}{2}, \tag{12}$$

nous avons également l'*inégalité de Nikolskiĭ inverse*, énoncée et prouvée, *par souci de simplicité*, uniquement si $n = 1$:

$$\|f\|_{L^r} \leq C_3 R^{1/p-1/r-1} \|f'\|_{L^p},\ \forall\, 1 \leq p \leq r \leq \infty, \tag{13}$$

où C_3 est une constante *finie* qui peut dépendre de p et r, mais pas de f ou R.

Voici la démarche proposée pour montrer (10), (11) et (13).

a) (Argument de *changement d'échelle*) En supposant l'une de trois inégalités vraie pour $R = 1$, elle est vraie pour *tout* R. Voici l'argument pour (10). Soit f une fonction vérifiant (8) et (9). Soit (avec les notations de l'exercice $\#1$ a) de la feuille $\#9$) $g := f_R$.
   (i) Montrer que g vérifie les hypothèses (8) et (9), la dernière pour $R = 1$.
   (ii) En appliquant (10) (supposée vraie si $R = 1$) à g, et en calculant $\|g\|_{L^r}$, respectivement $\|g\|_{L^p}$ en fonction de $\|f\|_{L^r}$, respectivement $\|f\|_{L^p}$, obtenir (10) pour f.

b) Vérifier que la même démarche est valide pour (11) et (13).

c) (Preuve de (10) si $R = 1$)
   (i) Montrer qu'il existe $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(\xi) = 1$ si $|\xi| \leq R$.
   (ii) Montrer qu'il existe $\psi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\widehat{\psi} = \varphi$.
   (iii) Montrer que, de plus, $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.
   (iv) Montrer que $\psi \in L^q(\mathbb{R}^n), \forall\, 1 \leq q \leq \infty$.
   (v) Soit f vérifiant (8) et (9) avec $R = 1$. Montrer que $f = f * \psi$. Indication : prendre la transformée de Fourier dans cette égalité.
   (vi) Si $1 \leq p, q, r \leq \infty$ sont tels que $1 + \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q}$, montrer que $\|f\|_{L^r} \leq \|\psi\|_{L^q} \|f\|_{L^r}$.
   (vii) Conclure.

d) (Preuve de (11) si $R = 1$)
   (i) Montrer successivement que $\psi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\partial_j \psi \in L^1$, $\widehat{\partial_j \psi}(\xi) = \imath \xi_j\, \varphi(\xi)$, $\partial_j \psi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, et $\partial_j \psi \in L^q(\mathbb{R}^n), \forall\, 1 \leq q \leq \infty, \forall\, j \in [\![1, n]\!]$.
   (ii) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ et que $\partial_j f = f * \partial_j \psi, \forall\, j \in [\![1, n]\!]$.
   (iii) Conclure.

e) (Preuve de (13) si $R = 1$) D'après les questions précédentes, nous savons que $f \in C^1(\mathbb{R})$ et que $f' \in L^p(\mathbb{R})$ (et, par ailleurs, que $f' \in L^1(\mathbb{R})$). Il reste à montrer (13).
   (i) Montrer qu'il existe $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ telle que

   $$\zeta(\xi) = \frac{1}{\imath \xi},\ \forall\, \xi \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 1.$$

   (ii) Montrer qu'il existe $\eta \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{\eta} = \zeta$.
   (iii) Montrer que $f = f' * \eta$.
   (iv) Conclure, sur le modèle des questions précédentes.